

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).115-128](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).115-128)**С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², В. Ф. Лазар³, М. В. Микоряк⁴**¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,

провідний науковий співробітник,

доктор технічних наук, професор

babich_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>² Хмельницький національний університет,

доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,

кандидат фізико-математичних наук

yaretskano@khmnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>³ Мукачівський державний університет,

доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,

кандидат технічних наук

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,

здобувач першого (бакалаврського) рівня вищої освіти,

mykoryak.maryna@student.uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3066-8912>

ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА ТА ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Стаття присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та двох пружних півпросторів з початковими напруженнями в аналітичному вигляді без врахування сил тертя. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння.

Дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампа та пружних основ (півпросторів) однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь.

Для дослідження задачі використовується велика кількість фундаментальних результатів таких як: перетворення Ханкеля, парні інтегральні рівняння, ортогональні поліноми та інші методи теорії контактних задач лінійної теорії пружності. Числовий аналіз представлений для потенціалу Трелоара у вигляді графіків. Відзначено достатній вплив початкових (залишкових) напружень у двох пружних півпросторах

та пружному циліндричному штампі на розподіл контактних напружень в області контакту.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, циліндричний штамп, півпростір.

1. Вступ. Актуальною задачею сучасного машинобудування та будівництва споруд є підвищення довговічності, зносостійкості та надійності механізмів, машин та інженерних конструкцій. Звісно, широке коло наукових досліджень у межах механіки деформованого твердого тіла сприяє успішному її розв'язку. Від методів розрахунку передачі навантаження у деталях машин та конструкціях залежать ряд завдань, таких як: збільшення термінів експлуатації машин та споруд, зменшення їх ваги, зниження собівартості матеріалів, економічної сумісності тощо.

У багатьох публікаціях періодичних наукових видань та працях навчального і монографічного характеру [1, 2] досить детально вивчені питання, що стосуються контактних задач для пружних, пластичних та в'язко пружних тіл без дії на них початкових напружень. Кількість таких публікацій доволі велика. Але запити сучасної інженерно-технічної практики висувають до дослідників ряд задач, які потребують використання більш ускладнених моделей до яких належать моделі суцільних середовищ. До факторів, які мають бути врахованими під час контактної взаємодії твердих деформованих тіл, відносять: поверхневі властивості матеріалу, тертя, жорсткість поверхні, тепловиділення, зносостійкість поверхні тіл тощо [3, 4]. Отже, під час контактної взаємодії тіл важливим є фактор врахування початкових напружень.

Незважаючи на те, що в останні десятиліття розвиток контактних задач досягнув суттєвих успіхів, у механіці твердого деформованого тіла все ще залишається ряд проблем, які вимагають уваги наукової спільноти. До них належать питання врахування початкових напружень під час контактної взаємодії пружних тіл. Дані дослідження представлені великою кількістю наукових статей, серед яких відзначимо роботи [5 – 15].

Оскільки початкові напруження присутні практично в усіх компонентах деталей машин та конструкцій, елементах будівель та споруд й, навіть, у кровоносних судинах живих істот, то їх врахування є важливою задачею теорії пружності.

Для компенсації контактних характеристик, що виникають у процесі роботи в елементах конструкцій доречно іноді навмисно створювати початкові напруження. Це дає змогу підвищити характеристики міцності конструкцій та матеріалів. А враховуючи, що нові штучні матеріали можуть витримувати достатньо великі початкові деформації, особливої актуальності набуває дослідження контактних задач для попередньо напружених тіл.

Проблема дослідження впливу початкових деформацій на напружено-деформованих стан тіл, що знаходяться у контакті, виникла у цілому ряді фундаментальних та прикладних наукових напрямків, таких як: механіка композитів, механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівних методах визначення навантажень, сейсмологія, біомеханіка, механіка гірських порід, геофізика тощо. Отже, необхідність у дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл є важливим аспектом вивчення представлених проблем.

Для правильної оцінки запасів міцності матеріалів, також, необхідно більш ефективно враховувати початкові напруження. Їх необхідно враховувати при створенні матеріалів з яких виготовляють конструкції та під час розрахунку відповідальних елементів споруд та машин. Також, це дозволить суттєво знизити матеріаломісткість конструкцій, зберігши одночасно і фундаментальні характеристики матеріалів у цілому.

