

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).101-114](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).101-114)**С. Ю. Бабич¹, М. М. Діхтярук², В. Ф. Лазар³, М. М. Маляр⁴**¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,

провідний науковий співробітник,

доктор технічних наук, професор

babich_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>² Хмельницький національний університет,

доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,

кандидат фізико-математичних наук

mega-dihtyaruk@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0819-3842>³ Мукачівський державний університет,

доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,

кандидат технічних наук

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,

професор кафедри кібернетики і прикладної математики,

доктор технічних наук

mykola.malyar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРУЖНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТРИНГЕРА І ДВОХ СМУГ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

В рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається плоска контактна задача про передачу навантаження від нескінченного неоднорідного стрингера до двох однакових пружних смуг з початковими (залишковими) напруженнями, які защемлені однією гранню. Дослідження проведені в загальному вигляді для великих початкових деформацій і деяких варіантів теорії малих початкових деформацій, для довільної структури пружного потенціалу. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є одержано основні інтегро-диференціальні рівняння розв'язок яких представлено у вигляді квазірегулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив наявних початкових (залишкових) напружень у смугах на закон розподілу контактних напружень по лінії контакту з нескінченим неоднорідним стрингером.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральне перетворення Фур'є.

1. Вступ. Незважаючи на велику кількість літератури в якій розглядаються контактні задачі лінеаризованої теорії пружності [1, 2, 3, 4], дослідження з проблем пружної контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями в нашій країні і за кордоном з'явилися порівняно недавно. Лише останнім часом дослідження контактної взаємодії попередньо напружених тіл набуває особливого інтересу в зв'язку з впровадженням в практику нових штучних матеріалів, які можуть витримувати великі початкові деформації. Інколи доцільно штучно створювати початкові напруження (залишкові і технологічні) для компенсації і регулювання тих напружень, які виникають в елементах конструкцій під

час її експлуатації, а також для підвищення міцності. Це в основному пов'язано з тим, що при дослідженні задач про контактну взаємодію пружних тіл з початковими напруженнями лінійна теорія пружності не враховує впливу цих напружень. Для спрощення процесу досліджень їх можна врахувати в рамках лінеаризованої теорії пружності [5, 6, 1, 7]. Врахування початкових напружень в рамках лінеаризованої теорії пружності призводить до нових постановок задач взаємодії деформованих тіл, що істотно відрізняються від постановок класичних задач теорії пружності. І хоча при вирішенні цих завдань системи основних диференціальних рівнянь, вирази для визначення складових тензора напружень і структура граничних умов відрізняється від відповідних систем рівнянь і виразів тензора напружень теорії пружності, вони за своєю природою і структурою, споріднені звичайним контактним змішаним задачам [8, 9, 10, 11]. У цій роботі дана постановка і загальний метод вирішення поставленого завдання в разі пружних потенціалів довільної форми в загальному вигляді для теорій великих (скінченних) початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій.

При постановці зазначених завдань у всіх реферованих роботах приймаються чотири припущення, які є основними в теорії, що розглядає контактну взаємодію тіл з початковими напруженнями і пружних накладок (стрингерів):

- 1) контактна взаємодія пружної накладки без початкових напружень з попередньо напруженим пружним тілом здійснюється після виникнення в останньому початкового напруженого стану;
- 2) діючі на пружну накладку зовнішні навантаження викликають в попередньо напруженому тілі збурення напруженого деформівного стану за величиною значно менші відповідних величин початкового напруженого стану;
- 3) початковий напружений стан одного з взаємодіючих тіл має таку структуру, що в області їх взаємодії можна (приблизно, з достатнім ступенем точності) вважати початковий напружений стан однорідним;
- 4) розв'язок лінеаризованих задач теорії пружності про контактну взаємодію попередньо напружених тіл і пружних накладок – єдиний.

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 12, 13, 14] представлено розв'язки контактної задачі про контактну взаємодію нескінченного неоднорідного стрингера з попередньо напруженими смугами. Дослідження проведено у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих (скінчених) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Дотримуючись [6, 1, 15, 16] всі дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану y_i , що пов'язані з лагранжевими координатами x_i співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2$), де λ_i — коефіцієнти видовжень, що визначають переміщення початкового стану в напрямках осей координат. При виконанні умов 1–4 в області контакту $L_k \{a_k, b_k\}$ для пружних накладок і пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями, мають місце граничні умови при

$$y_2 = 0; \quad u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1); \quad \forall (y_1) \in L_k. \quad (1)$$

$$\frac{du}{dy_1} = \frac{du_1}{dy_1}; \quad \frac{dv}{dy_1} = \frac{du_2}{dy_1}; \quad \forall (y_1) \in L_k. \quad (2)$$

Граничні умови (1)–(2) разом з положеннями (1–4) та умовами рівноваги

$$p = \int_{a_k}^{y_1} \tau(t) dt, \tag{3}$$

замикають постановку лінеаризованих задач про контактну взаємодію пружних накладок (скінченних, нескінченних ($a_k = -\infty$; $b_k = +\infty$)), що підсилюють пружну смугу.

