УДК 519.21; 519.71
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).69-77

Т. О. Лукашів[1], І. В. Малик[2], М. Ю. Горбатенко[3]

[1] Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
t.lukashiv@chnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1651-6402

[2] Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
доктор фізико-математичних наук, доцент
i.malyk@chnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1291-9167

[3] Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичного моделювання,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
m.gorbatenko@chnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1702-8785

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ДОПУСТИМОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ І ПУАССОНОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Встановлено достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями.

Ключові слова: система випадкової структури, допустиме керування, марковські перемикання, пуассонові збурення, функціонал якості

1. Вступ. У роботі [1] встановлено, що для визначення розв'язку лінійно-квадратичної задачі оптимального керування для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями, потрібно знайти додатно визначений розв'язок матричних рівнянь Ріккаті. Необхідні і достатні умови розв'язності цих рівнянь сформулювати в загальному випадку навряд чи видасться можливим. Тому ставиться задача про побудову такого керування, яке б забезпечувало скінченність функціонала якості (і стабілізацію системи, якщо ми говоримо додатково про задачу стабілізації).

У випадку лінійних стохастичних систем випадкової структури без наявності марковських перемикань вказана задача розв'язана І. Я. Кацом [2].

У праці [3], користуючись методикою І. Я. Каца [2] дослідження систем випадкової структури і методикою Є. Ф. Царькова [4] врахування зовнішніх марковських перемикань, встановлено достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних динамічних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями.

У даній роботі узагальнено результати [3] на випадок лінійних автономних систем випадкової структури з марковськими перемиканями і пуассоновими збуреннями.

2. Постановка задачі. На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$ [5] розглянемо автономну систему, яка задана стохастичним диференціальним рівнянням (СДР)

$$dx = [A(\xi(t))x + B(\xi(t))u]dt + \sigma(\xi(t))xdw(t) + C(\xi(t))xdN(t), \ t \in \mathbb{R}_+ \backslash K, \quad (1)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad t_k \in K = \{t_n \Uparrow\}, \quad (2)$$

для $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ і початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \ \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \eta_0 = h \in \mathbf{H}. \quad (3)$$

Тут $\xi(t), t \geq 0,$ — марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y}$, умовна ймовірність якого допускає розклад

$$\mathbb{P}\{\xi(t+\Delta t) \in [\beta, \beta+\Delta\beta] | \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathbb{P}\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t + \Delta t | \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t), \quad (4)$$

де $\mathbb{P}\{\cdot|\cdot\}$ — умовна ймовірність, $p(t, \alpha, \beta)$ і $p(t, \alpha)$ є заданими функціями з властивостями, описаними нижче; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — ланцюг Маркова зі значеннями в просторі $\mathbf{H}$ і матрицею перехідних ймовірностей $\mathbb{P}_H$; $x : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^m$; $w(t)$ є одновимірним стандартним вінеровим процесом; $N(t), t \geq 0,$ — процес Пуассона з інтенсивністю λ; A, B, σ, C — відомі матричні функції, задані на множині $\mathbf{Y}$; процеси w, N, ξ та η незалежні [5], [6].

Процес $x(t), t \geq 0$ є *càdlàg* процесом; керування $u(t) := u(t, x(t)) : [0, T] \times \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ є r-вимірною функцією з класу допустимих керувань U [7].

Припустимо, що умови стрибка фазового вектора $x \in \mathbb{R}^m$ в момент $t = t^*$ зміни структури системи за рахунок переходу зі стану $\xi(t^*-) = \alpha$ в $\xi(t^*) = \beta \neq \alpha$ є лінійними і задаються у формі

$$x(t^*) = K(\alpha, \beta)x(t^*-) + \sum_{s=1}^{J} \xi_s Q_s(\alpha, \beta)x(t^*-), \quad (5)$$

де $K(\alpha, \beta)$ та $Q_s(\alpha, \beta)$ – задані $m \times m$-матриці, $\xi_s, s = \overline{1, J},$ – незалежні випадкові величини, для яких $\mathbf{E}\xi_s = 0$, $D\xi_s < \infty$.

Якість перехідного процесу будемо оцінювати квадратичним функціоналом якості

$$I_u(y, h, x_0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{t_k}^{\infty} \mathbf{E}\{x^T M(t)x + u^T D(t)u / \xi(0) = y, \eta_0 = h, x(0) = x_0\}dt, \quad (6)$$

де $M(t) \geq 0$, $D(t) > 0$ — симетричні матриці відповідних розмірностей.