Спираючись на дослідження [9] якісних та кількісних характеристик підсилення несних елементів конструкції пружними скінченними накладками (стрингерами), можна побачити, що наявність початкових напружень, достатньо сильно впливає на міцнісні ресурси матеріалів цієї конструкції. Відзначимо, що розглянуті тіла у [9] — є пружними, а контактна взаємодія між основами (тілами) відбувається після виникнення у них початкових (залишкових) напружень.

Історично, для розв'язку контактних задач, що враховують початковий напружено-деформований стан, склалися два підходи, які розвивалися паралельно. Першим підходом був розв'язок контактних задач для тіл з пружними потенціалами конкретної структури, а другим підходом було дослідження задач для пружних тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу.

Однією із перших (стосовно першого напрямку) була опублікована праця [10], в якій представлено розв'язок задачі для колової тріщини пружного нестисливого тіла з початковими напруженнями у випадку потенціалу Трелоара. До цього ж напрямку належать і наукові праці вітчизняних та зарубіжних вчених [11, 12].

Фундаментальні результати другого напрямку були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. Гузем О. М. [3, 13, 14]. Ним вперше було розв'язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями. Даний метод розв'язку оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових контактних задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями (другий напрямок), отримала у працях його учнів [5, 6, 8, 9, 13–15].

На думку авторів статті, перевага другого підходу над першим полягає в тому, що другий підхід дозволяє розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. А необхідні графіки та числові результати для конкретних пружних потенціалів можуть бути отримані лише на завершальному етапі. А перший підхід передбачає розв'язок поставленої задачі лише для одного конкретного потенціалу.

Тому у даній статті дослідження контактної задачі для попередньо напружених ідентичних півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку нерівних коренів визначального рівняння [14] виконано у межах другого підходу. Причому аналітичні розв'язки у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності представлені у статті [15], а числові

результати дослідження [15] пропонуємо читачам у даній статті.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однорідні та рівні. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [1].

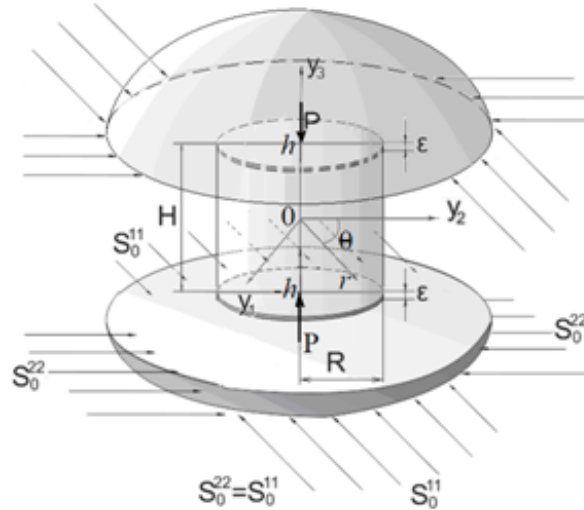


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями.

2. Постановка задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не завантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R — радіус циліндричного штампа, $h = 0,5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1 величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} — компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. А у випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані y_i ($i = 1, 3$).

Вважаємо, що початкові стани у штампах та циліндрі однорідні та рівні, а пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [9]. Крім того, дія штампа викликає в тілах

мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану y_i , які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$).

У даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ($\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$) характеристичного (визначального) рівняння [9].

