УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).23-28

В. М. Бондаренко[1], О. В. Зубарук[2]

[1] Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
канд. фіз.-мат. наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

ПРО КАТЕГОРІЮ ЗОБРАЖЕНЬ КОМУТАТИВНОЇ НЕЦИКЛІЧНОЇ НАПІВГРУПИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ОДИНИЧНОГО І НУЛЬОВОГО ЕЛЕМЕНТІВ

Класифікацію напівгрупи третього порядку (в термінах таблиць Келі, з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) вперше отримав Т. Тамура в 1953 р., а згодом, але вже за допомогою комп'ютерної програми, Г. Е. Форсайт (1955 р.). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані в працях В. М. Бондаренка і Я. В. Заціхи. Вони також описали зображувальний тип напівгруп третього порядку над довільним полем і у вмпадку напівгруп скінченного зображувального типу вказали канонічні форми матричних зображень.

У низці попередніх праць автори вивчали категорні властивості напівгруп малого порядку і, зокрема, досліджували матричні алгебри Ауслендера для напівгруп третього порядку. У цій статті продовжуються такі дослідження.

Ключові слова: поле, напівгрупа, антиізоморфізм, визначальні співвідношення, матричні зображення, зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку описано в [1]. Якщо розглядати лише комутативні напівгрупи, та ще й такі, що не є ні циклічними, ні циклічними з приєднаним одиничним чи нульовим елементом, то існує, з точністю до ізоморфізму), лише чотири напівгрупи (в круглих дужках вказано всі елементи, в кутових — мінімальну систему твірних, а потім — визначальні співвідношення):

(a) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=0$, $bc=cb=0$;

(b) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=cb=0$;

(c) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=cb=0$;

(d) $(c^2,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^3=c$ (є наслідком решти співвідношень), $b^2=c^2$, $bc=cb=c$.

Зауважимо, що тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних 0 і e (якщо вони є) не виписуються.

Всі ці напівгрупи ручні, причому, окрім напівгрупи (a), — скінченного зображувального типу, тобто мають скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень [1].

У випадку скінченного зображувального типу однією із форм дослідження категорії зображень є опис алгебри Ауслендера як алгебри ендоморфізмів прямої суми представників усіх класів еквівалентності нерозкладних зображень. У простому випадку (b) алгебра Ауслендера розглядалася як приклад в роботі [2], а у випадку (c) вивчалася в [3]. У цій роботі ми вивчаємо алгебру Ауслендера напівгрупи (d).

2. Формулювання основного результату. Нехай S — напівгрупа і $T = \{T(x) \,|\, x \in S\}$ — її матричне зображення. *Ендоморфізмом зображення* T називається матриця X така, що $T(x)X = XT(x)$ для будь-якого $x \in S$. Зрозуміло, що коли зафіксована система твірних напівгрупи, то вказану рівність достатньо розглядати лише для твірних елементів. Всі матриці з такою властивістю утворюють алгебру, яка називається *алгеброю ендоморфізмів зображення* T. У випадку, коли напівгрупа S має скінченний зображувальний тип, алгебра ендоморфізмів прямої суми Σ всіх, з точністю до еквівалентності, нерозкладних зображень (тобто, по одному представнику з кожного класу еквівалентності) називається *алгеброю Ауслендера напівгрупи* S *над полем* K і позначається нами через $Aus_K(S)$. Оскільки ми розглядаємо матричні зображення, то алгебру $Aus_K(S)$ природно називати *матричною алгеброю Ауслендера.* Зауважимо, що вона не залежить від вибору представників у класах еквівалентності в тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри ізоморфні; більш того, вони спряжені як підалгебри повної матричної алгебри відповідного порядку.

Сформулюємо тепер основний результат. Напівгрупу вигляду (d) позначимо через S_d.

Теорема 1. *Матрична алгебра Ауслендера $Aus_K(S_d)$ напівгрупи S_d над полем K характеристики, відмінної від двох, складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K.

3. Доведення теореми 1. Канонічні форми матричних зображень комутативних напівгруп третього порядку отримано в роботі [1] з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач та зображень (див., напр., [4]–[15]). Зокрема, для напівгрупи S_d канонічна форма має такий вигляд:

$$b \to B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

де E — деякі одиничні клітини (розмірність яких ми не фіксуємо). Оскільки будь-яке зображення еквівалентне зображенню вигляду ($*$) (при цьому деякі одиничні клітини можуть бути "порожніми", тобто мати розмірнвсть 0), то і для прямої суми Σ всіх представників класів еквівалентності нерозкладних зображень виконується ця властивість. Значить для обчислення алгебри Ауслендера можна вважати, що зображення Σ має вигляд ($*$). Зрозуміло, що при цьому (якщо міркувати лише чисто формально) всі одиничні клітини мають розмірність 1 або 0 (інакше деяке зображення входить в Σ два рази або більше). Та ефективність методу, застосованого для отримання канонічної форми, полягає і в тому, що якщо в матриці Σ всі одиничні клітини вважати одновимірними, то переставно нерозкладні прямі доданки будуть взагалі нерозкладними і попарно нееквівалентними. Це легко перевірити (в даному випадку) і безпосередньо. Дійсно, зображення Σ дорівнює прямій сумі зображень

1) $B_1 = (1),\ C_1 = (1);$

2) $B_2 = (1),\ C_2 = (-1);$

3) $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $B_4 = (0),\ C_4 = (0),$

кожне з яких, очевидно, нерозкладне. і всі вони попарно нееквівалентні. Звідси маємо, що зображеннями 1)–4) вичерпуються всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення напівгрупи S_d і, отже, алгебру Ауслендера можна обчислювати, виходячи із зображення Σ_0 вигляду $(*)$ з одновимірними одиничними клітинами. Таким чином, зображення Σ_0 має такий вигляд:

$$b \to B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \to C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а значить матрична алгебра Ауслендера задається рівностями $B_0X = XB_0$, $C_0X = XC_0$ як рівняннями відносно матриці $X = (x_{ij})$, $1 \le i, j \le 5$.