Означення 1. *Керування u для системи* (1)–(3) *з умовою стрибка* (5) *називається допустимим, якщо воно забезпечує експоненціальну стійкість в середньому квадратичному розв'язку системи і збіжність ряду з інтегралів* (6) *при будь-яких початкових даних* (3).

3. Основний результат. Обговоримо достатні умови існування допустимого керування лінійної системи, коли ξ є однорідним суто розривним марковським процесом, умовна ймовірність переходу якого допускає розклад (4) (перехідна щільність $p(t, \alpha, \beta) \equiv p(\alpha, \beta)$ не залежить від часу).

Відомо [1], що якщо коефіцієнти $A(y)$, $B(y)$, $\sigma(y)$, і $C(y)$ рівняння (1) неперервні в області $\mathbf{Y} = [\zeta_1, \zeta_2]$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^1$, то оптимальна функція Ляпунова $v_k^0(\alpha, h, x) = x^T G_k(t, \alpha) x$ визначається з рівняння

$$G_k(t,\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)G_k(t,\alpha) - B(\alpha)D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k(t,\alpha)+$$
$$+\sigma^T(\alpha)G_k(t,\alpha)\sigma(\alpha) + \lambda C^T(\alpha)G_k(t,\alpha)C(\alpha)+$$
$$+\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[K^T(\alpha,\beta)G_k(t,\beta)K(\alpha,\beta) + \sum_{s=0}^{l} Q_s^T(\alpha,\beta)G_k(t,\beta)Q_s(\alpha,\beta) - G_k(t,\alpha)\right]\times$$
$$\times p_k(\alpha,\beta)d\beta + M_k(t) = 0, \quad k \geq 0, \tag{7}$$

причому оптимальне керування має вигляд $u_k^0(t, \alpha, x) = -D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k x$.

Припустимо, що структура системи (1)–(3) залишається незмінною $\xi(t) = \gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$, стрибки фазового вектора відсутні і марковських перемикань (2) не відбувається. Рівняння (1) перетворюється у диференціальне рівняння

$$dx = [A(\gamma)x + B(\gamma)u]dt + \sigma(\gamma)xdw(t) + C(\gamma)xdN(t), \gamma = \text{const}, \tag{8}$$

яка одержується з (1) «заморожуванням» структури.

Нехай для системи (8), (3) існує допустиме лінійне керування. Тоді з (7) одержуємо рівняння

$$G_k A(\gamma) + A^T(\gamma)G_k - B(\gamma)D_k^{-1}(t,\gamma)B^T(\gamma)G_k+$$
$$+\sigma^T(\gamma)G_k\sigma(\gamma) + \lambda C^T(\gamma)G_k C(\gamma) + M_k(t,\gamma) = 0, \quad k \geq 0, \tag{9}$$

яке має єдиний додатно визначений розв'язок $G_k > 0$ при будь-яких $M_k(t, \gamma) \geq 0$, $D_k(t, \gamma) > 0$.

Рівняння (9) відрізняється від рівняння (7) відсутністю інтегрального доданка в силу незмінності структури системи.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для системи* (1)–(3) *з умовою стрибка* (5) *виконуються наступні припущення:*

1) *при будь-якому фіксованому* $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$ *для системи* (8), (3) *існує лінійне допустиме керування;*
2) *матриці* $A(\gamma)$, $B(\gamma)$, $\sigma(\gamma)$, $C(\gamma)$, $\frac{dA(\gamma)}{d\gamma}$, $\frac{dB(\gamma)}{d\gamma}$, $\frac{d\sigma(\gamma)}{d\gamma}$, $\frac{dC(\gamma)}{d\gamma}$ *обмежені за нормою на множині* $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$*:*

$$\|A(\gamma)\| \leq R, \quad \|B(\gamma)\| \leq R, \quad \ldots \quad, \quad \|\frac{dC(\gamma)}{d\gamma}\| \leq R, \tag{10}$$

де $\|A\| = (SpAA^T)^{\frac{1}{2}}$*;*

3) матриці $K(\alpha,\beta)$ та $Q_s(\alpha,\beta)$, які визначають умову стрибка (5), *задовольняють нерівності*

$$K(\alpha,\beta) = E + (\beta-\alpha)\tilde{K}, \quad Q_s(\alpha,\beta) = \sqrt{\beta-\alpha}\tilde{Q}_s, \tag{11}$$

де $\tilde{K}, \tilde{Q}_s$ – відомі матриці, які не залежать від α і β.