У системі колових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = 1, 2$), $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного штамп в області контакту $z_i = \pm h/v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, \quad Q'_{33} = Q'^{(i)}_{33}, \quad Q'_{3r} = 0, \quad Q'^{(3)}_{3r} = 0, \quad (0 \leq r \leq R) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h/v_i$, ($i = \overline{1,2}$):

$$Q'^{(i)}_{33} = 0, \quad Q'^{(i)}_{3r} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad (r > R) \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

3) на боковій поверхні пружного штамп $r = R$:

$$Q'_{rr} = 0, \quad Q'^{(3)}_{3r} = 0, \quad (|z_i| \leq h/v_i), \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодією навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q'^{(i)}_{33}| dr, \quad |Q'^{(i)}_{33}| = |Q'^{(i)}_{3r}|_{z_i = \pm h/v_i}, \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова (5) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штамп із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

3. Основні співвідношення та метод розв'язку. Напружено-деформований стан у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [14, 15]:

$$Q'^{(i)}_{33}(\rho; \zeta_i) = \frac{C_{44}(1+m_1)l_1}{R} \int_0^\infty F(\eta)(s e^{\eta\zeta_2} - s_3 e^{\eta\zeta_1}) J_0(\eta\rho) d\eta,$$

$$Q'^{(i)}_{3r}(\rho; \zeta_i) = -\frac{C_{44}(1+m_1)}{v_1 R} \int_0^\infty F(\eta)(e^{\eta\zeta_2} - e^{\eta\zeta_1}) J_1(\eta\rho) d\eta, \quad (6)$$

$$U_3^{(i)}(\rho; \zeta_i) = -\frac{m_1}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} (s_2 e^{\eta\zeta_2} - s_3 e^{\eta\zeta_1}) J_0(\eta\rho) d\eta,$$

$$U_r^{(i)}(\rho; \zeta_i) = - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} (e^{\eta\zeta_2} - s_3 e^{\eta\zeta_1}) J_1(\eta\rho) d\eta,$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} \omega'_{1313}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111}n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}; \\ \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} n_i; \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}; \\ \frac{\kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\lambda_3 q_3}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases}$$

$\xi = \frac{z_i v_i}{R}$, $\zeta_i = \frac{\xi}{v_i} = \frac{z_i}{R}$, $\eta = \xi R$, ($i = 1, 2$), $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $s_0 = (1 + m_2)(1 + m_1)^{-1}$, $s_1 = (m_1 - 1)m_1^{-1}$, $s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}$, $s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1}$, $F(\eta)$ — шукана функція, $J_v(x)$ — функції Бесселя дійсного аргументу.

Які в області контакту ($y_3 = \pm h$, $z_i = \pm h/v_i$ ($i = 1, 2$)) набувають вигляду:

$$Q_{33}^{(i)}(\rho; \zeta_i) = \frac{2\varepsilon C_{44}(1 + m_1)l_1}{\pi R} \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} [s S_2^0(\rho; \zeta_2) - s_3 S_2^0(\rho; \zeta_1)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Phi_k^* [s K_1^0(\rho; \mu_k; \zeta_2) - s_3 K_1^0(\rho; \mu_k; \zeta_1)] \right\rangle \quad (7)$$

$$U_3^{(i)}(\rho; \zeta_i) = \frac{2m_1\varepsilon}{n_1\pi} \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} [s_3 S_1^0(\rho; \zeta_1) - s_2 S_1^0(\rho; \zeta_2)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Phi_k^* [s_3 K_0^0(\rho; \mu_k; \zeta_1) - s_2 K_0^0(\rho; \mu_k; \zeta_2)] \right\rangle$$

де

$$S_p^m(\rho; \zeta_i) = \int_0^\infty \eta^{p-1} \psi(\eta, 0) e^{\eta\zeta_i} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$$K_p^m(\rho; \mu_k; \zeta_i) = \int_0^\infty \eta^p \psi(\eta, \mu_k) e^{\eta\zeta_i} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$\psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta}$, $\omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1(s_3 - s_2)}$, $\psi(\eta, \mu_k) = \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}$, μ_k — розв'язок рівняння $J_1(\mu_k) = 0$, χ_k — деякі невідомі сталі, F_k^* — величина, яка

буде представлена нижче

$$\Phi_k^* = \frac{\mu_k F_k^*}{R n_1} \left[m_1 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \frac{n_2 \mu_k \varepsilon \omega_2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 R \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(\frac{n_2 \mu_k \varepsilon \omega_2}{n_1 s_0 R} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{v_2 \mu_k \varepsilon \omega_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{n_1 R \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right) \right].$$

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями у випадку нерівних коренів ($\xi_2^2 \neq \xi_3^2$) характеристичного рівняння [14] приймемо у вигляді:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \tag{8}$$