2. Постановка задачі і основні розв’язуючі рівняння. Нехай нескінченні пружні смуги товщиною H з початковими напруженнями защемлені гранями $y_2 = \pm H$, а іншими своїми гранями з’єднані між собою нескінченним неоднорідним пружним стрингером малої товщини h (рис. 1).

Підсилені таким чином нескінченні попередньо напружені смуги перебувають під дією прикладених до з’єднувального нескінченного неоднорідного стрингера розподілених горизонтальних сил інтенсивності $q_0(y_1)$ відповідно до (рис. 1). Необхідно встановити закони розподілу нормальних $p(y_1)$ і горизонтальних $q(y_1)$ напружень в області контакту.

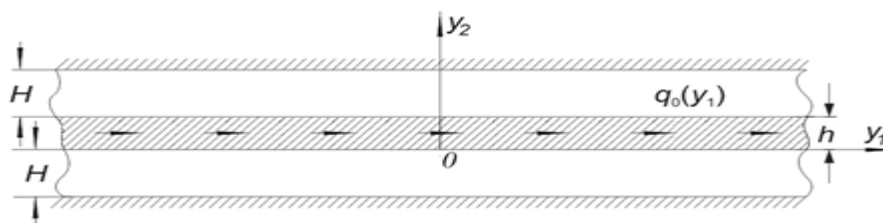


Рис. 1. Нескінченні попередньо напружені смуги під дією прикладених до з’єднувального нескінченного неоднорідного стрингера розподілених горизонтальних сил інтенсивності $q_0(y_1)$.

При дослідженні області контакту, що до стрингера робимо припущення, що він під дією прикладеного навантаження і тільки тангенціальних контактних напружень розтягується або стискається як стрижень, що знаходиться в одновісному напруженому стані [17, 18, 19, 20]. Також припускаємо, що вздовж горизонтальної осі вертикальні пружні переміщення сталі. Останнє припущення обумовлене малістю товщини стрингера, так як її зміни від точки до точки в процесі деформації незначні і ними можна знехтувати.

Позначимо інтенсивності нормальних і тангенціальних контактних напружень, які діють вздовж лінії з’єднання стрингера з пружними попередньо напруженими смугами $p(y_1)$ і $q(y_1)$, а вертикальні і горизонтальні переміщення відповідно $u_1(y_1)$ і $u_2(y_1)$.

Перейдемо до отримання основних систем розв’язуючих рівнянь для поставленої задачі. З цією метою спочатку розглянемо рівновагу стрингера.

Із умови рівноваги частини стрингера $(-\infty, x)$ отримаємо

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt, \quad (-\infty < y_1 < \infty) \tag{4}$$

Тут мається на увазі, що поперечний переріз стрингера прямокутний ширина якого дорівнює одиниці, а $\sigma_{y_1 y_1}$ — осьове напруження в напрямку осі Oy_1 . Відповідно до закону Гука знаходимо осьове напруження в напрямку осі Oy_1

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = E_1 \varepsilon_{y_1 y_1}(y_1), \quad (5)$$

де

$$\varepsilon_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{du(y_1)}{dy_1}. \quad (6)$$

Тут $u(y_1)$ — горизонтальні переміщення точок пружного стрингера, E_1 — модуль пружності стрингера.

Врахувавши (4)–(6), знаходимо

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt, \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (7)$$

З припущення, що стрингер в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, можемо написати

$$D \frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = p(y_1) - p_0(y_1), \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (8)$$

Тут $v(y_1)$ — вертикальні переміщення точок стрингера; D — жорсткість стрингера на згин; $p_0(y_1), p(y_1)$ — інтенсивність вертикальних сил.

На лінії контакту стрингера з пружними смугами мають місце умови

$$u(y_1) = u_1(y_1), \quad v(y_1) = u_2(y_1), \quad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty), \quad (9)$$

де $u_1(y_1), u_2(y_1)$ — переміщення точок в пружних смугах з початковими напруженнями. Потрібно визначити закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання стрингера з попередньо напруженими смугами.

