УДК 519.622
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).24-32

К. В. Божонок

Український державний університет ім. М. Драгоманова,
завідувач кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
k.v.bozhonok@udu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5396-7352

АЛГОРИТМ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ АБЕЛЯ

Розглядаються питання конструювання та теоретичного обґрунтування чисельно-аналітичного алгоритму поліноміальної апроксимації розв'язків задачі Коші для диференціального рівняння Абеля. Алгоритм ґрунтується на апроксимаційному методі В. К. Дзядика розв'язування лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь, головною ідеєю якого є побудова такого наближеного розв'язку, який би як можна точніше задовольняв апроксимаційну теорему П. Л. Чебишева про характеризацію многочлена найкращого наближення. В роботі a-метод узагальнюється на рівняння з нелінійностями у вигляді поліномів. Доведена теорема про відхилення наближеного розв'язку від точного розв'язку поставленої задачі Коші у рівномірній та квадратичній метриках, отримані оцінки похибок. Алгоритм апробований на тестовій задачі. Обчислювальний експеримент ілюструє високу ефективність запропонованого алгоритму та теоретичних результатів.

Ключові слова: поліноміальна апроксимація, найкраще наближення, алгебраїчно–нелінійні рівняння, диференціальне рівняння Абеля, оптимальні алгоритми.

1. Вступ. Апроксимаційний метод (а-метод) був запропонований В. К. Дзядиком в [1] при розв'язуванні задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь з многочленними коефіцієнтами.

Основними перевагами а-методу є висока точність — порядку найкращого наближення шуканої функції алгебраїчними многочленами і, як наслідок, ненасичуваності за точністю [2]. Ця особливість важлива при необхідності уникнення явища «вибуху похибок», яке може бути наслідком явища насичення [3] (відома проблема Фавара-Колмогорова у теорії наближення функцій та явище насичення у чисельному аналізі).

Актуальність таких питань зумовлена посиленням вимог до точності та надійності при розв'язуванні сучасних задач математичного та комп'ютерного моделювання [4], [5].

Можливо це і послужило однією з причин для подальшого розвитку а-методу до розв'язування алгераїчно-нелінійних диференціальних рівнянь та систем [6], [7].

Метою роботи є конструювання та теоретичне обґрунтування алгоритму на основі відомого а-методу В. К. Дзядика для розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння Абеля із врахуванням нелінійності розглянутого рівняння. Зазначимо також, що даний алгоритм є зручним для реалізації в системах комп'ютерної алгебри [8].

2. Основний результат.

Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння Абеля 1-го роду виду

$$a(x)y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y^2(x) + d(x)y^3(x) + f(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

де $x \in [-h; h]$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ — алгебраїчні многочлени степенів n_a, n_b, n_c, n_d, n_f відповідно.

Алгоритм побудови апроксимаційних многочленів. Запишемо загальну схему побудови многочленів:

1. Відповідно до схеми а-методу (див. [1], [6]– [7]), перейдемо від задачі (1) до еквівалентного рівняння типу Вольтери:

$$\int\limits_0^x a(t)y'(t)dt = \int\limits_0^x \big(b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t) + f(t)\big)\, dt,$$

$$a(x)y(x) - a(0)y(0) - \int\limits_0^x a'(t)y(t)dt = \int\limits_0^x \big(b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t) + f(t)\big)\, dt,$$

$$a(x)y(x) = a(0)y_0 + \int\limits_0^x \Big[\big(a'(t) + b(t) + c(t)y(t) + d(t)y^2(t)\big)\cdot y(t) + f(t)\Big]\, dt. \tag{2}$$

2. Тепер поставимо у відповідність рівнянню (2) наступне наближене рівняння:

$$a(x)y_n(x) = a(0)y_0 + \int\limits_0^x \Big[\big(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)\big)\cdot y_n(t) + f(t)\Big]\, dt - \varepsilon_N(x). \tag{3}$$

У (3) $y_n(x)$ є наближений розв'язок, що шукається у вигляді алгебраїчного многочлена степеня n:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k, \tag{4}$$

з невідомими коефіцієнтами c_k.