де

$$\tilde{\chi}_1 = C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + J_0(\alpha_k r) S_2(\alpha_k z_1)],$$

$$\tilde{\chi}_2 = C_0 z_2 (3r^2 - 2z_2^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k v_2 z_2) + J_0(\alpha_k r) S_3(\alpha_k z_2)],$$

$I_\nu(x)$ — функція Бесселя уявного аргументу, $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$ — деякі сталі коефіцієнти, α_k, γ_k — власні значення задачі (2)–(5).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів рівняння [14], із врахуванням граничних умов (2)–(5), представимо у вигляді

$$U_3^{(3)} = \frac{\varepsilon \omega_2}{R} \left\langle -\frac{R}{\omega_2 h \theta_6} \left[\frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{n_1} \left\{ \gamma_k^2 \left[\frac{s_0 m_1 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_k^2}{R^2} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \right. \right. \right.$$

$$+ \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(\frac{v_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \frac{n_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \right) \right] \right\} \chi_k, \quad (9)$$

$$Q'_{33} = \varepsilon C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\chi_0}{h \theta_6} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\omega_2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 \left[\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \frac{s n_2}{n_1} I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \right. \\ \left. + \frac{\mu_k^3}{R^3 n_1} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right)}{v_1} + \frac{s \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{s v_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \right\} \chi_k \right\rangle,$$

де

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'_{1122}{}^{-1}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'_{1122}{}^{-1}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'_{1122}{}^{-1} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'_{1122}{}^{-1} n_i^{-1}; \end{cases}$$

$$(i = \overline{1, 2}), \quad \theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3},$$

$$F_k^* = (1 + \alpha_k^3) \gamma_k^3 \left[\frac{n_1 \tilde{A}_k^* G_k(1; R)}{1 - \gamma_k^2 v_1^2} \left(\gamma_k v_1 \sin(\gamma_k h) \cos \left(\frac{h}{v_1} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left(\frac{h}{v_1} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{n_2 G_k(2; R)}{1 - \gamma_k^2 v_2^2} \left(\gamma_k v_2 \sin(\gamma_k h) \cos \left(\frac{h}{v_2} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left(\frac{h}{v_2} \right) \right) \right] / \\ / \left(\alpha_k^3 J_0(\alpha_k R) \left[\frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} E_k^* \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \cos \left(\frac{h}{v_1} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \sin \left(\frac{h}{v_1} \right) \right) + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} N_k^* \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \cos \left(\frac{h}{v_2} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \sin \left(\frac{h}{v_2} \right) \right) \right] \right), \\ N_k^* = \frac{v_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$E_k^* = \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$G_k(i; R) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) I_0(\gamma_k v_i r) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_i r} I_1(\gamma_k v_i r),$$

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{h}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \tilde{A}_k^* = -\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)}.$$

де χ_k — шукані сталі.

Далі з подвійних інтегральних рівнянь [15] та перших граничних умов (2)–(3) визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (8) через нескінченну систему констант χ_k :

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \left((1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} \psi(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \psi(\eta, \mu_k) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

для відшукування невідомих χ_0, χ_k , що входять до (6), (7) та (10) отримаємо нескінченну систему:

$$\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n = \tilde{\beta}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

де

$$\tilde{\alpha}_0 = \varepsilon \left(\frac{R(v_2 + s)}{2h v_1 v_2 \theta_6 (s - s_3)} - \frac{2\omega_2}{\pi n_1} \right); \quad \tilde{\alpha}_{k0} = \frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\beta}_0 = -\frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1};$$

$$\tilde{\beta}_k = -\frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\alpha}_{00} = 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^* \frac{\mu_k}{R} \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \psi(0, \mu_k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{0n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^4 \cos(\gamma_n h) R J_0(\mu_n) \left[\frac{\tilde{A}_n^* v_1^3 I_1(\gamma_n v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_1 R^2} + \frac{s v_2^3 I_1(\gamma_n v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mu_n^4 \varepsilon \omega_2}{2R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{R v_1} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{R v_2} \right) + M_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{R v_2} \right) \right) \right] F_n^* \right\}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}_{kn} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F_n^* \frac{\mu_n}{R} \psi(\mu_k, \mu_n) \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] \right\}.$$

Відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампа H .

