УДК 517.5
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).73-78

Т. О. Петрова[1], І. Л. Петрова[2]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
доцент кафедри математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
tamarapetrova2703@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5293-9701

[2] кандидат фізико-математичних наук
irynapetrova1411@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3913-7237

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕГАТИВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ В ПРОСТОРІ СОБОЛЄВА З ІНДЕКСОМ $r \in (2,3)$

Питання монотонної апроксимації це питання наближення монотонних функцій з простору Соболєва монотонними алгебраїчними поліномами. Досліджується питання наближення монотонних функцій із простору Соболєва $\mathbb{W}^r[0,1]$ з дійсним індексом $r \in (2,3)$ алгебраїчними поліномами. Побудовано контрприклад, якийй показує, що для $r \in (2,3)$ оцінка

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r)\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)^r,\ n > r$$

є хибною. Результат отриманий в роботі є узагальненням аналогічних результатів для простору Соболєва з натуральним індексом $r > 2$.

Ключові слова: наближення функції, простір Соболєва, алгебраїчний поліном, монотонна функція.

1. Вступ. Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C\,[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$. Теляковський [1] для $r=1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [4] посилили пряму теорему Нікольського – Тіммана довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r)\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)^r,\ n > r, \tag{1}$$

де c — абсолютна стала.

DeVore та Yu [2] довели, що при $r = 1, 2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n, такий, що має місце (1). В роботі [5] доведено, що для натурального $r > 2, r \in \mathbb{N}$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна для монотонного наближення. Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [7], що оцінка (1) також є невірною. Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^{r}f\right| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1}f$ — лівостороння дробова похідна [3]). Будемо позначати через $\prod_n$ — множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^1 множину монотонних на $[0,1]$ функцій. Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат роботи [6] на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^1$ з $r \in (2,3)\,, r \in \mathbb{R}$.

2. Основні означення та допоміжні твердження. Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в роботі.

Означення 1. *Нехай $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Інтеграли*

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,\ x > \alpha, \tag{2}$$

$$(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,\ \ x < b, \tag{3}$$

де $\alpha > 0$ називаються інтегралами дробового порядку α. Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім. Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегруванню [6].

Означення 2. *Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$ кожен із виразів*

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \tag{4}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \tag{5}$$

називається дробовою похідною порядку α, $0 < \alpha < 1$ відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \geq 1$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

де $[\alpha]$ — ціла частина числа α і $\{\alpha\}$ — дробова частина числа α. Якщо α — ціле число, то під дробовою похідною порядку α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D^{\alpha}_{a+} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D^{\alpha}_{b-} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Якщо ж α — не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D^{\alpha}_{a+}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt,\ \ n = [\alpha] + 1, \tag{7}$$

$$D^{\alpha}_{b-}f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt,\ \ n = [\alpha] + 1. \tag{8}$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку α, $\alpha > 0$ [6].

Теорема 1. *Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку n, $n = [\alpha] + 1$. Тоді $D^{\alpha}_{\alpha+}f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді*

$$D^{\alpha}_{a+}f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

3. Основний результат.

Теорема 2. *Нехай $r \in (2,3)$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$, для будь-якої додатної на $(0,1)$ функції ψ, такої, що $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to 1}\psi(x) = 0$ існує така функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$, що для будь-якого полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$ справедлива одна з таких властивостей:*

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^2(x)\psi(x)} = +\infty, \tag{9}$$

або

$$\overline{\lim_{x\to 1}} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^2(x)\psi(x)} = +\infty, \tag{10}$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (2,3)$ і $m = [r] + 1 = 3$.

Розглянемо функцію:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(b-x)^3}{3!} + b^3(x+7) - b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}, & x \in [0,b], \\ b^3(x+7) - b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}, & x \in (b,1], \end{cases}$$

де $b = \frac{1}{468n^2}$.

Тоді

$$f'(x) := \begin{cases} -\frac{(b-x)^2}{2} + b^3 + b^2(1+x)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x \in [0,b], \\ b^3 + b^2(1+x)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x \in (b,1], \end{cases}$$

$$f''(x) := \begin{cases} b - x - b(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2} + \frac{b(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x \in [0,b], \\ -b(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2} + \frac{b(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x \in (b,1], \end{cases}$$

$$f'''(x) := \begin{cases} -1 + (b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x \in [0,b), \\ (b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x \in (b,1]. \end{cases}$$

