УДК 517.95
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).174-180

В. В. Кириченко[1], Є. В. Лесіна[2]

[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України,
доцент кафедри комп'ютерних наук,
кандидат фізико-математичних наук
v.kyrychenko@nubip.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2387-2261

[2] Донецький національний технічний університет,
доцент кафедри вищої математики і фізики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
eugenia.lesina@donntu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9803-6727

ФОРМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КУЛІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО УЛЬТРАГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПОЛІНОМІАЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

В роботі знайдено формальний розв'язок задачі Діріхле у кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною. Процедура побудови розв'язку базується на апараті сферичних функцій та теорії гіпергеометричного рівняння Гаусса. При цьому шукана функція та відома права частина досліджуваного рівняння розкладаються в ряд Фур'є за сферичними гармоніками, які є власними функціями оператора Лапласа-Бельтрамі. Зазначене розкладання дозволяє привести вихідне ультрагіперболічне рівняння до звичайного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Відповідне однорідне рівняння за допомогою підстановки перетворюється на гіпергеометричне рівняння Гаусса, дослідження якого полягає у детальному аналізі так званого виродженого випадку, коли розв'язок може бути виражений через будь-які два з 24 рядів Куммера. Складнощі доведення гладкості розв'язку задачі Діріхле для ультрагіперболічного рівняння пов'язані з тим, що кожен наступний член формального ряду виражається через попередній за допомогою громіздких рекурентних співвідношень.

Ключові слова: ультрагіперболічне рівняння, задача Діріхле, сферичні функції, гіпергеометричне рівняння Гаусса, коефіцієнти Фур'є, метод двоїстості рівняння-область.

1. Вступ. У роботі [1] одного з авторів отримано повну класифікацію випадків існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле в одиничній n-вимірній кулі для однорідного ультрагіперболічного рівняння з використанням апарату сферичних функцій та за допомогою методу двоїстості рівняння-область [2]. Дослідження охоплює як випадок зональних, так і випадок тесеральних сферичних функцій. Вузлові лінії зональних гармонік утворені паралелями, що ділять кульову поверхню на зони, у межах кожної з яких значення сферичної функції зберігає знак, а при переході через вузлову лінію змінює його на протилежний; а вузлові лінії тесеральних гармонік утворені перетином паралелей та меридіанів, які ділять кульову поверхню на клітини (всередині кожної клітини значення сферичної функції зберігає знак, а при переході через її межу змінює його на протилежний). Було доведено критерій однозначної розв'язності задачі Діріхле для ультрагіперболічного рівняння у кулі, який формулюється в термінах нулів ортогональних поліномів Якобі.

В даній роботі за допомогою теорії гіпергеометричного рівняння та сферичних функцій побудовано формальний розв'язок першої крайової задачі в кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною.

2. Основний результат. Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

у n-вимірній кулі $\Omega = \{x \in R^n : 1 - x^2 > 0\}$ для наступного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{k+1}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = f, \tag{2}$$

вважаючи, що функція f у правій частині (2) є поліномом. Тут $0 < k < n$, $a \in \mathbb{C}$.

Розкладатимемо шукану функцію u і відому функцію f в ряд за сферичними гармоніками, спираючись на міркування, які наведено у роботі [1]. При цьому відповідні розкладання матимуть такий вигляд:

$$u\,(x', x'') = \sum_{\tilde{l}=1}^{L_i} \sum_{l=1}^{L_j} u_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'')\, S_{\tilde{l}}^{i}\,(\tau')\, S_{l}^{j}\,(\tau''),$$

$$f\,(x', x'') = \sum_{\tilde{l}=1}^{L_i} \sum_{l=1}^{L_j} f_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'')\, S_{\tilde{l}}^{i}\,(\tau')\, S_{l}^{j}\,(\tau'').$$

Зауважимо, що $\tau' = \frac{x'}{|x'|}$, $\tau'' = \frac{x''}{|x''|}$, $x' = (x_1, \ldots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Крім того, сферичні функції порядків i та j розкладені за базисами $\{S_{\tilde{l}}^{i}\}_{\tilde{l}=1}^{L_i}$, $\{S_{l}^{j}\}_{l=1}^{L_j}$.

