УДК 517.22
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).54-63

О. О. Курченко[1], О. О. Синявська[2]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук, доцент
oleksandrkurchenko@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0417-5970

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2711-3940

ЧОТИРИ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Ця стаття містить певні узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші диференціального числення функцій однієї змінної на випадок диференційовних функцій кількох змінних. Наведені приклади застосування отриманих результатів для доведення нерівностей та обчислення кратних границь.

Ключові слова: теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші для диференційовних функцій, диференційовні функції кількох змінних, кратні границі.

1. Вступ. Теореми Ролля, Лагранжа, теорема Коші для диференційовних функцій, правила Лопіталя є класичними теоремами математичного аналізу функцій однієї змінної. Разом з теоремою Ферма, формулою Тейлора вони є перлинами диференціального числення функцій однієї змінної [1, гл. 4]. Два узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій були опубліковані у статті [2]. Одне з цих узагальнень було використано для викладу теми «Формула Тейлора» у підручнику [3].

Дослідження, пов'язані з теоремою Лагранжа, Коші для диференційовних функцій, формулою Тейлора проводилися багатьма математиками. Так, у статті [4] отримані узагальнення теореми про середнє для диференційовних функцій однієї змінної. У роботах [5, 6] досліджуються проміжні точки у теоремах Лагранжа і Коші. Стаття [7] містить теореми про середнє для випадку адаптованих похідних (conformable derivative). У роботі [8] отримані певні узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій однієї і кількох змінних.

У цій статті для функцій m змінних розглянуто прирости по m вимірному паралелепіпеду Π, які виражаються через m-кратний інтеграл по паралелепіпеду Π від мішаної похідної m-го порядку цієї функції. За допомогою теореми про середнє для кратних інтегралів отримано певні узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші для диференційовних функцій кількох змінних. Наведені приклади застосування отриманих результатів для доведення нерівностей, обчислення кратних границь.

2. Повні прирости на паралелепіпеді функцій кількох змінних. Нехай $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m,\ h = (h_1, h_2, \ldots, h_m),\ h_i > 0,\ 1 \le i \le m$;

$$\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \ldots \times [t_m, t_m + h_m]$$

— m-вимірний паралелепіпед у m-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$; $f : \Pi \to \mathbb{R}$ — дійсна функція m дійсних змінних.

Нехай, далі, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \Pi,\ d_i > 0,\ 1 \le i \le m$. Надамо змінній s_j приросту d_j, так, що $s_j + d_j \in [t_j, t_j + h_j],\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Означення 1. *Нехай $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Приростом функції f, що відповідає приросту d_j змінної s_j, у точці s називається величина*

$$\Delta_{d_j}^{(j)} f(s) = f(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j + d_j, s_{j+1}, \ldots, s_m) - f(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_m).$$

Означення 2. *Повним приростом (m-приростом) функції f на m-вимірному паралелепіпеді $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \ldots \times [t_m, t_m + h_m]$ називається величина*

$$\Delta_\Pi f = \Delta_{h_m}^{(m)} \Delta_{h_{m-1}}^{(m-1)} \ldots \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \ldots, t_m).$$

Приклад 1. *Для прямокутника $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2]\,(m = 2)$, $f : \Pi \to \mathbb{R}$ повний приріст функції двох змінних на Π обчислюється за формулою*

$$\Delta_\Pi f = \Delta_{h_2}^{(2)} \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2) = \Delta_{h_2}^{(2)} \left(f(t_1 + h_1, t_2) - f(t_1, t_2)\right) =$$
$$= f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - f(t_1 + h_1, t_2) - f(t_1, t_2 + h_2) + f(t_1, t_2).$$

Цей приріст має таку геометричну інтерпретацію. У прямокутній системі координат x_1Ox_2 розглянемо прямокутник $\Pi = ABCD$ з вершинами

$$A = (t_1, t_2), B = (t_1 + h_1, t_2), C = (t_1 + h_1, t_2 + h_2), D = (t_1, t_2 + h_2).$$