Оскільки матриця C_0 діагональна, то рівність $C_0X = XC_0$ еквівалентна рівностям $x_{ij} = 0$ для $i = 1, j = 2,3,4,5,\ i = 2, j = 1,3,4,5,\ i = 3,4,5, j = 1,2$. Цей факт є частинним випадком загальних теорем (див., напр., [16, VIII, §2]), але легко аипливає безпосередньо із рівності $C_0X = XC_0$. Дійсно, запишемо останню рівність в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси (після перемноження матриць)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} & -x_{24} & -x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & -x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & -x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & -x_{42} & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & -x_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки, в свою чергу,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівність $B_0X = XB_0$ має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{53} & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

4. Висновки. У роботі вивчається категорія матричних зображень комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів. Описана матрична алгебра Ауслендера над довільним полем характеристики, відмінної від 2. Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні категорій зображень інших напівгруп.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2018. Вип. 1. № 32. С. 36–49.
2. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2015. Т. 12, № 3. С. 56–64.
3. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера напівгрупи, породженої двома анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2021. Вип. 38. № 1. С. 48–54.
4. Бондаренко В. М. Связки полуцепных множеств и их представления. (Препр. АН УССР. Ин-т математики; 88.60). Киев, 1988. 32 с.
5. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Записки науч. семинаров ЛОМИ.* 1977. Т. 71. С. 24–41.
6. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2018. Т. 33. № 2. С. 19–26.
7. Бондаренко В. М., Назарова Л. А, Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. Представления и квадратичные формы. *Ин-т математики АН УССР. Киев.* 1979. С. 75–105.
8. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. *Ин-т математики АН УССР. Киев.* 1977. С. 104–114.
9. Назарова Л А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.* 1990. Т. 183. С. 149–159.
10. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1972. Т. 28. С. 5–31.
11. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications.* 2003. Vol. 365. P. 45–90.
12. Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V. Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications.* 2009. Vol. 430. No. 1. P. 86–105.
13. Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2013. Vol. 16. No. 1. P. 16–19.
14. Bondarenko V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2008. No. 4. P. 15–22.
15. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V. On classification of pairs of potent linear operators with the si mplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2016. Vol. 21. No. 1. P. 18–23.
16. Гантмахер Ф. Р.Теория матриц. Москва : Наука, 1966. 576 с.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On the category of representations of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements.

The classification of semigroups of the third order (in terms of Cayley tables, up to isomorphism and antiisomorphism) was first described by T. Tamura in 1953, and later, but with the help of a computer program, by G. E. Forsyth (1955). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups were constructed in the works of V. M. Bondarenko and Y. V. Zatsikha. They also described representational type of third-order semigroups over an arbitrary field and in the case of semigroups of finite representational type, the canonical forms of matrix representations were indicated.

In a number of previous works, the authors studied the categorical properties of semigroups of small order and, in particular, studied matrix Auslander algebras for third-order semigroups. This article continues such research.

Keywords: field, semigroup, antiisomorphism, defining relations, matrix representation, representation type, canonical form, Auslander algebra.

References

1. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics,* 32(1), 36–49 [in Ukrainian].
2. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2015). Σ-function of the number of parameters for the matrix representations system. *Proc. Inst. math. NAS of Ukraine,* 12(3), 56–64 [in Russian].
3. Zubaruk, O. V. (2021). On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics,* 38(1), 48–54 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M. (1988). *Svyazki polutsepnykh mnozhestv i ikh predstavleniya* [Bundles of semichained sets and their representations]. (Prepr. / AN USSR. In-t matematiki; 88.60). Kiev [in Russian].
5. Bondarenko, V. M., & Drozd, Ju. A. (1977). *Predstavlencheskiy tip konechnykh grupp* [The representation type of finite groups]. Modules and representations. Zap. Nauch. Sem. LOMI, 71, 24–41 [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). On matrix representations of monoids of the fourth order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics,* 33(2), 19–26 [in Ukrainian].
7. Bondarenko, V. M., Nazarova, L. A., & Zavadskii, A. G. (1979). O predstavleniyakh ruchnykh chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of tame partially ordered sets]. *Representations and quadratic forms. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat.,* Kiev, 75–106 [in Russian].
8. Drozd, Ju. A. (1977). O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh [Tame and wild matrix problems]. *Matrix problems, Akad. NaukUkrain. SSR Inst. Mat.,* Kiev, 104–114 [in Russian].
9. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Ruchnyye chastichno uporyadochennyye mnozhestva s involyutsiyey [Tame partially ordered sets with involution]. *Trudy Mat. Inst. Steklov,* 183, 149–159 [in Russian].
10. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Predstavleniya chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of partially ordered sets]. *Zap. Nauch. Sem. LOMI,* 28, 5–31 [in Russian].
11. Bondarenko, V. M. (2003). Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications,* 365, 45–90.
12. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications,* 430(1), 86–105.
13. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn, E. M. (2013). On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra Discrete Math.,* 16(1), 16–19.
14. Bondarenko, V. M., & Tertychna, O. M. (2008). On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra Discrete Math.,* 4, 15–22.
15. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math.,* 21(1), 18–23.
16. Gantmakher, F. (1966). Teoriya matrits [Matrix theory]. *Moskow: Nauka* [in Russian].

Одержано 15.09.2022