Після підстановки зазначених розкладів у рівняння (2) та прирівнювання коефіцієнтів Фур'є $u_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'')$, $f_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'')$ при однакових базисних сферичних функціях приходимо до рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'} \cdot \frac{\partial}{\partial R'} + \frac{I_i}{R'^2} - \right. \\ \left. - a^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial R''^2} + \frac{n-k-1}{R''} \frac{\partial}{\partial R''} + \frac{J_j}{R''^2} \right\} \right] u_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'') = f_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R''),$$

яке можна записати в еквівалентній формі:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'} \frac{\partial}{\partial R'} + \frac{\partial^2}{\partial \left(-\frac{R''^2}{a^2} \right)} + \frac{n-k-1}{\left(-\frac{R''}{a} \right)} \frac{\partial}{\partial \left(-\frac{R''}{a} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{I_i}{R'^2} + \frac{J_j}{\left(-\frac{R''^2}{a^2} \right)} \right] u_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'') = f_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R''), \tag{3}$$

де $I_i = -i\,(i + k - 2)\,, \quad J_j = -j\,(j + n - k - 2)$.

При переході до сферичних координат умова Діріхле (1) перетворюється на умову вигляду:

$$u|_{R'^2 + R''^2 = 1} = 0,$$

звідки $u = (R'^2 + R''^2 - 1)\,\tilde{u}$ (в силу теореми Безу [3]). Таким чином,

$$u_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'') = \left(R'^2 + R''^2 - 1 \right) \tilde{u}_{\tilde{l}l}^{ij}\,(R', R'').$$

Тепер, поклавши $\tilde{R}''^2 = -\frac{R''^2}{a^2}$, що означає $R''^2 = -a^2\tilde{R}''^2$, одержимо:

$$u_{\tilde{l}l}^{ij}\left(R', R''\right) = \left(R'^2 - a^2\tilde{R}''^2 - 1\right)\tilde{u}_{\tilde{l}l}^{ij}\left(R', \tilde{R}''\right).$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'}\cdot\frac{\partial}{\partial R'} + \frac{I_i}{R'^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{R}''^2} + \frac{n-k-1}{\tilde{R}''}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{R}''} + \frac{J_j}{\tilde{R}''^2}\right]\times \\ \times\left(R'^2 - a^2\tilde{R}''^2 - 1\right)\tilde{u}_{\tilde{l}l}^{ij}\left(R', \tilde{R}''\right) = f_{\tilde{l}l}^{ij}\left(R', \tilde{R}''\right). \tag{4}$$

Далі, перейшовши до полярних координат $(\rho, \varphi) : R' = \rho\cos\varphi$, $\tilde{R}'' = \rho\sin\varphi$, отримаємо із (4) наступну рівність:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{n-k-1}{\rho^2}\cot\varphi - \frac{k-1}{\rho^2}\tan\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi}\right]\left[\left(\rho^2\cos^2\varphi - a^2\rho^2\sin^2\varphi - 1\right)\tilde{u}_{\tilde{l}l}^{ij}(\rho, \varphi)\right] = f_{\tilde{l}l}^{ij}(\rho, \varphi). \tag{5}$$

Виконавши розкладання функцій $\tilde{u}_{\tilde{l}l}^{ij}(\rho, \varphi)$ та $f_{\tilde{l}l}^{ij}(\rho, \varphi)$ за степенями ρ і підставивши отримане в (5), для старшого степеня однорідності m матимемо:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{n-k-1}{\rho^2}\cot\varphi - \frac{k-1}{\rho^2}\tan\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi}\right]\left\{\rho^{2+m}\tilde{u}_{\tilde{l}l}^{ij}(\varphi)\right\} = \rho^m f_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi), \tag{6}$$

де $\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)$ та $f_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)$ — тригонометричні поліноми від $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$. Виходячи з того, що

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{n-k-1}{\rho^2}\cot\varphi - \frac{k-1}{\rho^2}\tan\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi}\right]\left\{\rho^{2+m}\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)\right\} =$$

$$= \rho^m\left[\left(\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}\right)''(\varphi) + \left((n-k-1)\cot\varphi - (k-1)\tan\varphi\right)(\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij})'(\varphi) + \right.$$

$$\left. + \left((m+2)(m+n) + \frac{I_i}{\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\sin^2\varphi}\right)\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi)\right],$$