Для визначення невідомих переміщень і напружень по лінії контакту стрингера з смугами запишемо граничні умови задачі для вільних від защемлення граней пружних смуг з початковими напруженнями від прикладеної під кутом α_0 сили P [6, 21, 22]

$$\tilde{Q}_{22}(y_1, 0) = -P\delta(y_1) \sin \alpha_0; \quad \tilde{Q}_{11}(y_1, 0) = -P\delta(y_1) \cos \alpha_0, \quad (10)$$

$$u_1(y_1 - t) = 0; \quad u_2(y_1 - t) = 0; \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (11)$$

де $\delta(y_1)$ — дельта-функція Дірака.

В результаті розв'язування поставленої задачі функції впливу від дії тангенціальної сили (при $\alpha_0 = 0$) для рівних коренів характеристичного рівняння [1] ($n_1 = n_2$) такі:

$$h_{21}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha, \quad (12)$$

$$h_{22}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha.$$

Для нерівних коренів ($n_1 \neq n_2$) можемо записати

$$\begin{aligned} h_{21}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha, \\ h_{22}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Ядра $H_{ij}(\alpha)$ і $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ відповідно мають вигляд [2, 23, 24], для $n_1 = n_2$:

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0 [-(s+1)(s_1 \xi(\alpha) - \alpha \varphi_1) + \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s] = \\ &= m_0 [-(s+1)(s_1 \operatorname{sh} \alpha \varphi_1 \operatorname{ch} \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1) + \\ &\quad + \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha), \\ H_{22}(\alpha) &= i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [s \cdot s_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 + (\alpha \varphi_1)^2 - \\ &\quad - \alpha \varphi_1 \xi(\alpha) - s_1^2 \operatorname{sh}^2(\alpha \varphi_1) - s \cdot s_1] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha), \end{aligned} \tag{14}$$

для $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{21}(\alpha) &= m_0 [-ss_1(\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) - s \xi_3(\alpha) + s(\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) + \xi_3(\alpha)] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha), \\ \tilde{H}_{22}(\alpha) &= i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [1 - s_1 \operatorname{ch}(2\alpha \varphi_2) + ss_1 \xi_1(\alpha) \\ &\quad + s\alpha \varphi_1 \xi_4(\alpha) + ss_1(\alpha \varphi_1)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \\ &\quad - ss_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_2 - s_1^2(\alpha \varphi_1) \xi_4(\alpha) + \xi_3(\alpha)] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha), \end{aligned} \tag{15}$$

тут n_1 і n_2 корені визначального рівняння [1, 25]. Величини, що фігурують в формулах (12), (13), (14), (15) виражені через відомі параметри початкового напруженого стану [1, 2, 26].

3. Розв’язуюча система рекурентних систем рівнянь. Використовуючи принцип суперпозиції, переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями в напрямку осей Oy_1 і Oy_2 від одночасної дії нормальних і тангенціальних напружень для стисливих і нестисливих тіл в випадку потенціалів довільної структури визначаються формулами [1]

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau, \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Дотримуючись [1, 12], згідно прийнятих припущень і позначень, задачу можна сформулювати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{du_2(y_1)}{dy_1} &= 0, \quad (-\infty < y_1 < \infty), \\ E_1(y_1) \frac{du_1(y_1)}{dy_1} &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - q_0(t)] dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Зробивши припущення, що неоднорідність матеріалу стрингера змінюється за законом

$$E_1(y_1) = [(1 + \delta f(y_1))], \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (18)$$

де $f(y_1)$ — деяка відома функція, δ — малий параметр.

Використавши граничні умови контакту (9) і представивши невідомі контактні напруження $p_0(y_1)$, $q_0(y_1)$ в вигляді ряду за степенями малого параметра

$$q_0(y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k q^{(k)}(y_1), \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (19)$$

можемо записати розв'язуючу систему рекурентних систем інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{du_2^{(0)}(y_1)}{d(y_1)} = 0, \quad (-\infty < y_1 < \infty) \quad (20)$$

$$E_0 h \frac{d^2 u_1^{(0)}(y_1)}{d(y_1)^2} = 2q^{(0)}(y_1) - q_0(y_1),$$

$$\frac{du_2^{(k)}(y_1)}{d(y_1)} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (-\infty < y_1 < \infty) \quad (21)$$

$$E_0 h \frac{d^2 u_1^{(k)}(y_1)}{d(y_1)^2} = 2q^{(k)}(y_1) - q_0^{(k-1)}(y_1),$$