Тоді

$$\Delta_\Pi f = f(A) - f(B) + f(C) - f(D).$$

Наприклад,

$$\Delta_{[0,x]\times[0,y]} \sin = \sin(x + y) - \sin(x) - \sin(y) + \sin 0.$$

Лема 1. *Нехай $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \ldots \times [t_m, t_m + h_m], f : \Pi \to \mathbb{R}$. Тоді*

$$\Delta_\Pi f = (-1)^m \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_m=0}^{1} (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} f(t_1 + \alpha_1 h_1, \ldots, t_m + \alpha_m h_m).$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Покладемо

$$\Pi_k = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \ldots \times [t_k, t_k + h_k], 1 \le k \le m.$$

Для $k = 1$:

$$\Delta_{\Pi_1} f = \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \ldots, t_m) = f(t_1 + h_1, t_2, \ldots, t_m) - f(t_1, t_2, \ldots, t_m) =$$

$$= (-1) \sum_{\alpha_1=0}^{1} (-1)^{\alpha_1} f(t_1 + \alpha_1 h_1, t_2, \ldots, t_m).$$

Виконаємо індукційний крок. Припустимо, що для фіксованого k, $1 \leq k \leq$ $\leq m-1$ виконується рівність

$$\Delta_{\Pi_k} f = (-1)^k \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{1} (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} f(t_1+\alpha_1 h_1, \ldots, t_k+\alpha_k h_k, t_{k+1}, \ldots, t_m).$$

Тоді

$$\Delta_{\Pi_{k+1}} f = \Delta^{(k+1)}_{h_{k+1}} \Delta_{\Pi_k}(f) =$$

$$= (-1)^k \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{1} (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} \Delta^{(k+1)}_{h_{k+1}} f(t_1+\alpha_1 h_1, \ldots, t_k+\alpha_k h_k, t_{k+1}, \ldots, t_m) =$$

$$= (-1)^k \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{1} (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} (-1) \times$$

$$\times \sum_{\alpha_{k+1}=0}^{1} (-1)^{\alpha_{k+1}} f(t_1+\alpha_1 h_1, \ldots, t_k+\alpha_k h_k, t_{k+1}+\alpha_{k+1} h_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_m) =$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_{k+1}=0}^{1} (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{k+1}} \times$$

$$\times f(t_1+\alpha_1 h_1, \ldots, t_k+\alpha_k h_k, t_{k+1}+\alpha_{k+1} h_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_m).$$

Лема доведена.

Лема 2. *Нехай* $\Pi = [t_1, t_1+h_1] \times [t_2, t_2+h_2] \times \ldots \times [t_m, t_m+h_m]$, *функція* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *—* m*-разів неперервно диференційовна на* m*-вимірному паралелепіпеді* Π. *Тоді*

$$\Delta_\Pi f = \int_\Pi \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_1 dx_2 \ldots dx_m. \tag{1}$$

Доведення. Кратний інтеграл у правій частині рівності (1) запишемо у вигляді повторного:

$$\int_\Pi \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_1 dx_2 \ldots dx_m =$$

$$= \int_{t_m}^{t_m+h_m} dx_m \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+h_{m-1}} dx_{m-1} \ldots \int_{t_1}^{t_1+h_1} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_1.$$

Для обчислення повторного інтеграла послідовно застосовуємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int_{t_m}^{t_m+h_m} dx_m \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+h_{m-1}} dx_{m-1} \ldots \int_{t_1}^{t_1+h_1} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_1 =$$

$$= \int_{t_m}^{t_m+h_m} dx_m \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+h_{m-1}} dx_{m-1} \ldots \int_{t_2}^{t_2+h_2} \frac{\partial^{m-1} \Delta^{(1)}_{h_1} f(t_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_2 = \ldots =$$

$$= \Delta^{(m)}_{h_m} \Delta^{(m-1)}_{h_{m-1}} \ldots \Delta^{(1)}_{h_1} f(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \Delta_\Pi f.$$

Лема доведена.

Більш загальні прирости функції кількох змінних розглянуті у монографії [9, підр. 1.1].

3. Узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші на випадок функцій кількох змінних. Нехай $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ — паралелепіпед у m-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$, функція $f : \Pi \to \mathbb{R}$. Покладемо $t_i = a_i$, $h_i = b_i - a_i$, $1 \le i \le m$. Тоді паралелепіпед $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \times \ldots \times [t_m, t_m + h_m]$, а повний приріст функції f на Π має вигляд:

$$\Delta_\Pi f = \Delta_{h_m}^{(m)} \ldots \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \ldots, t_m).$$

Теорема 1. *Нехай функція $f : \Pi \to \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови:*
1) $f \in C^{(m)}(\Pi)$*;*
2) $\Delta_\Pi f = 0$*.*
Тоді існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, що

$$\frac{\partial^m f(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} = 0.$$

Доведення. Внаслідок леми 2 та умови 2),

$$\Delta_\Pi f = \int_\Pi \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_1 dx_2 \ldots dx_m = 0.$$

За теоремою про середнє значення для кратного інтеграла [10, с. 103], існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, що

$$0 = \int_\Pi \frac{\partial^m f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} dx_1 \ldots dx_m = \frac{\partial^m f(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} (b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m),$$

звідки

$$\frac{\partial^m f(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} = 0.$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, існування якої стверджується у теоремі 1, може бути не одна.*

Приклад 2. *Нехай*

$$f(x, y) = xy(1 - y), (x, y) \in \Pi = [0, 1]^2.$$

У вершинах квадрата Π ця функція набуває значення нуль і тому $\Delta_\Pi f = 0$. Теорема 1 стверджує існування такої точки $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Pi$, що

$$\frac{\partial^2 f(\xi_1, \xi_2)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Всі такі точки — це відрізок $y = \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 1$. Дійсно,

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x \partial y} = 1 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Теорема 2. *Нехай* $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ — *паралелепіпед у m-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$, функція $f : \Pi \to \mathbb{R}$ — m-разів неперервно диференційовна на m-вимірному паралелепіпеді Π. Тоді існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, що:*

$$\Delta_\Pi f = \frac{\partial^m f(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m}(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m). \tag{2}$$

Доведення. Внаслідок леми 2,

$$\Delta_\Pi f = \int_\Pi \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1, x_2, \ldots \partial x_m} dx_1 dx_2 \ldots dx_m. \tag{3}$$

За теоремою про середнє значення для кратного інтеграла [10, с. 103], існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, що:

$$\int_\Pi \frac{\partial^m f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1, \ldots \partial x_m} dx_1 \ldots dx_m = \frac{\partial^m f(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m}(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m). \tag{4}$$

З рівностей (3)–(4) випливає рівність (2).

Зауваження 2. *Теорема 1 — частинний випадок теореми 2.*

Приклад 3. *Довести нерівність*

$$0 \le \sin x + \sin y - \sin(x + y) \le xy \sin(x + y), \;\; x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \tag{5}$$

Розв'язання. Безпосередньо перевіряємо, що при $x = 0$ або $y = 0$ нерівність справджується. Нехай

$$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right], \;\; \Pi_{x,y} = [0, x] \times [0, y]; \;\; f(x, y) = -\sin(x + y), \;\; x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Тоді

$$\Delta_{\Pi_{x,y}} f = \sin x + \sin y - \sin(x + y), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \sin(x + y).$$

Внаслідок теореми 2, існує така точка $(\xi, \eta) \in \Pi_{x,y}$, що

$$\Delta_{\Pi_{x,y}} f = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x \partial y} xy = \sin(\xi + \eta) \cdot x \cdot y. \tag{7}$$

Зауважимо, що для

$$(\xi, \eta) \in \Pi_{x,y} \subset \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 : 0 \le \sin(\xi + \eta) \le \sin(x + y). \tag{8}$$

Із співвідношень (6)–(8) отримуємо нерівність (5).

Приклад 4. *Довести нерівність*

$$0 \le \tan(x + y) - \tan x - \tan y \le \frac{2xy \sin(x + y)}{\cos^3(x + y)}, \;\; x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right). \tag{9}$$

Розв'язання. Як і у попередньому прикладі, перевіряємо, що при $x = 0$ або $y = 0$ нерівність справджується. Нехай

$$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),\ \Pi_{x,y} = [0, x] \times [0, y];\ f(x, y) = \tan(x + y),\ x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді

$$\Delta_{\Pi_{x,y}} f = \tan(x + y) - \tan x - \tan y, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{2 \sin(x + y)}{\cos^3(x + y)}.$$