Використавши умову рівноваги (5), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді

$$P = \frac{\pi \varepsilon R^2 C_{44} (1 + m_1) l_1 (v_2 + sv_1)}{v_2 v_1 h \theta_6}.$$

Визначивши невідомі сталі χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11), обчислимо компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі за формулами (7) та (9). Розв'язки представлені у вигляді рядів через нескінченну систему констант χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

4. Числові результати. Числовий аналіз представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) при наступних параметрах: $R = 2\text{м}$, $H = 20\text{м}$, $h = 10\text{м}$, $\varepsilon = 10^{-6}\text{м}$, $E = 3,92\text{МПа}$, $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9; 1,1; 1,2$. Алгоритм чисельного розв'язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

Розподіл нормальних напружень $Q'_{33}^{(3)}$ у зоні контакту (при $z_i = h/v_i$) та вздовж пружного циліндра представлені на рис. 2 та 3, відповідно. Графіки для переміщень $U_3^{(3)}$ в зоні контакту (при $z_i = h/v_i$) та вздовж поперечного перерізу пружного циліндра (при $z_i = 0$) зображені на рис. 4 та 5, відповідно. Маємо зауважити, що на рис. 2–5 усі величини представлені у безрозмірних координатах.

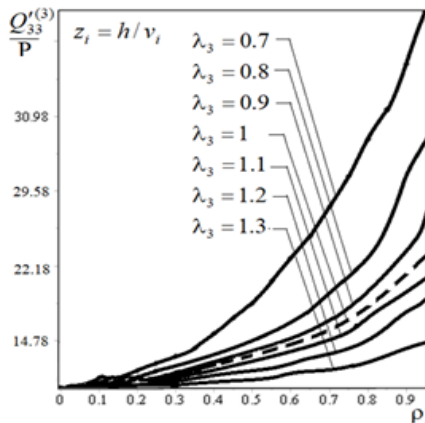


Рис. 2. Контактні напруження $Q'_{33}^{(3)}/P$, при $z_i h/v_i$.

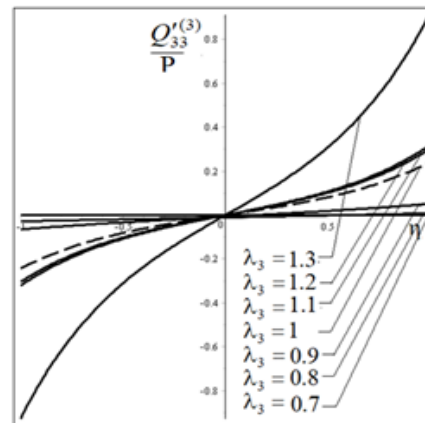


Рис. 3. Нормальні напруження $Q'_{33}^{(3)}/P$ вздовж циліндричного штампа.

Також, на рис. 2 та 3 пунктирна крива відповідає контакту без початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), а суцільна — з початковими напруженнями. Причому у

випадку відсутності початкових (залишкових) напружень ($\lambda_1 = 1$) графік розподілу контактних напружень відповідає відомим розв'язкам контактної задачі про тиск двох півпросторів на циліндр [1].

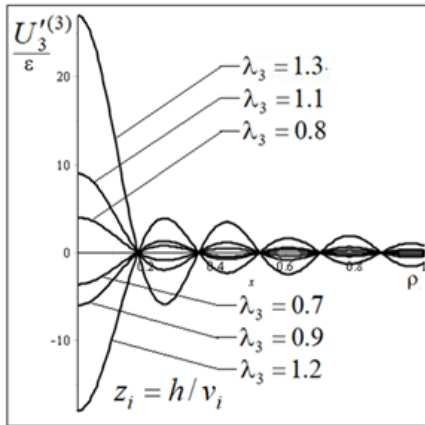


Рис. 4. Контактні переміщення $U_3^{(3)}/\varepsilon$ в зоні контакту.