де

$$q_0^{(k-1)}(y_1) = h_0 \frac{d}{d(y_1)} \left[f(y_1) \frac{du_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right], \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau) p^{(k)}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q^{(k)}(\tau) d\tau,$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p^{(k)}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - \tau) q^{(k)}(\tau) d\tau,$$

$$(k = 0, 1, \dots), \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

$$f_1^{(k-1)}(y_1) = D_0 \frac{d^2}{d(y_1)^2} \left[f(y_1) \frac{d^2 u_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)^2} \right], \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (22)$$

$$f_2^{(k-1)}(y_1) = E_0 h \frac{d}{d(y_1)} \left[f(y_1) \frac{du_1^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right], \quad D_0 = E_0 I.$$

Тут D_0 — нульовий член розкладання в ряд. $D(y_1) = IE_1(y_1)$ — жорсткість стрингера на згин, I — параметр неоднорідності.

Система (20) описує контактну задачу для однорідного нескінченного стрингера [23, 27, 28], кожна наступна система з (21) відрізняється від попередньої тільки зовнішнім навантаженням. Отже, розв’язок контактної задачі для попередньо напруженої смуги, підсиленої неоднорідним нескінченим стрингером, зводиться до розв’язування ряду однорідних контактних задач, які відрізняються між собою тільки зовнішніми навантаженнями. Нульовий наближений розв’язок, тобто розв’язок системи (20) за допомогою перетворення Фур’є побудований в [3] і має вигляд

$$p(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha^2 H_{21}^*(\alpha) \tilde{q}_0(\alpha) + H_{22}^*(\alpha) \tilde{p}_0(\alpha)] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha; \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (23)$$

$$q(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H_{11}^*(\alpha) \tilde{q}_0(\alpha) - iH_{12}^*(\alpha) \tilde{p}_0(\alpha)] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha.$$

Тут величини $H^{-1}(\alpha)$, $H_{ij}^*(\alpha)$ ($i, j = 1, 2$), виражаються через відомі функції $H_{ij}(\alpha)$ та $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ ($i, j = 1, 2$), які визначаються згідно формул для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1, 2, 5, 25] в випадку контрєктної структури пружних потенціалів. Решта наближень розв’язків в випадках впливу неоднорідності матеріалу стрингера будуються аналогічним чином. $\tilde{p}_0(\alpha)$ та $\tilde{q}_0(\alpha)$ — Фур’є, а μ — коефіцієнт Ляме.

Таким чином, k -ве наближення має вигляд

$$p^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^{(k)}(s) e^{-isy_1} ds, \quad q^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{(k)}(s) e^{-isy_1} ds, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де

$$P^{(k)}(s) = Ds^2 \left\{ \tilde{f}_1^{(k-1)}(s) [E_0hs^2 H_{22}(s) + 1] - E_0hs^3 \tilde{f}_2^{(k-1)}(s) H_{12}(s) \right\} / L(s),$$

$$Q^{(k)}(s) = -IE_0hs \left\{ \tilde{f}_2^{(k-1)}(s) [D_0hs^4 H_{11}(s) + 1] + \right. \quad (24)$$

$$\left. + D_0hs^3 \tilde{f}_1^{(k-1)}(s) H_{12}(s) \right\} / L(s), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

є трансформантами Фур’є контактних напружень.

В (24):

$$L(s) = [D_0s^4 H_{11}(s) - 1] [E_0hs^2 H_{22}(s) + 1] + D_0E_0s^4 h H_{12}^2(s),$$

$$(j = 1, 2), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

тут F — оператор перетворення Фур’є для вказаної функції (функціонал).

Застосувавши до (20) і (21) інтегральне перетворення Фур'є, відносно трансформант контактних напружень, отримаємо наступні системи:

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1)p^{(0)}(y_1) - Ih_{12}(y_1)Q^{(0)}(y_1) &= 0, \\ E_0hy_1^2h_{21}(y_1)p^{(0)}(y_1) - [E_0hy_1^2h_{22}(y_1) + 2]Q^{(0)}(y_1) &= Q_0(y_1), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1)p^{(k)}(y_1) - Ih_{12}(y_1)Q^{(k)}(y_1) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots), \\ E_0hy_1^2h_{21}(y_1)p^{(k)}(y_1) - [E_0hy_1^2h_{22}(y_1) + 2]Q^{(k)}(y_1) &= Q_0^{(k-1)}(y_1), \end{aligned} \quad (26)$$