З явного вигляду функції $f(x)$ та її похідних, можна отримати нерівності:

$$f(0) = \frac{17}{3}b^3 > 0, \qquad f(1) = 8b^3 - b^3 \cdot 2^{-\frac{1}{b}} < 8b^3 < \frac{45}{4}b^3,$$

$$f(b) = b^3(b+7) - b^3(1+b)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}} \sim b^4 + 7b^3 - \frac{b^3}{e} + \frac{b^3}{4e} \sim$$
$$\sim 7b^3 - \frac{3b^3}{4e} = \frac{(28e-3)b^3}{4e},$$

$$f'(0) = -\frac{b^2}{2} + b^3 + b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + b^3 > 0, \qquad f'(1) = b^3 + b^2 2 \cdot 2^{-\frac{1}{b}-1} \sim b^3 > 0,$$

$$f'(b) = b^3 + b^2(1+b)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}-1} \sim b^3 + \frac{b^2}{e} - \frac{b^2}{4e} = b^3 + \frac{3b^2}{4e} > 0,$$

$$f''(0) = b - b(b+1) + \frac{b(1-b)}{4} = b - b^2 - b + \frac{b}{4} - \frac{b^2}{4} = \frac{b}{4} - \frac{5b^2}{4} \sim \frac{b}{4} > 0,$$

$$\forall x \in [0,1] : \ f'(x) \geq 0, \ \forall x \in [0,1] : \ f(x) \geq 0,$$

$$f''(1) = -b(b+1)2^{-\frac{1}{b}-2} < 0,$$

$$f''(b) = -b(b+1)e^{-1} + \frac{b(1-b)}{4}e^{-1} = -\frac{b}{e}(b+1-\frac{1-b}{4}) = -\frac{b}{e} \cdot \frac{3+5b}{4} < 0,$$

$$f'''(0) = -1 + (b+1)(2b+1) - \frac{(1-b)(1-2b)}{4} = 3b + 2b^2 - \frac{1}{4} + \frac{3b}{4} - \frac{b^2}{4} = \\ = -\frac{1}{4} + \frac{15b}{4} + \frac{7b^2}{4} < 0,$$

$$f'''(1) = (b+1)(2b+1)2^{-\frac{1}{b}-3} > 0,$$

$$f'''(b+) = (b+1)(2b+1)(1+b)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}-3} \sim \\ \sim (b+1)(2b+1)e^{-1} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1} > 0,$$

$$f'''(b-) = -1 + (b+1)(2b+1) - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1} < 0.$$

Очевидно, що $\forall x \in [0,b) : \ f'''(x) < 0$ і $\forall x \in (b,1] : \ f'''(x) > 0$. З нерівностей наведених вище бачимо, що і функція $f(x)$ зростає.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^3 f(x)$. Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$. Спочатку покажемо, що $F \in \Delta^1$. $F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \geq 0$ з доведеного вище. Тоді $F \in \Delta^1$.

Тепер доведемо, що $F \in W^r[0,1]$. За Теоремою 2.3 в роботі [3] за формулами (7) або (8) маємо:

$$D^r_{0+}F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int\limits_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \\ = \sum_{k=0}^{2} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int\limits_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt,$$

майже скрізь на $[0,1]$.

Так як $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0,1,2$, то $D^r_{0+}F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int\limits_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt$ майже скрізь на $[0,1]$. Очевидно, що $\exists c > 0, \ c \in \mathbb{R}$ така, що $\forall x \in [0,1] : |F^{(3)}(x)| \leq c$. Тоді

$$|D^r_{0+}F(x)| \leq \frac{c}{\Gamma(3-r)} \int\limits_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-2}} = \frac{c}{\Gamma(3-r)} \frac{x^{3-r}}{3-r} \leq \frac{c}{(3-r)\Gamma(3-r)}.$$

Таким чином, $D^r_{0+}F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$. Очевидно, що

$$D^{r-1}_{0+}F(x) = \frac{1}{\Gamma(2-r)}\int\limits_0^x \frac{F^{(2)}(t)}{(x-t)^{r-2}}dt,$$

буде абсолютно неперервною. Отже, $F \in W^r[0,1]\bigcap \Delta^1$.

Нехай існує многочлен q_n, який є монотонним і для якого умова (9) не виконується. Тоді, для деякої сталої B маємо:

$$|F(x) - q_n(x)| \leq Bx\psi(x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Звідси випливає, що $q_n(0) = F(0) = 0$ і $q'_n(0) = F'(0) = 0$. Так як $q'_n(x) \geq$ $\geq 0, x \in [0,1]$ і $q_n(0) = 0$ зумовлює $q_n(x) \geq 0,\ x \in [0,1]$, тоді $q_n(x)$ зростає на $[0,1]$ і $q_n(x) \geq 0, x \in [0,1]$.

Тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x) = x^2 \cdot h_{n_1}(x)$, де h_{n_1} многочлен степеня $\leq n_1, n_1 \leq n-2$.