4) для щільності ймовірності переходу $p(\alpha,\beta)$ в (4) *виконується нерівність*

$$p(\alpha,\beta)|\beta-\alpha| < L, \quad \alpha,\,\beta \in [\zeta_1,\zeta_2], \quad \alpha \neq \beta. \tag{12}$$

Тоді можна вказати таку сталу $Q > 0$, що при виконанні нерівності $JL < Q$ для системи (1)-(3) *з умовою стрибка* (5) *існує допустиме керування $u(y,h,x)$.*

Доведення. Розглянемо СДР (8), одержане "заморожуванням"структури. З першої умови теореми випливає, що рівняння (9) має єдиний додатно визначений розв'язок $G_k(t,\gamma) > 0$, і, відповідно, для кожного фіксованого $\gamma \in [\zeta_1,\zeta_2]$ існують оптимальне керування $u_k(\gamma,h,x) = -D_k^{-1}(\gamma)B^T(\gamma)G_k(t,\gamma)x$ і оптимальна функція Ляпунова $v_k^0(\gamma,h,x) = x^T G_k(t,\gamma)x$, які забезпечують експоненційну стійкість в середньому квадратичному системи (8), (3) і мінімізують функціонал (6), причому $\min I_{u_k^0}(\gamma,h,x) = v_k^0(\gamma,h,x)$ [1], [7].

Щоб визначити залежність побудованої функції $v_k(\gamma,h,x)$ від γ, продиференціюємо (9) (поки що формально) за γ. Позначаючи $\frac{dG_k(t,\gamma)}{d\gamma} := H_k(t,\gamma)$, $\tilde{A}_k(t,\gamma) := A_k(\gamma) - B(\gamma)D_k^{-1}(\gamma)B^T(\gamma)G_k(t,\gamma)$, одержимо

$$\begin{gathered} H_k(t,\gamma)\tilde{A}_k(t,\gamma) + \tilde{A}_k^T(t,\gamma)H_k(t,\gamma)+ \\ +\sigma^T(\gamma)H_k(t,\gamma)\sigma_k(\gamma) + \lambda C^T(\gamma)H_k(t,\gamma)C(\gamma) = -R_k(\gamma). \end{gathered} \tag{13}$$

Тут $m\times m$-матриця $R(\gamma)$ означає сукупність всіх членів, які не містять $H_k(t,\gamma)$, явний вигляд якої немає змісту, оскільки він в доведенні не використовується.

Покажемо, що рівняння (13) має єдиний розв'язок $H_k(t,\gamma)$ для довільної матриці $R_k(\gamma)$. Дійсно, система

$$dx = \tilde{A}_k(t,\gamma)xdt + \sigma(\gamma)xdw(t) + C(\gamma)xdN(t) \tag{14}$$

експоненціально стійка в середньому квадратичному, оскільки вона одержана стабілізацією системи (8) за допомогою оптимального керування $u_k^0(\gamma,h,x)$. Тому на розв'язку x цієї системи інтеграл

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\{x^T R_k x/\xi(0) = \gamma, \eta_0 = h, x(0) = x_0\}dt = v_k^0(\gamma,h,x_0)$$

збіжний і є квадратичною формою, причому

$$(lv_k^0)(y,h,x_0) = -x_0^T R_k x_0,$$

де $(lv_k^0)(y,h,x_0)$ слабкий інфінітезимальний оператор в силу системи (8) [1]. Позначаючи матрицю цієї форми через $H(\gamma)$, можна переконатися, що вона задовольняє рівняння (13). Якщо існує інший розв'язок $\widetilde{H}(\gamma) \neq H(\gamma)$, то для квадратичної форми $v(\gamma,h,x)=x^T\overline{H}(\gamma)x$, де $\overline{H}(\gamma)=H(\gamma)-\tilde{H}(\gamma)$, одержимо, що $(lv)(\gamma,h,x)=0$. Звідси випливає тотожність $\mathbf{E}\{v(\gamma,h,x)/\gamma,h,x_0\}\equiv$ $\equiv\mathbf{E}\{v_k^0(\gamma,h,x)/\gamma,h,x_0\}=x_0^T\overline{H}(\gamma)x_0$. В силу довільності $x_0\in\mathbb{R}^m$, приходимо до висновку, що $\overline{H}(\gamma)=0$.