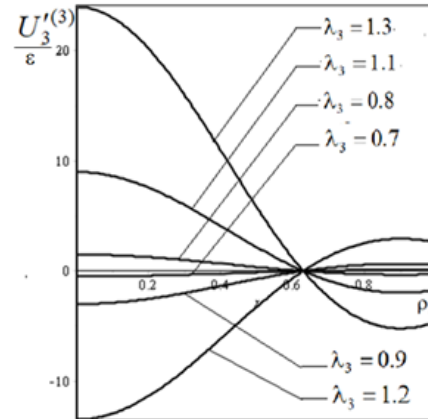


Рис. 5. Переміщення $U_3^{(3)}/\varepsilon$, при $z_i = 0$.

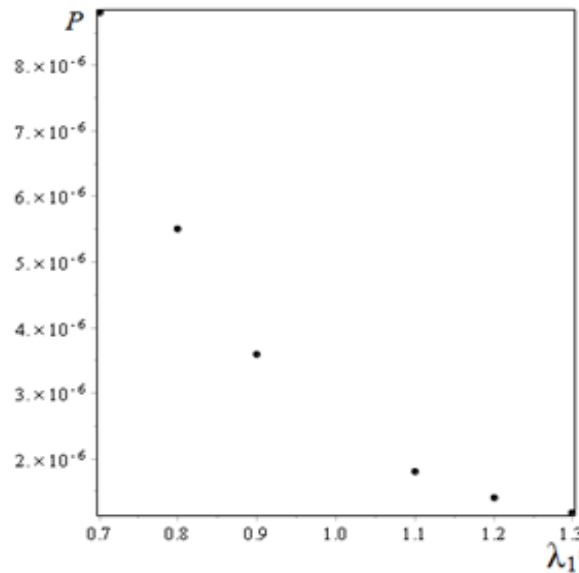


Рис. 6. Залежність рівнодійної P від коефіцієнта видовження λ_1 .

Дискретна залежність числового значення рівнодійної навантаження P від коефіцієнта видовження λ_1 представлена на рис. 6.

5. Висновок. На основі числового аналізу можна зробити висновок, що початкові напруження суттєво впливають на основні характеристики напружено-деформованого стану тіл, що контактують. Крім того, вплив початкових напружень на розподіл контактних характеристик пружних півпросторів та пружного циліндра полягає у тому, що:

- 1) у випадку стиску ($\lambda_1 < 1$) початкові напруження у циліндрі призводять в

зоні контакту до збільшення, а у випадку розтягу ($\lambda_1 > 1$) — до зменшення контактних напружень;

- 2) з рис. 3 можна побачити, що чим ближче до центрального поперечного перерізу циліндричного штампа, тим швидше нормальні напруження $Q'_{33}{}^{(3)}/P$ прямують до нуля;
- 3) з рис. 4 та 5 бачимо, що переміщення $U'_3{}^{(3)}/\varepsilon$ приймають значно більші значення ближче до осі циліндричного штампа, ніж до його бічної поверхні;
- 4) з рис. 6 можна зробити висновок, що значення рівнодійної навантаження P зменшуються із збільшенням коефіцієнта видовження λ_1 , тобто при розтягу ($\lambda_1 > 1$) сила P приймає більші значення ніж при стиску ($\lambda_1 < 1$).

З числових результатів можна відмітити значний вплив початкових напружень на контактну взаємодію двох пружних півпросторів та пружного циліндричного штампа. Тому їх врахування дозволить значно покращити точність інженерних обчислень при розрахунках на міцність конструкцій та деталей машин, а також дозволить суттєво зменшити матеріалоемність конструкцій.