Розглянемо многочлен $\tilde{q}_n(x) = q_n(x) + f(0)x + f'(0)$.

$$\frac{b^2}{18} < \frac{b^2}{4} + b^3 = |f'(0)| = |\tilde{q}_n(0)| \leq 2n^2 \parallel \tilde{q}_n \parallel .$$

За побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він зростає. Тоді $\parallel \tilde{q}_n \parallel = \tilde{q}_n(1)$. Отже маємо

$$\frac{b^2}{18} < 2n^2\tilde{q}_n(1) \Rightarrow \tilde{q}_n(1) > \frac{b^2}{36n^2}. \tag{11}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} f(1) < \frac{45b^3}{4} = \frac{45b^2 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} &= \frac{b^2}{36n^2} \cdot 45n^2 364 = \\ &= \frac{b^2}{36n^2} \cdot \frac{45\frac{1}{468n^2}n^2 36}{4} = \frac{b^2}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} < \frac{b^2}{36n^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

З нерівностей (11) і (12) маємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$. Далі розглянемо $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$. Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$. Тоді

$$\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0) \Rightarrow f(1) = \tilde{q}_n(1) - f'(0) - f(0),$$

припускаємо, що $q_n(1) > 0$, бо в протилежному випадку твердження про те, що $f(1) \neq q_n(1)$, очевидно. Маємо, що

$$8b^3 - b^3 \cdot 2^{-\frac{1}{b}} = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^2}{4} - b^3 - \frac{17}{3}b^3 = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^2}{4} - \frac{20}{3}b^3 \Rightarrow \tilde{q}_n(1) = \frac{44}{3}b^3 - b^3 \cdot 2^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^2}{4}.$$

Тоді очевидно, що $\tilde{q}_n(1) \sim \cdot b^2$, де $c > \frac{1}{4},\ c = const$. З останніх міркувань випливає, що

$$q_n(1) \sim c \cdot b^2 - \frac{17}{3}b^3 - \frac{b^2}{4} - b^3 = c_1 b^2 - \frac{14}{3}b^3 \sim c_1 b^2,\ c_1 = const,\ c_1 > 0.$$

Але з іншого боку, $f(1) \sim 8b^3$. Таким чином маємо суперечність з припущенням, що $q_n(1) = f(1)$. А отже $q_n(1) \neq f(1) = F(1)$. Теорема доведена.

4. Висновки. Побудовано контрприклад, який показує, що результат, доведений у роботі [6], можна узагальнити введенням додаткового множника $\psi(x)$ у знаменнику в умовах (9), (10) теореми 3, для випадку $W^r[0,1]\bigcap\Delta^1,\ r\in(2,3)$.

Список використаної літератури

1. Теляковський С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами. *Мат. сб.* 1966. Т. 79. С. 252–265.
2. DeVore R. A., Yu X. M. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constr. Approx.* 1985. No. 1. P. 323–331.
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Sci. Publ. : London, 1987.
4. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *J. Approx. Theory.* 1994. Vol. 77. P. 31–41.
5. Gonska H. H., Leviatan D., Shevchuk I. A., Wenz H. J. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constr. Approx.* 2000. No. 16. 603–629.
6. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну. *Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка.* 2003. № 9–10. С. 125–127.
7. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні. *Праці Інституту математики НАН України "Математика та її застосування". Теорія наближення функцій.* 2005. Т. 35. С. 107–112.

Petrova T. O., Petrova I. L. Generalization of negative results for interpolation monotone approximation of functions having a fractional derivative in sobolev space with index $r\in(2,3)$.

The issue of monotone approximation is the issue of approximation of monotone functions from the Sobolev space by monotone algebraic polynomials. The issue of approximation of monotone functions from the Sobolev space $\mathbb{W}^r[0,1]$ with real index $r\in(2,3)$ by algebraic polynomials is investigated. A counterexample is constructed, which shows that for $r\in(2,3)$ the estimate

$$|f(x)-p_n(x)|\le c(r)\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)^r,\ n>r$$

is false. The result obtained in the paper is a generalization of similar results for the Sobolev space with natural index $r>2$.

Keywords: approximation function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function.

References

1. Teliakovskyi, S. A. (1966). Two theorems on the approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sat.,* 79, 252–265 [in Russian].
2. DeVore, R. A., & Yu, X. M. (1985). Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constr. Approx.,* 1, 323–331.
3. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications.* Sci. Publ.: London.
4. Gopengauz, A. I. (1994). Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *J. Approx. Theory,* 77, 31–41.
5. Gonska, H. H., Leviatan, D., Shevchuk, I. A., & Wenz, H. J. (2000). Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constr. Approx. 16,* 603–629.
6. Petrova, T. O. (2003). On pointwise interpolation estimates of the monotonic approximation of functions having a fractional derivative. *Visn. Kyiv. university Math. Mechanics,* 9–10, 125–127 [in Ukrainian].
7. Petrova, T. O. (2005). A counter example in the interpolation convex approximation. *Work of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine "Mathematics and its applications". The theory of function approximation,* 35, 107–112 [in Ukrainian].

Одержано 22.04.2023