Отже, рівняння (13), як і равняння (9) має єдиний розв'язок при кожному $\gamma\in[\zeta_1,\zeta_2]$. Умови 1) і 2) теореми виконуються на замкнутому інтервалі, а матриці $G_k(t,\gamma)$, $H(\gamma)=\frac{dG_k(t,\gamma)}{d\gamma}$ неперервно залежать від γ, тому можна підібрати змінну $\vartheta>0$ так, щоб виконувалися оцінки

$$\|G_k(t,\gamma)\|\le J\vartheta,\ \ \|H(\gamma)\|\le J\vartheta. \tag{15}$$

Тепер для розмороженої системи (1)–(3) з умовою стрибка (5) візьмемо керування $u_k^0(t,y,h,x)=-D_k^{-1}(t,y)B^T(y)G_k(t,y)x$, $y\in[\zeta_1,\zeta_2]$ і знайдемо умови, при яких воно є допустимим для цієї системи. Для цього скористаємося функцією Ляпунова $v_k^0(y,h,x)=x^TG_k(t,y)x$. За означенням слабкого інфінітезимального оператора в силу систем (1)–(3) і (8), (2), (3), одержимо [1]:

$$(lv_k^0)(y,h,x)\big|_{(1)}=(lv_k^0)(y,h,x)\big|_{(8)}+$$

$$+\mathbf{E}\{v_k^0(\xi(t),h,x(t))-v_k^0(\alpha,h,x)/\xi(t-)=\alpha,\xi(t)=\beta\ne\alpha,h,x(t-)=x(t)=x\}=$$
$$=x^T\left(G_k(t,\alpha)A(\alpha)+A^T(\alpha)G_k(t,\alpha)-B(\alpha)D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k(t,\alpha)+\right.$$
$$+\sigma^T(\alpha)G_k(t,\alpha)\sigma(\alpha)+\lambda C^T(\alpha)G_k(t,\alpha)C(\alpha)+$$
$$+\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[K^T(\alpha,\beta)G_k(t,\beta)K(\alpha,\beta)+\sum_{s=0}^{l}Q_s^T(\alpha,\beta)G_k(t,\beta)Q_s(\alpha,\beta)-G_k(t,\alpha)\right]\times$$
$$\left.\times p_k(\alpha,\beta)d\beta+M_k(t)\right)x=0,\quad k\ge0, \tag{16}$$

Оцінимо квадратичну форму в (16). Маємо

$$M_k(t)+B(\alpha)D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k(t,\alpha)\ge c(t)E,$$

де $c(t)$ дорівнює мінімальному елементу матриці $M_k(t)$ при $\alpha\in[\zeta_1,\zeta_2]$, $t\ge t_k$, E — одинична $m\times m$-матриця.

Оцінку інтегрального доданка проведемо з урахуванням (10), (11), (12), (15):

$$\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[K^T(\alpha,\beta)G_k(t,\beta)K(\alpha,\beta)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{l}Q_s^T(\alpha,\beta)G_k(t,\beta)Q_s(\alpha,\beta)-G_k(t,\alpha)\right]p_k(\alpha,\beta)d\beta\le$$

$$\le JL\vartheta\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[K^T(\alpha,\beta)K(\alpha,\beta)+\sum_{s=0}^{l}Q_s^T(\alpha,\beta)Q_s(\alpha,\beta)-1\right]p_k(\alpha,\beta)d\beta\le$$

$$\le JL\vartheta\rho(\zeta_2-\zeta_1)E,\quad \rho=\text{const}.$$

Таким чином, матимемо

$$(lv_k)(y,h,x) = -x^T[-c + JL\vartheta\rho(\zeta_2-\zeta_1)]x.$$

Вважаючи, що $Q = c[2\vartheta\rho(\zeta_2-\zeta_1)]^{-1}$, матимемо $-c + LJ\vartheta\rho(\zeta_2-\zeta_1) \le -\frac{c}{2}$, якщо $JL < Q$. Отже, незбурений рух системи (1)–(3) з умовою стрибка (5), (11) експоненціально стійкий в середньому квадратичному, оскільки [8]

$$(lv_k)(y,h,x) \le -\frac{c}{2}x^2.$$

Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. *Нерівність $JL < Q$ означає повільну в середньому зміну коефіцієнтів системи* (1)–(3)*, оскільки, наприклад, для матриці $A(\xi(t))$ вірною є оцінка*