де

$$p^{(k)}(y_1) = F[p^{(k)}(y_1)], \quad Q^{(k)}(y_1) = F[q^{(k)}(y_1)], \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$Q_0(y_1) = F[q_0(y_1)], \quad Q_0^{(k-1)}(y_1) = F[q_0^{(k-1)}(y_1)],$$

I — параметр неоднорідності, а $h_{ij}(y_1)$ — функції впливу, вирази яких задаються формулами: для рівних коренів $n_1 = n_2$:

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha, \\ h_{12}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha, \\ h_{12}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут $h_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, 2$ функції впливу, які характеризують переміщення граничних точок грані $y_2 = 0$ нескінченної пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями від одиничної горизонтальної сили, ядра $H_{ij}(\alpha)$ і $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ відповідно мають вигляд (14), (15).

Після знаходження трансформант контактних напружень з систем (25), (26) і застосувавши обернене перетворення Фур'є отримаємо вирази нульового і k -го наближення нормальних і тангенціальних напружень

$$\begin{aligned} p^{(0)}(y_1) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{12}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0(\alpha) \operatorname{sign} \alpha e^{-i\alpha y_1} d\alpha, \quad (-\infty < y_1 < \infty); \\ q^{(0)}(y_1) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 p^{(k)}(y_1) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{12}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0^{(k-1)}(\alpha) \operatorname{sign} \alpha e^{-i\alpha y_1} d\alpha, \quad (-\infty < y_1 < \infty); \\
 q^{(k)}(y_1) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0^{(k-1)}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Тут величини $H(\alpha)$, $H_{ij}^*(\alpha)$ ($i, j = 1, 2$) виражаються через відомі функції $H_{ij}(\alpha)$ та $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ ($i, j = 1, 2$), які визначаються згідно формул для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1, 2, 29, 30] в випадку контрєктної структури пружних потенціалів.

Вирази контактних напружень (29) описують розв'язок контактної задачі для однорідного стрингера, але вони одночасно є також нульовим наближенням розв'язку задачі для неоднорідного стрингера. Решта наближень розв'язків, що виражаються формулами (30) демонструють вплив неоднорідності стрингера. Слід відмітити, що цим способом можна розв'язувати контактні задачі для пружного тіла, підсиленого нескінченим стрингером з слабкою неоднорідністю, яка змінюється за законом

$$E_1(y_1) = [(1 + \delta f(y_1))], \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

де $f(y_1)$ — деяка відома функція, δ — малий параметр.

4. Розв'язок систем розв'язуючих рівнянь. Застосувавши до обох частин системи (23), інтегральне перетворення Фур'є за змінною y_1 і використавши теорему про згортку, знайдемо вирази для контактних напружень в пружних смугах з початковими напруженнями.

Нульове наближення для випадків рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння набере вигляду (23), якщо в цих формулах провести заміну:

- ✓ для рівних коренів ($n_1 = n_2$): $H_{ij}^*(\alpha)$ на $H_{ij}(\alpha)$,
- ✓ для нерівних коренів ($n_1 \neq n_2$): $H_{ij}^*(\alpha)$ на $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$,
- ✓ де ядра $H_{ij}(\alpha)$ та $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ відповідно мають вигляд (14) і (15).

Розглянемо числові приклади для нестисливих тіл неогуківського матеріалу (потенціал Трелоара) (рис. 2–3).

Тут $p(\xi)$, $q(\xi)$ — безрозмірні контактні нормальні і тангенціальні напруження в пружних смугах з початковими напруженнями. Значення $\lambda_1 = 1$ відповідає класичній теорії пружності і збігається з результатами роботи [18, 31], $\lambda_1 = 0; 0,8; 0,4$ — відповідає початковим напруженням стиснення, а $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$ — початкові напруження розтягування, ξ є безрозмірною координатою початкового напруженого стану в пружній смузі з початковими напруженнями.

Аналіз графіків показує, що у випадку стиснення ($\lambda_1 < 1$) наявність початкових напружень у пружній смузі призводить до значного зменшення контактних напружень, у випадку розтягування ($\lambda_1 > 1$) — до їх збільшення.