рівність (6) після ділення на ρ^m перетвориться на звичайне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, а саме:

$$\left(\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}\right)''(\varphi) + \big((n-k-1)\cot\varphi - (k-1)\tan\varphi\big)(\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij})'(\varphi) + \\ + \left((m+2)(m+n) + \frac{I_i}{\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\sin^2\varphi}\right)\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi) = f_{\tilde{l}l_m}^{ij}(\varphi). \tag{7}$$

При цьому відповідне однорідне рівняння (7) приводиться до гіпергеометричного рівняння Гаусса

$$y\,(1-y)\,\frac{d^2w}{dy^2}+\left[C-(A+B+1)\,y\right]\frac{dw}{dy}-ABw=0,$$

так, як це показано в роботі [4].

Слід підкреслити, що в [4] знайдено та описано всі розв'язки гіпергеометричного рівняння. Його дослідження полягає у детальному аналізі так званого виродженого випадку, в якому розв'язок може бути виражений через будь-які два з 24 рядів Куммера (див. [5]).

Розглянемо для визначеності випадок 1) твердження 2.1 роботи [4]. У такій ситуації одним із розв'язків гіпергеометричного рівняння є функція

$$w\,(y)=F\left(1-\frac{m+i+j+n}{2},\,2+\frac{m-i-j}{2},\,2-i-\frac{k}{2},\,y\right),$$

але тоді функція

$$\begin{aligned}Z\,(y)=y^{\frac{1}{2}(2-i-k)}(y-1)^{\frac{1}{2}(2-j-n+k)}&\times\\ \times F\left(1-\frac{m+i+j+n}{2},\,2+\frac{m-i-j}{2},\,2-i-\frac{k}{2},\,y\right)&,\end{aligned}$$

буде, відповідно, розв'язком диференціального рівняння

$$\begin{aligned}y^2(1-y)^2Z''-\frac{1}{2}y\,(1-y)\,(ny-k)\,Z'+\frac{1}{4}\left[I_i+((m+2)\,(m+n)\right.&-\\ \left.-I_i+J_j)\,y-(m+2)\,(m+n)\,y^2\right]Z&=0.\end{aligned}$$

Звідси робимо висновок, що розв'язок однорідного диференціального рівняння (7) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_m^{(0)}\,(\varphi)=(\cos\varphi)^{2-i-k}(\sin\varphi)^{2-j-n+k}&\times\\ \times F\left(1-\frac{m+i+j+n}{2},\,2+\frac{m-i-j}{2},\,2-i-\frac{k}{2},\,\cos^2\varphi\right)&.\end{aligned}$$

Повертаючись до неоднорідного рівняння (7), зробимо в ньому підстановку

$$\tilde{u}_{\tilde{l}l_m}^{ij}\,(\varphi)=\tilde{u}_m^{(0)}\,(\varphi)\cdot v\,(\varphi)\,,$$

де $\tilde{u}_m^{(0)}\,(\varphi)$ — знайдений вище ненульовий розв'язок рівняння (7), тоді (див. [6]) матимемо:

$$v''\,(\varphi)+\left(\frac{2\left(\tilde{u}_m^{(0)}\right)'}{\tilde{u}_m^{(0)}}+(n-k-1)\cot\varphi-(k-1)\tan\varphi\right)\cdot v'\,(\varphi)=\frac{f_{\tilde{l}l_m}^{ij}\,(\varphi)}{\tilde{u}_m^{(0)}\,(\varphi)}.$$

Останнє рівняння допускає пониження порядку і зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Як показано в довіднику [6], загальний розв'язок рівняння (7) має наступний вигляд:

$$\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi) = c_1\tilde{u}^{(0)}_m(\varphi) + c_2\tilde{u}^{(0)}_m(\varphi)\cdot\int\frac{d\varphi}{E\Big(\tilde{u}^{(0)}_m(\varphi)\Big)^2} + \tilde{u}^{(0)}_m(\varphi)\times$$
$$\times\int\frac{1}{E\Big(\tilde{u}^{(0)}_m(\varphi)\Big)^2}\left(\int E\tilde{u}^{(0)}_m(\varphi) f^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\,d\varphi\right)d\varphi. \tag{8}$$