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}\mathbf{E}\left\{A(\xi(t+\Delta t)) - A(\xi(t))|\xi(t)=\alpha\right\} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}\mathbf{E}\left\{\frac{dA(\gamma)}{d\gamma}\cdot|\xi(t+\Delta t)-\alpha|\right\} =$$
$$= \|\frac{dA(\gamma)}{d\gamma}\|\cdot\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}|\beta-\alpha|p_k(\alpha,\beta)d\beta \le JL < Q.$$

В умовах теореми 1 міститься вимога про існування керування, яке стабілізує систему (8), (2), (3) при кожному фіксованому значенні $\xi(t) = \gamma \in [\zeta_1,\zeta_2]$. Але природно, що систему можна стабілізувати навіть у тому випадку, коли на деякій множині фіксованих значень $\xi(t) = \gamma \in \overline{Z}$ система (8), (2), (3) не може бути стабілізована. Цього можна очікувати. Якщо ймовірність довгого перебування системи в таких структурних станах як і величина стрибків фазового вектора x досить мала. Для аналізу систем із наявністю перемикаючих процесів викоритовується ергодична теорія процесу перемикань $\xi(t), t \ge 0$

Знайдемо кількісні оцінки для параметрів процесу ξ, при яких в системі зможе реалізуватися вказана ситуація. При цьому для спрощення викладок будемо вважати, що фазові траєкторії при зміні структури системи залишаються неперервними, тобто будемо вважати, що в (5) $K(\alpha,\beta) = E$, $Q(\alpha,\beta) = 0$. Нехай стабілізуюче лінійне керування для системи (8), (2), (3) існує лише для кожного γ із замкнутої множини $Z \subset \mathbf{Y} = [\zeta_1,\zeta_2]$. Позначимо через $\overline{Z}$ доповнення до Z, тобто $\overline{Z} = \mathbf{Y}\backslash Z$ і введемо в розгляд величини

$$q(\alpha,Z) = \int\limits_{Z}|\alpha-\beta|p_k(\alpha,\beta)d\beta, \quad \alpha\in Z,$$

$$p_{k_1}(\alpha,\overline{Z}) = \lim_{\Delta t\to 0+}\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t)\in\overline{Z}/\xi(t)=\alpha\in Z\},$$
$$p_{k_2}(\alpha,Z) = \lim_{\Delta t\to 0+}\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t)\in Z/\xi(t)=\alpha\in\overline{Z}\}. \qquad (17)$$

Тут $q(\alpha,Z)$ — середня швидкість зміни процесу ξ на множині Z, величина $p_{k_1}(\alpha,\overline{Z})\Delta t$ характеризує ймовірність переходу системи (1)–(3) за час Δt із стабілізованого стану $\alpha\in Z$ в множину $\overline{Z}$ нестабілізовних станів, а $p_{k_2}(\alpha,Z)\Delta t$ — ймовірність зворотного переходу.

Теорема 2. *Нехай для системи* (1)–(3) *виконуються умови:*

1) *при будь-якому фіксованому* $\gamma \in Z$ *для системи* (8), (2), (3) *існує допустиме лінійне керування;*
2) *фазові траєкторії* x *системи* (1)–(3) *неперервні при* $t \geq 0$;
3) *параметри системи* (8), (2), (3) *задовольняють оцінки* (10).

Тоді можна вказати константи $\mu > 0, \delta_1 > 0$ *і* $\delta_2 > 0$, *що при виконанні нерівностей*

$$q(\alpha, Z) < \mu, \quad \alpha \in Z,$$
$$p_{k_1}(\alpha, \overline{Z}) < \delta_1, \quad \alpha \in Z,$$
$$p_{k_2}(\alpha, Z) > \delta_2, \quad \alpha \in \overline{Z}, \tag{18}$$

для системи (1)–(3) *існує допустиме керування.*

Доведення. Для довільного $\gamma \in Z$ побудуємо функцію Ляпунова у вигляді $v_k(\gamma, h, x) = x^T G_k(t,\gamma)x$ та керування $u_k^0(t,\gamma,h,x) = -D_k^{-1}(t,\gamma)B^T(\gamma)G_k(t,\gamma)x$, яке стабілзує систему (8), (2), (3) і мінімізує функціонал (6). Матриця $G_k(t,\gamma) > > 0$ задовольняє рівняння (9).