За нев'язку $\varepsilon_N(x)$ беремо многочлен степеня $n + N$ виду:

$$\varepsilon_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \tau_{n+i} T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right), \tag{5}$$

де $N_{i=1}$ вибираємо, як $\max\left(n_a, n_b + 1, n_c + n + 1, n_d + 2n + 1, n_f + 1 - n\right)$.

Тут $T_k(t) = \cos(k \cdot \arccos t)$ — многочлени Чебишова першого роду, τ_{n+i} — невідомі додаткові параметри.

3. Далі, підставляючи (4), (5) в (3) і прирівнюючи коефіцієнти при степенях x, отримуємо систему нелінійних рівнянь з якої знаходимо невідомі c_k $\big(k = \overline{0, n}\big)$ та допоміжні параметри τ_{n+i} $\big(i = \overline{1, N}\big)$.

4. Для випадку, коли в (1) x належить довільному проміжку $[x_0; x_1]$ і початкова умова переписується $y(x_0) = y_0$, то будемо мати наступне наближене рівняння:

$$a(x)y_n(x) = a(x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \left[\left(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)\right) \cdot y_n(t) + f(t)\right] dt - \varepsilon_N(x),$$

де $y_n(x)$ визначається (4), а нев'язка–многочлен $\varepsilon_N(x)$ записується через многочлени Чебишова першого роду, що зміщені на $[x_0; x_1]$

$$T_{n+i}\left(\frac{2x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0}\right) = \cos\left((n+i) \cdot \arccos\left(\frac{2x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0}\right)\right).$$

Теоретичне обґрунтування. Оцінки похибки запропонованого алгоритму розв'язування задачі (1) дослідимо в припущенні, що

$$\min_{x \in [-h;h]} a(x) \geq c > 0. \tag{6}$$

Розділимо праву і ліву частини (2) на $a(x)$, позначимо:

$$A(x,t) := \frac{a'(t) + b(t)}{a(x)}, \quad B(x,t) := \frac{c(t)}{a(x)}, \quad D(x,t) := \frac{d(t)}{a(x)}. \tag{7}$$

Відхилення наближеного розв'язку $y_n(x)$ від точного розв'язку задачі (1) $y(x)$ будемо вивчати в $C[-h;h]$ і $L_p^2[-h;h]$ просторах неперервних і сумовних з квадратом при чебишовській вазі $\sqrt{1-(x/h)^2}$ на $[-h,h]$ функцій які мають норми:

$$\|\varphi\|_C := \max_{|x| \leq h} |\varphi(x)|, \quad \|\varphi\|_{L_p^2} := \frac{2}{\pi h} \int\limits_{-h}^{h} \frac{\varphi^2 dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{h}\right)^2}}. \tag{8}$$

$C(\square)$ і $L_p^2(\square)$ — аналогічні простори функцій $F(x,t)$, де $(x,t) \in [-h,h]$.

Має місце наступне твердження:

Теорема 1. *Нехай число $h > 0$ і для рівняння (3) число n $(n = 1, 2, \ldots)$ такі, що у кулі $S(\rho) := \{\psi : \psi \in C[-h,h],\ \|\psi\|_C \leq \rho\}$ існує єдиний розв'язок задачі (1) $y(x)$ і єдиний розв'язок наближеного інтегрального рівняння (2) $y_n(x)$.*

Тоді на $[-h,h]$ справедливі наступні нерівності:

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_C \exp(hM), \tag{9}$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_{L_p^2} \leq \left(1 + \frac{\pi}{2} hM \exp(hM)\right) \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2}, \tag{10}$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq \left(1 + \frac{\sqrt{N}}{n+1} A_1(h,\rho)\right) \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_C, \tag{11}$$

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{L_p^2} \le \left(1+\frac{\sqrt{N}}{n+1}A_2(h,\rho)\right)\left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2}, \tag{12}$$

де

$$M := \|A(x,t)\|_{C(\square)} + 2\|B(x,t)\|_{C(\square)}\rho + 3\|D(x,t)\|_{C(\square)}\rho^2 \tag{13}$$

$A_1(h,\rho)$, $A_2(h,\rho)$ — *деякі сталі , що не залежать від* n.