Внаслідок теореми 2, існує така точка $(\xi, \eta) \in \Pi_{x,y}$, що

$$\Delta_{\Pi_{x,y}} f = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x \partial y} xy = \frac{2 \sin(\xi + \eta)}{\cos^3(\xi + \eta)} \cdot x \cdot y. \tag{11}$$

Зауважимо, що для

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \in \Pi_{x,y} \subset \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 : 0 \le \sin(\xi + \eta) \le \sin(x + y),& \\ 0 < \cos^3(x + y) \le \cos^3(\xi + \eta).& \end{aligned} \tag{12}$$

Із співвідношень (10)–(12) отримуємо нерівність (9).

Теорема 3. *Нехай* $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ *— паралелепіпед у m-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$, функції $f, g : \Pi \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*
1) $f, g \in C^{(m)}(\Pi)$;
2) $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Pi :$

$$\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} \neq 0.$$

Тоді існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, *що*

$$\frac{\Delta_\Pi f}{\Delta_\Pi g} = \frac{\dfrac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}}{\dfrac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}}.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що $\Delta_\Pi g \neq 0$. Проведемо міркування від супротивного. Дійсно, якщо $\Delta_\Pi g = 0$, то, внаслідок теореми 1, існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, що

$$\frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = 0.$$

Це суперечить умові 2).

Покладемо $\lambda = \frac{\Delta_\Pi f}{\Delta_\Pi g}$ і розглянемо допоміжну функцію

$$\phi(x) = f(x) - \lambda g(x), x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Pi.$$

Ця функція m разів неперервно диференційовна на паралелепіпеді Π і $\Delta_\Pi \phi = 0$. Внаслідок теореми 1, існує така точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Pi$, що:

$$\frac{\partial^m \phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = \frac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} - \lambda \frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = 0,$$

звідки

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\dfrac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}.$$

Теорема доведена.

Теореми 1–3 узагальнюють теореми Ролля, Лагранжа, Коші для диференційовних функцій однієї дійсної змінної на випадок m раз неперервно диференційовних функцій m дійсних змінних.

4. Застосування для обчислення кратних границь. Нехай $a > 0$, m — вимірний паралелепіпед $\Pi = [0, a]^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (0, a]^m$, m — вимірний паралелепіпед $\Pi_x = [0, x_1] \times \dots \times [0, x_m]$; функції $f, g : \Pi \to \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Нехай функції $f, g : \Pi \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1) $f, g \in C^{(m)}(\Pi)$*;*

2) $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Pi :$

$$\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} \neq 0.$$

3) існує m-кратна границя

$$\lim_{x_1 \to 0+, \dots, x_m \to 0+} \frac{\dfrac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\dfrac{\partial^m g(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}} = p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Тоді існує m–кратна границя

$$\lim_{x_1 \to 0+, \dots, x_m \to 0+} \frac{\Delta_{\Pi_x} f}{\Delta_{\Pi_x} g} = p. \tag{13}$$

Доведення. Для довільного $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (0, a)^m$ функції f, g задовольняють умови теореми 3 на m-вимірному паралелепіпеді Π_x. Тому існує така точка $\xi = (\xi_1(x), \dots, \xi_m(x)) \in \Pi_x$, що

$$\frac{\Delta_{\Pi_x} f}{\Delta_{\Pi_x} g} = \frac{\dfrac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\dfrac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}. \tag{14}$$

Оскільки $\xi_i \in [0, x_i]$, то $\xi_i \to 0+$ при $x_i \to 0+,\ 1 \leq i \leq m$. У рівності (14) переходимо до границі при $x_i \to 0+,\ 1 \leq i \leq m$ і, внаслідок умови 3), отримуємо рівність (13). Теорема доведена.