5. Висновок. В роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу зосередженого горизонтального навантаження від злегка неоднорідного нескінченного пружного стрингера

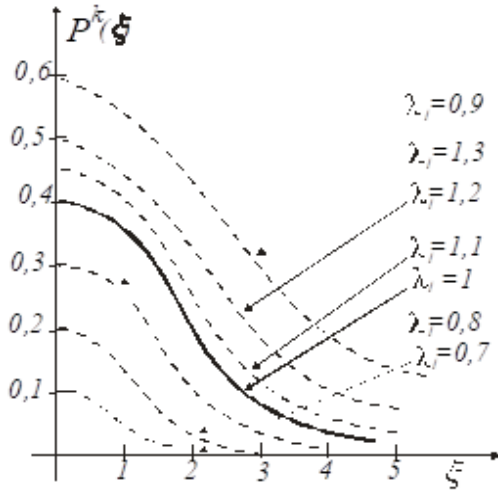


Рис. 2. Графік розподілу контактних напружень для потенціалу Трелоара (нестислива зона).

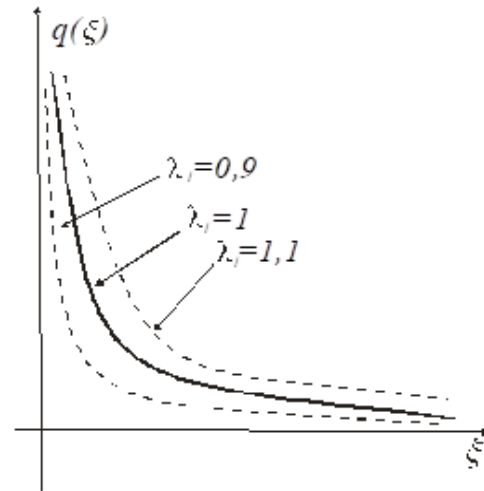


Рис. 3. Графік розподілу контактних напружень для потенціалу Трелоара (стислива зона).

до двох попередньо напружених смуг з защемленими вільними від навантаження гранями. Дослідження були проведені в цілому для теорії великих початкових деформацій та декількох варіантів теорії малих початкових деформацій у випадку довільної структури пружного потенціалу. Розв'язок задачі зведено відносно нормальних і тангенціальних контактних напружень до розв'язуючої системи рекурентних систем інтегро-дифференціальних рівнянь розв'язок яких побудовано за степенями малого параметра. Нульовий наближений розв'язок неоднорідної задачі будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлено у вигляді інтегралів Фур'є. Дослідження, представлені в статті дають можливість зробити низку узагальнених висновків, що стосуються впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль при нескінченній накладці, що взаємодіє з попередньо напруженими смугами.

1. У загальному випадку для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1, 30] для розглядуваного в рамках лінеаризованої теорії пружності класу контактних задач сформульовано загальний метод розв'язування, який дає можливість отримати розв'язок поставлених задач, якщо відомий розв'язок аналогічних лінійних (без початкових напружень) задач.
2. У випадку рівних коренів визначального рівняння [1,30] для тіл з пружними потенціалами довільної форми напруження і переміщення на кінцях пружних накладок мають особливість, яка повністю збігається з особливістю в аналогічних задачах класичної лінійної теорії пружності. З нерівними коренями для тіл з пружними потенціалами довільної форми не вдається довести співпадання порядків вказаних особливостей.
3. Контактні напруження на лінії контакту з пружною накладкою значно залежать від початкових напружень. Більш істотний вплив кількісного характеру початкові напруження проявляють в високоеластичних матеріалах. Якісний вплив має ідентичний характер.

РЕЗЮМЕ.

В рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального зосередженого навантаження від неоднорідного нескінченного в обох напрямках стрингера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Розв'язок задачі зводиться відносно нормальних і тангенціальних контактних напружень, до системи рекурентних систем інтегро-дифференційних рівнянь, яка розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлені у вигляді інтегралів Фур'є.

Початкові напруження в пружних смугах призводять до істотної зміни закону розподілу контактних напружень; при цьому в разі стискування контактні напруження значно зменшуються (в разі розтягування — збільшуються), а переміщення в разі стискування значно зростають (при розтягуванні — зменшуються). Істотніший вплив (кількісного характеру) початкові (залишкові) напруження мають у високоеластичних матеріалах в порівнянні з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має аналогічний характер.