Доведення. Розділимо обидві частини рівнянь (2) і (3) на $a(x)$. З урахуванням припущення (6) і позначень (7), отримаємо:

$$y(x) = \frac{a(0)y_0}{a(x)} + \int\limits_0^x \left[\left(A(x,t)+B(x,t)y(t)+D(x,t)y^2(t)\right)\cdot y(t) + \frac{f(t)}{a(x)}\right]dt,$$

$$y_n(x) = \frac{a(0)y_0}{a(x)} + \int\limits_0^x \left[\left(A(x,t)+B(x,t)y_n(t)+D(x,t)y_n^2(t)\right)\cdot y_n(t) + \frac{f(t)}{a(x)}\right]dt- \\ -\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}.$$

Знайдемо різницю лівих і правих частин отриманих рівнянь:

$$y(x)-y_n(x) = \\ = \int\limits_0^x \left[A(x,t)+B(x,t)(y(t)+y_n(t))+D(x,t)(y^2(t)+y_n(t)y_n(t)+y_n^2(t)\right]\cdot \\ \cdot[y(t)-y_n(t)]dt + \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}. \tag{14}$$

Застосуємо тепер нерівність Гронуола (див. [1]) з урахуванням того, що $y, y_n \in S(\rho)$, отримаємо:

$$\|y(x)-y_n(x)\|_C \le \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_C \exp(hM),$$

де $M := \|A(x,t)\|_{C(\square)} + 2\|B(x,t)\|_{C(\square)}\rho + 3\|D(x,t)\|_{C(\square)}\rho^2$, тобто нерівність (9).

Тепер зауважимо, що рівність (14) лінійна відносно до функції $\varphi(x) = y(x) - y_n(x)$. Тож має місце наступна рівність (див. [1]):

$$y(x)-y_n(x) = \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} + \int\limits_0^x R(x,t)\,\frac{\varepsilon_N(t)}{a(t)}dt, \tag{15}$$

де $R(x,t)$ — резольвента ядра

$$K(x,t) := A(x,t)+B(x,t)(y(t)+y_n(t))+D(x,t)\cdot(y^2(t)+y(t)y_n(t)+y_n^2(t)),$$

рівняння (14).

З означення резольвенти і за умовою теореми $y, y_n \in S(\rho)$, маємо наступну оцінку для $R(x,t)$:

$$\max_{x,t\in[-h,h]} |R(x,t,y,y_n| \leq M \exp(hM), \tag{16}$$

де величина M визначена у формулі (13).

За нерівністю Буняковського, використовуючи рівність (15) і оцінку (16) перевіряємо нерівність (10):

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{L_p^2} \leq \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2} + \left\|\int\limits_0^x R(x,t)\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}dt\right\|_{L_p^2} \leq$$

$$\leq \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2} + \left\{\frac{2}{\pi h}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\left[\int\limits_0^x R(x,t)\frac{\varepsilon_N(t)}{a(t)}dt\right]^2}{\sqrt{1-(x/h)^2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2}\left[1+\left(\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_0^x R^2(x,t)\frac{\sqrt{1-(t/h)^2}}{\sqrt{1-(x/h)^2}}dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq$$

$$\leq \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2}\left[1+Me^{hM}\left(\int\limits_0^{h}\int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-(t/h)^2}}{\sqrt{1-(x/h)^2}}dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq$$

$$\leq \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2}\left(1+\frac{\pi}{2}hMe^{hM}\right).$$

Нерівність (10) виконана.