Список використаної літератури

1. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.
2. Semenyuk N. P., Zhukova N. B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 1. Pp. 40–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
3. Guz A. N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No. 1. Pp. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
4. Kaminsky A. O., Kurchakov E. E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No. 2. Pp. 154–159. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
5. Babich S. Yu., Glukhov Y. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 1. Pp. 43–52.
6. Babych S. Yu., Yarets'ka N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 3. Pp. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Ярецька Н. О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампа до пружного шару з початковими напруженнями. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: monograph. International Science Group. Boston: Primedia e Launch*. 2020. С. 60–80. DOI: <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>
8. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54. No. 5. Pp. 539–543. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
9. Babich S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 6. Pp. 346–356.
10. Kurashige M. Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*. 1969. Vol. 49. No. 8. Pp. 671–678.
11. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Ky. Contact problems for prestressed deformed bodies. *Soviet Applied Mechanics*. 1984. Vol. 20. No. 3. P. 209–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00883134>
12. Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J. G. Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.* 1980. Vol. 18. No. 1. Pp. 169–179.
13. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями: Монография. *Кременчук «Press — Line»*. 2007. 795 с.

14. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький: вид. ПП Мельник. 2006. 710 с.
15. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Лазар В. Ф., Щекань Н. П. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 41, № 2. С. 91–102.

Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Mikoryak M. V. Numerical solution of the contact problem for a pre-stressed cylindrical stamp and two half-spaces with initial stresses.

The article is devoted to the solution of the contact problem for a prestressed cylindrical die and two elastic half-spaces with initial stresses in an analytical form without taking into account frictional forces. We will assume that the surfaces outside the contact boundary remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The problem is solved in the case of unequal roots of the defining equation.

The study is presented in a general form for the theory of large initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical die and the elastic bases (half-spaces) are homogeneous and equal. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (of the natural state). In addition, the influence of the cylindrical stamp causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical die and the elastic half-spaces are made of different isotropic, transversally isotropic or composite materials. In the case of orthotropic bodies, we will assume that the elastically equivalent directions coincide with the direction of the coordinate axes in the deformed state. As a result, the solutions of the given problem are presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite system of algebraic equations.

To study the problem, a large number of fundamental results are used, such as: Hankel transformation, pair integral equations, orthogonal polynomials and other methods of the theory of contact problems of the linear theory of elasticity. Numerical analysis is presented for the Treloar potential in the form of graphs. Sufficient influence of the initial (residual) stresses in two elastic half-spaces and an elastic cylindrical stamp on the distribution of contact stresses in the contact area was noted.

Keywords: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, cylindrical stamp, half-space.

References

1. Grilitskii, D. V., & Kizyma, Ya. M. (1981). *Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti*. L'vov: Vishcha shkola.
2. Semenyuk, N. P., & Zhukova, N. B. (2020). Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
3. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
4. Kaminsky, A. O., & Kurchakov, E. E. (2022). Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*, 58(2), 154–159. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
5. Babich, S. Yu., & Glukhov, Y. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(1), 43–52.
6. Babich, S. Yu., & Yaretska, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a

- Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(3), 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Yarets'ka, N. O. (2020). Matematichna model' peredachi navantazhennya vid poperedn'о napruzhenogo tsilindrichnogo shtampa do pruzhnogo sharu z pochatkovimi napruzhennyami. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: monograph. International Science Group. Boston: Primedia e Launch*, 60–80. <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>
 8. Yaretskaya, N. A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 54(5), 539–543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
 9. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*, 56(6), 346–356.
 10. Kurashige, M. (1969). Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*, 49(8), 671–678.
 11. Aleksandrov, V. M., & Arutyunyan, N. Ky. (1984). Contact problems for prestressed deformed bodies. *Soviet Applied Mechanics*, 20(3), 209–215. <https://doi.org/10.1007/BF00883134>.
 12. Dhaliwal, R. S., Singh B. M., & Rokne, J. G. (1980). Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.*, 18(1), 169–179.
 13. Guz', A. N., Babich S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007). *Statika i dinamika uprugikh osnovanii s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami: Monografiya*. Kremenchuk: «Press – Line».
 14. Guz', A. N., & Rudnitskii V. B. (2006). *Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodeistviya uprugikh tel s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami*. Khmel'nits'kii: vid. PP Mel'nik.
 15. Babich, S. Yu., Yarets'ka, N. O., Lazar, V. F., & Shchekan', N. P. (2022). Analitichni rozv'yazki statichnoi zadachi pro tisk poperedn'о napruzhenikh pivprostoriv ta pruzhnogo tsilindra z pochatkovimi napruzhennyami. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 41(2), 91–102.

Одержано 16.02.2023