Список використаної літератури

1. Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. Київ: Вища шк., 1995. 305 с.
2. Діхтярук М. М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Пр. 4-го Міжнародного симпозиуму з трибофатикої (ISTF)*, 2002. С. 426–431.
3. Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Доповіді національної академії наук*, 2004. № 3. С. 46–49.
4. Yuan W. K., Long J. M., Ding Y. and Wang G. F., Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension. *Journal of Applied Mechanics*, 2017. Vol. 84, No. 1. P. 1–12.
5. Бабич С. Ю., Діхтярук Н. Н., Дегтярь С. В. Контактная задача для двух одинаковых полос с начальными напряжениями, усиленных периодически расположенными креплениями. *Прикл. механика*, 2019. Т. 55, № 6. С. 56–63.
6. Бабич С. Ю., Діхтярук Н. Н. Передача нагрузки от бесконечного неоднородного стрингера к заземленной одной гранью упругой полосе с начальными напряжениями. *Прикл. механика*, 2020. Т. 56, № 6. С. 1–10.
7. Рудницький В. Б., Діхтярук Н. Н. Контактная задача о взаимодействии бесконечного стрингера и двух одинаковых полос с начальными напряжениями. *Прикл. механика*, 2017. Т. 53, № 2. С. 41–48.
8. Akopyan V. N., Mirzoyan S. A., Mkhitaryan S. M. The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack. *Int. Appl. Mech*, 2015. Vol. 51, No. 2. P. 176–186.
9. Aleksandrov V. M. Optimal control of linear systems with interval constraints. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2015. Vol. 55, No. 5. P. 758–775.
10. Babich, S. Y., Yarets'ka N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 2021. Vol. 57, No. 6 P. 297–305.
11. Moses O. P., Adewale A. O., Olusegun O. A. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*, 2016. Vol. 4, No. 1. P. 51–58.
12. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия: Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 795 с.

13. Guz A. N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review). *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 3. P. 231–252.
14. Guz A. N. Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community. *Int. Appl. Mech.*, 2015. Vol. 51, No. 1. P. 1–11.
15. Babich S. Y., Dikhtyaruk N. N. Load Transfer from an Infinite Inhomogeneous Stringer to a Prestressed Elastic Strip Clamped at One Edge. *International Applied Mechanics*, 2020. Vol. 56, No. 6. P. 708–716.
16. Yaretskaya N. A. The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer. *Bulletin of NAS of Ukraine*, 2014. No. 1. P. 57–62.
17. Рудницький В. Б., Дихтярук Н. Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикл. механика*, 2002. Т. 38, № 11. С. 81–88.
18. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
19. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Int. Appl. Mech.*, 2004. Vol. 40, No. 3. P. 290–296.
20. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Prikladnaya Mekhanika*, 2004. Vol. 40, No. 3. P. 63–70.
21. Guz A. N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review). *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 1. P. 1–57.
22. Dikhtyaruk N. N. Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, 2016. Vol. 83, No. 3. P. 51–61.
23. Дихтярук Н. Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. *Прикл. механика*, 2004. Т. 40, № 3. С. 63–70.
24. Dikhtyaruk N. N., Kurinenko O. V., Poplavskaya E. A., Samaruk N. N. Interaction Between a Finite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *Int. Appl. Mech.*, 2019. Vol. 55, No. 1. P. 79–85.
25. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 4. P. 378–388.
26. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, 2017. Vol. 53, No. 2. P. 149–155.
27. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*, 2004. Vol. 40, No. 7. P. 744–765.
28. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Initially stressed elastic strip strengthened by elastic stringers. *Prikladnaya Mekhanika*, 2002. Vol. 38, No. 11, P. 81–87.
29. Babich S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., Degtyar, S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 2019. Vol. 55, No. 6. P. 629–635.
30. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *Int. Appl. Mech.*, 2002. Vol. 38, No. 11. P. 1354–1360.
31. Bosakov S. V. Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates. *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 6. P. 651–663.

Babich S. Yu., Dikhtyaruk M. M., Lazar V. F., Malyar M. M. Contact problem for an infinite elastic inhomogeneous stringer and two strips with initial stresses.

In the framework of the linearized theory of elasticity, a flat contact problem is considered to transfer the load from an infinite heterogeneous stringer to two identical elastic bands with initial (residual) stresses that are clogged with one grade. Studies are generally conducted for large initial deformations and some variants of the theory of small initial deformations, for an arbitrary structure of elastic potential. With the Fourier integral transformation, the main integro-differential solutions of the solution of which are

presented in the form of quasi-regulating infinite systems of algebraic equations. The influence of existing initial (residual) stresses in strips to the law of distribution of contact stresses along the contact line with an infinite heterogeneous stringer is investigated.

Keywords: Contact problems, the linearized elasticity theory resiliency, resilient protective strap, initial (residual) tension, initial deformations.