Візьмемо жеяке число $\kappa > 0$ і побудуємо додано визначену за змінною x функцію

$$v_k(y,h,x) = \begin{cases} x^T G_k(t,y)x, \ y \in Z, \\ (\kappa + c_2)x^2, \ y \in \overline{Z}, \end{cases} \tag{19}$$

де позначено $c_1 = \min \|G_k(t,y)\|$, $c_2 = \max \|G_k(t,y)\|$ при $y \in Z$.

Керування $u_k(y,h,x)$ для системи (1)–(3) визначимо рівністю

$$u_k(t,y,h,x) = \begin{cases} u_k^0(t,y,h,x), \ y \in Z, \\ 0, \ y \in \overline{Z}. \end{cases} \tag{20}$$

Умова $u_k(t,y,h,x) = 0$ при $y \in \overline{Z}$ означає, що в нестабілізовних станах керування системою припиняється (нуль покладається для спрощення доведення). Наприклад, в одновимірному випадку нестабілізовність (некеровність) означає, що $B(y) = 0$ при $y \in \overline{Z}$ і тоді вибір будь-якого іншого керування не змінює поведінку системи.

Покажемо, що керування $u_k(t,y,h,x)$ є допустимим при відповідному виборі сталих μ, δ_1, δ_2 в умовах (18).

Оцінимо величину $(lv_k)(y,h,x)$ в силу системи (1)–(3) під дією керування (20). Враховуючи (9), (10), а також умову (15), яка виконується тепер тільки при $\gamma \in Z$, одержимо в точці $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = \alpha \in Z$ наступну оцінку

$$(lv_k)(y,h,x) = x^T \Bigg[-M_k(t,\alpha) - B(\alpha)D_k^{-1}(t,\alpha)B^T(\alpha)G_k(t,\alpha) +$$
$$+ \int\limits_Z (G_k(t,\beta) - G_k(t,\alpha))p_k(\alpha,\beta)d\beta +$$
$$+ \int\limits_{\overline{Z}} ((\kappa + c_2)E - G_k(t,\alpha))p_k(\alpha,\beta)d\beta \Bigg] x \leq$$

$$\leq x^T[-c + J\vartheta q(\alpha, Z) + (c_2 - c_1 + \kappa)p_{k_1}(\alpha, \overline{Z})]x. \tag{21}$$

Аналогічно, при $y = \alpha \in \overline{Z}$, одержимо оцінку

$$(lv_k)(y, h, x) = x^T \Bigg[2(\kappa + c_2)A_k(\alpha) +$$

$$+\sigma^T(\alpha)\sigma(\alpha) + \lambda C^T(\alpha)C(\alpha) +$$

$$+ \int\limits_Z (G_k(t, \beta) - (\kappa + c_2)E)p_k(\alpha, \beta)d\beta \Bigg] x \leq$$

$$\leq x^T[2J(\kappa + c_2) + J^2 - \kappa p_{k_2}(\alpha, Z)]x. \tag{22}$$

З (21) і (22) випливає, що від'ємна визначеність $(lv_k)(y, h, x)$ може бути забезпечена досить малим значенням величин $q(\alpha, Z)$ і $p_{k_1}(\alpha, \overline{Z})$, а також досить великим значенням $p_{k_2}(\alpha, Z)$.

Зокрема, у (18) можна вказати такі малі значення $\mu > 0$ і $\delta_1 > 0$, щоб $J\vartheta\mu + (c_2 - c_1 + \kappa)\delta_1 < \frac{c}{2}$, а $\delta_2 = (2J(\kappa + c_2) + J^2 + \frac{c}{2})\kappa^{-1}$. Тоді для довільних $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbf{Y}$ вірною є оцінка

$$(lv_k)(y, h, x) \leq -\frac{c}{2}x^2.$$

що і доводить теорему 2.