У рівності (8) c_1, c_2 — довільні сталі,

$$E = \exp\int\Big[(n-k-1)\cot\varphi - (k-1)\tan\varphi\Big]d\varphi = (\sin\varphi)^{n-k-1}(\cos\varphi)^{k-1}.$$

Повернемось знову до рівняння (5). Позначивши оператор

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} +$$
$$+\left(\frac{n-k-1}{\rho^2}\cot\varphi - \frac{k-1}{\rho^2}\tan\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{I_i}{\rho^2\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\rho^2\sin^2\varphi},$$

із (5) для наступного степеня однорідності $m-2$ отримаємо співвідношення

$$\mathcal{L}\left(\rho^m\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\right) - \mathcal{L}\left(\rho^m\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\right) = \rho^{m-2}f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi).$$

Звідси

$$\mathcal{L}\rho^m\left\{\left(\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi) - \tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\right)\right\} = \rho^{m-2}f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi),$$

що рівносильне рівності

$$\rho^{m-2}\widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi) - \tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)\right] = \rho^{m-2}f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi), \tag{9}$$

де

$$\widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \Big((n-k-1)\cot\varphi - (k-1)\tan\varphi\Big)\frac{\partial}{\partial\varphi} +$$
$$+(m+2)(m+n) + \frac{I_i}{\cos^2\varphi} + \frac{J_j}{\sin^2\varphi}.$$

Розділивши обидві частини рівності (9) на ρ^{m-2} і позбувшись однієї з двох змінних, отримаємо рівняння відносно невідомої функції $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)$:

$$\widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi) = \mathcal{Q}(\varphi) + f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi). \tag{10}$$

Тут $\mathcal{Q}(\varphi) = \widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)$ – результат дії оператора $\widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ на знайдений вище розв'язок $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_m}(\varphi)$ рівняння (7).

Дослідження отриманого диференціального рівняння другого порядку (10) подібне до дослідження рівняння (7). Спочатку розглядається відповідне однорідне рівняння і знаходиться один з його нетривіальних розв'язків $\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)$.

Потім за допомогою підстановки, описаної в книзі [6] на с. 144, можна перейти від рівняння (10) до рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. При цьому шуканий загальний розв'язок рівняння (10) матиме вигляд:

$$\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi) = c_3\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi) + c_4\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\cdot\int\frac{d\varphi}{E\Big(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\Big)^2} + \tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\times$$
$$\times\int\frac{1}{E\Big(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\Big)^2}\left(\int E\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\left[f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi) + \Omega(\varphi)\right]d\varphi\right)d\varphi.$$

Продовжуючи аналіз рівняння (5), в якому невідома функція та права частина розкладені в ряд за степенями ρ, на наступному кроці одержимо співвідношення для степеня однорідності $m-4$:

$$\mathcal{L}\left(\rho^{m-2}\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\right) - \mathcal{L}\left(\rho^{m-2}\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\right) = \rho^{m-4}f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi).$$

Після ділення на ρ^{m-4} останнє рівняння стає рівнянням, що залежить від однієї змінної, і процедура знаходження його розв'язку $\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)$ така сама, як у випадку рівнянь (7) та (10). Отже,

$$\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi) = c_5\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi) + c_6\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\cdot\int\frac{d\varphi}{E\Big(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\Big)^2} + \tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\times$$
$$\times\int\frac{1}{E\Big(\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\Big)^2}\left(\int E\tilde{u}^{ij(0)}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi)\left[f^{ij}_{\tilde{l}l_{m-4}}(\varphi) + \widetilde{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\tilde{u}^{ij}_{\tilde{l}l_{m-2}}(\varphi)\right]d\varphi\right)d\varphi.$$

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. При вивченні питань однозначної розв'язності задачі Діріхле для ультрагіперболічного рівняння в кулі (див. [1], [4]) був застосований метод двоїстості рівняння-область, що дозволило встановити критерій порушення єдиності розв'язку даної задачі в термінах нулів класичних поліномів Якобі. При цьому шукана функція розкладається в ряд Фур'є за сферичними гармоніками, які є власними функціями оператора Лапласа-Бельтрамі. Вказане розкладання дозволяє привести початкове ультрагіперболічне рівняння до звичайного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, а граничну умову Діріхле — до певного співвідношення з параметром a. Відповідне однорідне рівняння за допомогою підстановки перетворюється на гіпергеометричне рівняння Гаусса, дослідження якого полягає у детальному аналізі так званого виродженого випадку, коли розв'язок може бути виражений через будь-які два з 24 рядів Куммера.