References

1. Guz', O. M., Babich, S. Yu., & Rudnits'kii, V. B. (1995). *Kontaktna vzaemodiya pruzhnykh til z pochatkovimi napruzheniyami*. Kyiv: Vishcha shk.
2. Dikhtyaruk, M. M. (2002). Vznachennya funktsii vplivu dlya pruzhnoi smugi z pochatkovimi (zalishkovimi) napruzheniyami. *Pr. 4-go Mizhnarodnogo simpoziumu z tribofatiki (ISTF)*, 426–431.
3. Dikhtyaruk, M. M. (2004). Periodichna kontaktna zadacha dlya pruzhnoi smugi z pochatkovimi (zalishkovimi) napruzheniyami. *Dopovidi natsional'noi akademii nauk*, 46–49.
4. Yuan, W. K., Long, J. M., Ding, Y., & Wang, G. F. (2017). Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension. *Journal of Applied Mechanics*, 84(1), 1–12.
5. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar', S. V. (2019). Kontaktnaya zadacha dlya dvukh odinakovykh polos s nachal'nymi napryazheniyami, usilennykh periodicheski raspolozhennymi krepleniyami. *Prikl. mekhanika*, 55(6), 56–63.
6. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Peredacha nagruzki ot beskonechnogo neodnorodnogo stringera k zashchemlennoi odnoi gran'yu uprugoi polose s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikl. mekhanika*, 56(6), 1–10.
7. Rudnitskii, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Kontaktnaya zadacha o vzaimodeistvii beskonechnogo stringera i dvukh odinakovykh polos s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikl. mekhanika*, 53(2), 41–48.
8. Akopyan, V. N., Mirzoyan, S. A., & Mkhitarian, S. M. (2015). The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack. *Int. Appl. Mech.*, 51(2), 176–186.
9. Aleksandrov, V. M. (2015). Optimal control of linear systems with interval constraints. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 55(5), 758–775.
10. Babich, S. Y., & Yarets'ka, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(6), 297–305.
11. Moses, O. P., Adewale, A. O., & Olusegun, O. A. (2016). Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*, 4(1), 51–58.
12. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Smeshannyye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami*. Germaniya, Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing.
13. Guz, A. N. (2015). Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review). *Int. Appl. Mech.*, 50(3), 231–252.
14. Guz, A. N. (2015). Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community. *Int. Appl. Mech.*, 51(1), 1–11.
15. Babich, S. Y., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load Transfer from an Infinite Inhomogeneous Stringer to a Prestressed Elastic Strip Clamped at One Edge. *International Applied Mechanics*, 56(6), 708–716.
16. Yaretskaya, N. A. (2014). The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer. *Bulletin of NAS of Ukraine*, 1, 57–62.
17. Rudnitskii, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). Uprugaya polosa s nachal'nymi napryazheniyami, usilennaya uprugimi nakladkami. *Prikl. mekhanika*, 38(11), 81–88.
18. Sarkisyan, V. S. (1983). *Kontaktnye zadachi dlya poluploskosti i polos s uprugimi nakladkami*. Erevan: Izd. Erevan. un-ta.
19. Dikhtyaruk, N. N. (2004). Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Int. Appl. Mech.*, 40(3), 290–296.

20. Dikhtyaruk, N. N. (2004). Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Prikladnaya Mekhanika*, 40(3), 63–70.
21. Guz, A. N. (2014). Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review). *Int. Appl. Mech.*, 50(1), 1–57.
22. Dikhtyaruk, N. N. (2016). Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, 83(3), 51–61.
23. Dikhtyaruk, N. N. (2004). O ravnovesii polosy s nachal'nymi napryazheniyami, usilennoi uprugimi nakladkami. *Prikl. mekhanika*, 40(3), 63–70.
24. Dikhtyaruk, N. N., Kurinenko, O. V., Poplavskaya, E. A., & Samaruk, N. N. (2019). Interaction Between a Finite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *Int. Appl. Mech.*, 55(1), 79–85.
25. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.*, 50(4), 378–388.
26. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, 53(2), 149–155.
27. Babich, S. Yu., Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2004). Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*, 40(7), 744–765.
28. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). Initially stressed elastic strip strengthened by elastic stringers. *Prikladnaya Mekhanika*, 38(11), 81–87.
29. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar, S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 55(6), 629–635.
30. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *Int. Appl. Mech.*, 38(11), 1354–1360.
31. Bosakov, S. V. (2014). Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates. *Int. Appl. Mech.*, 50(6), 651–663.

Одержано 15.03.2023