Зауваження 2. *В доведенні теореми 2 фігурує вільний параметр κ, яким можна маніпулювати так, щоб оптимізувати в деякому розумінні перехідні ймовірності $p_{k_1}(\alpha, \overline{Z})$ і $p_{k_2}(\alpha, Z)$.*

Зауваження 3. *Теорема 2 доведена в припущенні про неперервність фазової траєкторії x. При деякому ускладненні викладок можна довести, що аналогічний результат має місце і при наявності стрибків фазового вектора, які визначаються умовами* (5), *якщо тільки ці стрибки досить малі [2].*

Зауваження 4. *Слід відмітити, що керування* (20), *яке стабілізує систему* (1)–(3) *буде лінійним за змінною x при кожному фіксованому $\xi(t) \in [\zeta_1, \zeta_2]$.*

4. Висновки. У роботі розглянуто стабілізацію лінійних стохастичних диференціальних систем випадкової структури з марковськими переключеннями. Для лінійних систем розглянуто достатні умови стабілізації на основі квадратичного функціалу якості.

Для розглянутих систем, умови експоенеціальності стійкості та умови керовності розглянуто на основі щільності $p(\alpha, \beta)$ процесу переключень $\xi(t)$. Такий підхід дозволяє дещо спростити умови, накладені на щільність процесу переключень, наприклад умову строгої ергодичності.

Список використаної літератури

1. Antonyuk S. V., Byrka M. F., Gorbatenko M. Y., Lukashiv T. O., Malyk I. V. Optimal Control of Stochastic Dynamic Systems of a Random Structure with Poisson Switches and Markov Switching *Journal of Mathematics. Article ID 9457152.* 2020. Vol. 2020. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/9457152
2. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: УГАПС, 1998. 222 с.

3. Лукашів Т. Достатні умови стабілізовності лінійних стохастичних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями. *Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць.: Математика.* 2009. Вип. 485. С. 35–40.
4. Свердан М. Л., Царьков Е. Ф. Устойчивость импульсных систем. Рига: РТУ, 1994. 300 с.
5. Dynkin E. B. Markov Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1965. 366 p.
6. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2013. 379 p.
7. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление систем с последействием. Москва: Наука, 1992. 336 с.
8. Королюк В. С., Царков Є. Ф., Ясинський В. К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. У 3 т. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: Вид-во «Золоті литаври». 2009. 798 с.

Lukashiv T. O., Malyk I. V., Gorbatenko M. Yu. Sufficient conditions of the existence of admissible control for linear stochastic systems of random structure with Markov switches and Poisson perturbations.

Sufficient conditions for the existence of admissible control for linear stochastic systems of a random structure with Markov switches and Poisson disturbances have been established.

Keywords: random structure system, admissible control, Markov switches, Poisson perturbations, quality functional.

References

1. Antonyuk, S. V., Byrka, M. F., Gorbatenko, M. Y., Lukashiv, T. O., & Malyk, I. V. (2020). Optimal Control of Stochastic Dynamic Systems of a Random Structure with Poisson Switches and Markov Switching *Journal of Mathematics. Article ID 9457152,* 1–9. https://doi.org/10.1155/2020/9457152
2. Kats, I. Ya. (1998). Lyapunov Function Method in Problems of Stability and Stabilization of Random-Structure Systems. *Yekaterinburg: Izd. Uralsk. Gosakademii Putei Soobshcheniya* [in Russian].
3. Lukashiv, T. (2009). Sufficient conditions for the stability of linear stochastic systems of random structure with external Markov switches. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Mathematics,* 485, 35–40 [in Ukrainian].
4. Sverdan, M. L., & Tsar'kov, E. F. (1994). Stability of Stochastic Impulse Systems. *Riga: RTU* [in Russian].
5. Dynkin, E. B. (1965). Markov Processes. *Berlin: Springer-Verlag.*
6. Oksendal, B. (2013). Stochastic Differential Equations. *Berlin: Springer-Verlag.*
7. Andreeva, E. A., Kolmanovskii V. B., & Shaikhet L. E. (1992). Control of hereditary systems. *Moskow: Nauka* [in Russian].
8. Korolyuk, V. S., Tsar'kov, E. F., & Yasinskyy, V. K. (2009). Ymovinist', statystyka, vypadkovi protsesy. Teoriia i compyuterna praktyka. U 3 t. Vypadkovi protsesy. Teoriia i compyuterna praktyka [Probability, statistics and stochastic process: Theory and computer practice. In 3 vol. Vol 3: Stochastic process: Theory and computer practice]. (Vol. 3). *Chernivtsi: «Zoloti lytavry»* [in Ukrainian].

Одержано 12.10.2022