Приклад 5. *Знайти подвійну границю*

$$\lim_{x \to 0+, y \to 0+} \frac{\cos(x + y) - \cos x - \cos y + 1}{\cosh x + \cosh y - \cosh(x + y) - 1}, \tag{15}$$

де $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

Розв'язання. Розглянемо функції

$$f(s,t)=\cos(s+t),\ g(s,t)=-\cosh(s+t),\ s,t\in[0,1]$$

і покладемо $\Pi_{xy}=[0,x]\times[0,y],\ x,y\in(0,1)$. Маємо:

$$\Delta_{\Pi_{xy}}f=\cos(x+y)-\cos x-\cos y+1;$$

$$\Delta_{\Pi_{xy}}g=-\cosh(x+y)+\cosh x+\cosh y-1;$$

$$\forall x,y\in[0,1]:\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-\cos(x+y);\ \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}=-\cosh(x+y)\neq 0;$$

і

$$\lim_{x\to 0+,y\to 0+}\frac{\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}}{\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}}=\lim_{x\to 0+,y\to 0+}\frac{-\cos(x+y)}{-\cosh(x+y)}=1.$$

Отже, внаслідок теореми 4, подвійна границя (15) дорівнює 1.

Приклад 6. *Знайти потрійну границю*

$$\lim_{x\to 0+,y\to 0+,z\to 0+}h(x,y,z),\quad \text{де} \tag{16}$$

$$h(x,y,z)=$$

$$=\frac{\sin(x+y+z)-\sin(x+y)-\sin(x+z)-\sin(y+z)+\sin x+\sin y+\sin z}{e^{x+y+z}-e^{x+y}-e^{x+z}-e^{y+z}+e^x+e^y+e^z-1}.$$

Розв'язання. Розглянемо функції

$$f(s,t,u)=\sin(s+t+u),\ g(s,t,u)=e^{s+t+u},\ s,t,u\in[0,1]$$

і покладемо $\Pi_{xyz}=[0,x]\times[0,y]\times[0,z],\ x,y,z\in(0,1)$. Маємо:

$$\Delta_{\Pi_{xyz}}f=\sin(x+y+z)-\sin(x+y)-\sin(x+z)-\sin(y+z)+$$

$$+\sin x+\sin y+\sin z;$$

$$\Delta_{\Pi_{xyz}}g=e^{x+y+z}-e^{x+y}-e^{x+z}-e^{y+z}+e^x+e^y+e^z-1,\ x,y,z\in(0,1);$$

$$\forall x,y,z\in[0,1]:\ \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}=e^{x+y+z}\neq 0;$$

і

$$\lim_{x\to 0+,y\to 0+,z\to 0+}\frac{\dfrac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}}{\dfrac{\partial^3 g(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}}=\lim_{x\to 0+,y\to 0+,z\to 0+}\frac{-\cos(x+y+z)}{e^{x+y+z}}=-1.$$

Внаслідок теореми 4,

$$\lim_{x\to 0+, y\to 0+, z\to 0+} \frac{\Delta_{\Pi_{xyz}} f}{\Delta_{\Pi_{xyz}} g} = -1.$$

Отже, границя (16) дорівнює -1.

5. Висновки. У статті отримані певні узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші для диференційовних функцій однієї змінної на випадок m раз неперервно диференційовної на m–вимірному паралелепіпеді функції m змінних. Отримані результати можуть бути застосовані для проведення досліджень у галузі математичного аналізу та його застосувань, зокрема, для доведення нерівностей з функціями кількох змінних та обчислення кратних границь. Методика проведеного дослідження може бути використана у навчальному процесі для студентів освітнього рівня бакалавр математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, а саме, у вибіркових курсах, курсових та дипломних роботах.