Тепер виконаємо заміну у виразі многочлена Чебишова:

$$z = \arccos(t/h).$$

В силу теореми про диференційовність за параметром та формули інтегрування частинами отримаємо оцінку для інтеграла, що стоїть у правій частині (15):

$$\left|\int\limits_0^x R(x,t)\frac{\varepsilon_N(t)}{a(t)}dt\right| = \left|\sum_{i=1}^{N}\tau_{n+i}\int\limits_0^x \frac{R(x,t)}{a(t)}T_{n+i}\left(\frac{t}{n}\right)dt\right| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{N}\frac{\tau_{n+i}}{n+i}\Big[\frac{R(x,h,\cos z)\sin z\sin(n+i)z}{a(h\cos z)}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos\left(\frac{x}{h}\right)} -$$

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos\left(\frac{x}{h}\right)}\sin(n+i)z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R(x,h,\cos z)}{a(h\cos z)}\right)dz\Big]\Big| \leq \sum_{i=1}^{N}\frac{\tau_{n+i}}{n+i}C_1(h,\rho) \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{N}}{n+1} C_1(h,\rho)\|\tau\|, \tag{17}$$

де $C_1(h,\rho)$ — деяка стала, яка не залежать від n і норми:

$$\|\tau\| := \left(\sum_{i=1}^{N} \tau_{n+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Скористаймось тим, що через ортогональність многочленів Чебишова $T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right)$ на проміжку $[-h,h]$ з вагою $\sqrt{1-(x/h)^2}$:

$$\|\tau\| \leq \left[\frac{2}{\pi h}\int\limits_{-h}^{h} \frac{\varepsilon_N(x)dx}{\sqrt{1-(x/h)^2}}\right] \leq \|a(x)\|_C \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_{L_p^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\,\|a(x)\|_C \left\|\frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}\right\|_C. \tag{18}$$

Отже, із (15) і (17)–(18) отримаємо нерівності (11) і (12).

Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. *Слід зазначити, що з нерівностей* (11) *і* (12) *випливає той факт, що наближення $y_n(x)$ розв'язку $y(x)$ близьке до найкращого $E_n(y)$ в $C[-h;h]$ і $L_p^2[-h;h]$.*

Результати обчислювального експерименту. Для реалізації запропонованого алгоритму була обрана наступна задача Коші для рівняння Абеля.

Для рівняння

$$xy'(x) = x^3y^3 + (x-1)y, \quad x \in [1; 6/5], \tag{19}$$

задана початкова умова

$$y(1) = 1. \tag{20}$$

Точним розв'язком задачі (19)–(20) буде

$$\frac{yx}{\sqrt{y^2x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\exp} \cdot \exp(x).$$

Наближений розв'язок на $[1; 6/5]$ будемо шукати у вигляді полінома

$$y_1(x) = c_0 + c_1 \cdot x.$$

Відповідно до загальної схеми алгоритму маємо:

Наближене інтегро-функціональне рівняння (3)

$$xy_1(x) = 1 + \int\limits_{1}^{x} \left[\left(1 + (t-1) + t^3{y_1}^2(t)\right) y_1(t)\right] dt - \varepsilon_{N(x)}, \tag{21}$$

$$N = 6, \quad n + N = 7.$$

Многочлен-нев'язка $\varepsilon_{N(x)}$ має вид:

$$\varepsilon_{N(x)} = \tau_2 T_2(10x-11) + \tau_3 T_3(10x-11) + \tau_4 T_4(10x-11) +$$

$$+\tau_5 T_5(10x-11) + \tau_6 T_6(10x-11) + \tau_7 T_7(10x-11),$$

де многочлени Чебишова змістили на відрізок $[1; 6/5]$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему нелінійних рівнянь відносно невідомих c_0, c_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6, τ_7.