Метою даної роботи, в основу якої покладено результати, отримані в [1], [4], було знайти формальний розв'язок першої крайової задачі в кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною, базуючись на спостереженнях та дослідженні, що наводиться у роботі [1]. Важливо підкреслити, що в процесі побудови розв'язку застосовано апарат сферичних функцій та теорію гіпергеометричного рівняння Гаусса.

Поступово виводячи з рівняння (5) співвідношення, які пов'язують різні степені однорідності шуканої функції та правої частини, починаючи зі старшого степеня, одержали скінченний набір рівнянь, з яких визначаються компоненти розкладання розв'язку задачі (1), (2). У такий спосіб вказано процедуру побудови формального розв'язку задачі Діріхле для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння в одиничній кулі. В отриманому ряді кожен наступний член може бути виражений через попередній за допомогою рекурентних співвідношень.

Список використаної літератури

1. Бурский В. П., Кириченко Е. В. Однозначная разрешимость задачи Дирихле в шаре для ультрагиперболического уравнения. *Дифференциальные уравнения.* 2008. Т. 44, № 4. С. 467–479.
2. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 2002. 316 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва : Наука, 1968. 431 с.
4. Кириченко Е. В. О решении дифференциального уравнения, возникающего в задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре. *Труды ИПММ НАНУ.* 2005. Т. 10. С. 59–71.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Москва : Наука, 1965.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Наука, 1971. 576 с.

Kyrychenko V. V., Lesina E. V. Formal solution of the Dirichlet problem in a ball for a non-homogeneous ultrahyperbolic equation with a polynomial right-hand part.

Formal solution of the Dirichlet problem in a ball for a non-homogeneous ultrahyperbolic equation with a polynomial right-hand part. In the paper, a formal solution of the Dirichlet problem in a ball for a nonhomogeneous ultrahyperbolic equation with a polynomial right-hand side is found. The solution construction procedure is based on the apparatus of spherical functions and the theory of Gauss's hypergeometric equation. At the same time, the sought function and the known right-hand side of the investigated equation are expanded into a Fourier series by spherical harmonics, which are eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator. The specified decomposition allows to reduce the original ultrahyperbolic equation to an ordinary inhomogeneous differential equation of the second order. The corresponding homogeneous equation is transformed by substitution into a hypergeometric Gaussian equation, the study of which consists in a detailed analysis of the so-called degenerate case, when the solution can be expressed in terms of any two of Kummer's 24 series. Difficulties in proving solution smoothness are due to the fact that each subsequent term of the formal series is expressed in terms of the previous one using cumbersome recurrence relations.

Keywords: ultrahyperbolic equation, Dirichlet problem, spherical functions, hypergeometric Gauss equation, Fourier coefficients.

References

1. Burskii, V. P., & Kyrychenko, E. V. (2008). Unique solvability of the Dirichlet problem in a ball for an ultrahyperbolic equation. *Differential Equations,* 44(4), 467–479 [in Russian].
2. Burskii, V. P. (2002). *Methods for studying boundary value problems for general differential equations.* Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
3. Kurosh, A. G. (1968). *Higher algebra course.* Moscow: Nauka [in Russian].
4. Kyrychenko, E. V. (2005). On the solution of a differential equation arising in the Dirichlet problem for an ultrahyperbolic equation in a ball. *Proceedings of IAMM NASU,* 10, 59–71 [in Russian].
5. Bateman, G., & Erdeyi, A. (1965). *Higher transcendental functions. Hypergeometric function. Legendre functions.* Moscow: Nauka [in Russian].
6. Kamke, E. (1971). *Handbook of ordinary differential equations.* Moscow: Nauka [in Russian].

Одержано 16.04.2023