Список використаної літератури

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : Підручник у двох частинах. Частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.
2. Курченко О. О., Рабець К. В. Два узагальнення теореми Коші для диференційованих функцій у курсі математичного аналізу. *Науковий часопис національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі.* 2009. Вип. 5. С. 104–114.
3. Курченко О. О. Диференціальне числення функції однієї змінної : Підручник. Київ, 2014. 238 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/merged.pdf (дата звернення: 19.02.2023).
4. Abian A. Generalizing the Generalized Mean-Value Theorem. *The American Mathematical Monthly.* 1981. Vol. 88, No. 7. P. 528–530. DOI: https://doi.org/10.2307/2321759.
5. Bailey D. F., Fix G. J. A generalization of the mean mean value theorem. *Applied Mathematics Letters.* 1988. Vol. 1, Issue 4. P. 327–330. DOI: https://doi.org/10.1016/0893-9659(88)90143-7.
6. Matkowski J. Generalizations of Lagrange and Cauchy Mean-Value theorems. *Demonstratio Mathematica.* 2010. Vol. 43, No. 4. P. 765–774. DOI: https://doi.org/10.1515/dema-2010-0405.
7. Martínez F., Martínez I., Kaabar M. K. A. and Paredes S. Generalized Conformable Mean Value Theorems with Applications to Multivariable Calculus. *Journal of Mathematics.* 2021. P. 1–7. DOI: https://doi.org/10.1155/2021/5528537.
8. Cheng J. On Multivariate Fractional Taylor's and Cauchy' Mean Value Theorem. *Journal of Mathematical Study.* 2019. Vol. 52, No. 1. P. 38–52. DOI: https://doi.org/10.4208/jms.v52n1.19.04.
9. Козаченко Ю. В., Курченко О. О., Синявська О. О. Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування. Монографія. Ужгород : Шарк, 2018. 228 с.
10. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : Підручник. У 2 ч. Київ : Вища шк., 1993. 375 с.

Kurchenko O. O., Syniavska O. O. Four theorems for differentiable functions of several variables.

This article presents some generalizations of the Roll, Lagrange, and Cauchy theorems of the differential calculus of functions of one variable to the case of differential functions of several variables. Examples of using the obtained results for proving inequalities and calculating multivariable limits are given.

Keywords: Rolle's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem for differentiable functions, differentiable functions of several variables, multivariable limits.

References

1. Dorogovtsev, A. Ya. (1993). *Mathematichniy analiz: Pidruchnyk u dvokh chastynakh. Chastyna 1* [Mathematical analysis :Textbook in two parts. Part 1]. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].
2. Kurchenko, O. O., & Rabets, K. V. (2009). Dva uzahalnennia teoremy Koshi dlia dyferentsiiovanykh funktsii u kursi matematychnoho analizu [Two generalizations of Cauchy's theorem for differentiable functions in the course of mathematical analysis]. *Scientific journal of the National Pedagogical University named after M. P. Drahomanov. Series 3. Physics and mathematics in higher and secondary school,* 5, 104–114. [in Ukrainian].
3. Kurchenko, O. O. (2014). *Dyferentsialne chyslennia funktsii odniiei zminnoi: pidruchnyk* [Differential calculus of a function of one variable: a textbook]. Kyiv. Retrieved from https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/merged.pdf [in Ukrainian].
4. Abian, A. (1981). Generalizing the Generalized Mean-Value Theorem. *American Mathematical Monthly,* 88(7), 528–530. https://doi.org/10.2307/2321759
5. Bailey, D. F., & Fix, G. J. (1988). A generalization of the mean mean value theorem. *Applied Mathematics Letters,* 1(4), 327–330. https://doi.org/10.1016/0893-9659(88)90143-7
6. Matkowski, J. (2010). Generalizations of Lagrange and Cauchy Mean-Value theorems. *Demonstratio Mathematica,* 43(4), 765–774. https://doi.org/10.1515/dema-2010-0405
7. Martínez, F., Martínez, I. J. M., Kaabar, M. K. A., & Paredes, S. (2021). Generalized Conformable Mean Value Theorems with Applications to Multivariable Calculus. *Journal of Mathematics,* 1–7. https://doi.org/10.1155/2021/5528537
8. Cheng, J. (2019). On Multivariate Fractional Taylor's and Cauchy' Mean Value Theorem. *Journal of Mathematical Study,* 52(1), 38–52. https://doi.org/10.4208/jms.v52n1.19.04
9. Kozachenko, Yu. V., Kurchenko, O. O., & Syniavska, O. O. (2018). *Teoremy Levi-Bakstera dlia vypadkovykh poliv ta yikh zastosuvannia. Monohrafiia.* [Levy-Baxter theorems for random fields and their applications. Monograph]. Uzhhorod: Shark [in Ukrainian].
10. Liashko, I. I., Yemelianov, V. F., & Boiarchuk, O. K. (1993). *Matematychnyi analiz: Pidruchnyk* [Mathematical analysis: A Textbook]. Part 2. Kyiv: Vyshcha shk. [in Ukrainian].

Одержано 05.03.2023