Для знаходження відповідних параметрів можна запропонувати ітераційні схеми розв'язання рівняння (21), в основу яких покладено метод простої ітерації та схеми із роботи Орліца [9] для τ-методу розв'язування на нелінійних диференціальних рівняннях типу Ріккаті.

В результаті маємо (див. [10]):

$$c_0 \approx -1.332, \quad c_1 \approx 2.291, \quad \tau_2 \approx 0.0467, \quad \tau_3 \approx 0.0057,$$

$$\tau_4 \approx 0.00036, \quad \tau_5 \approx 0.000014, \quad \tau_6 \approx 3.0405 \cdot 10^{-7}, \quad \tau_7 \approx 2.6838 \cdot 10^{-9}.$$

Звідси

$$y_1(x) = -1.332297291 + 2.290918678x,$$

— наближений розв'язок задачі (19)–(20), а параметри τ_i $(i = \overline{2,7})$ визначають нев'язку $\varepsilon_{N(x)}$.

На рисунку (1) суцільною лінією позначено точний розв'язок задачі, пунктирною лінією позначено наближений розв'язок.

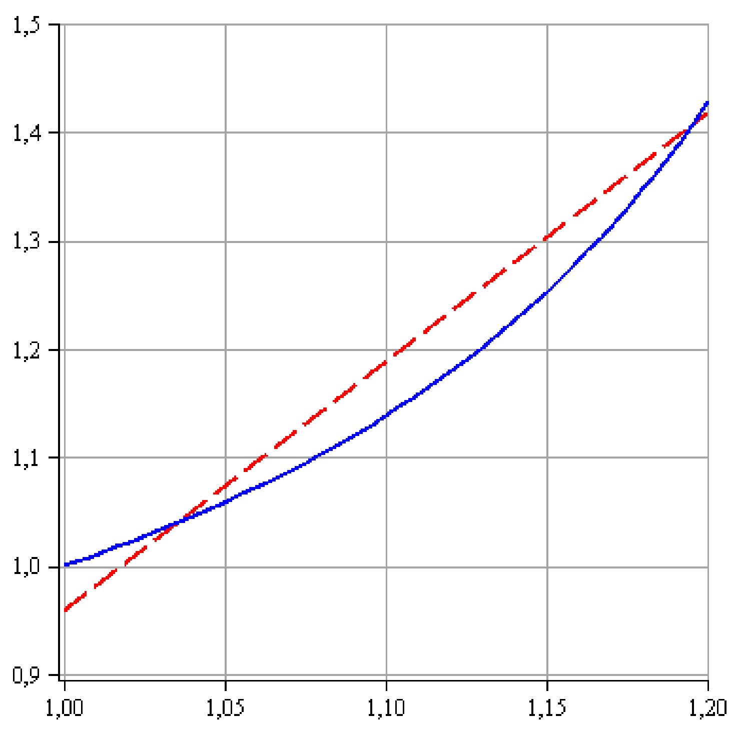

Рис. 1. Точний та наближений розв'язки задачі.

3. Висновки. У роботі сконструйовано та теоретично обґрунтовано алгоритм для побудови поліноміального наближення розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння Абеля на основі апроксимаційного метода В. К. Дзядика.

Сформульовано і доведено теорему про оцінки похибок відповідної задачі на основі запропонованого алгоритму, яка показує оптимальністі в сенсі найкращого поліноміального наближення в рівномірній та квадратичній метриках.

Проведено обчислювальний експеримент на тестовій задачі, результати якого добре ілюструють ефективність та доцільність розв'язування задачі Коші для рівняння Абеля наведеним алгоритмом. Зазначимо також, що вже при малих степенях многочлена алгоритм дає достатньо високу точність для наближення розв'язку задачі.

Список використаної літератури

1. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наукова думка, 1988. 387 с.
2. Гаврилюк И. П., Макаров В. Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2004. 500 с.
3. Бабенко К. И. О явлении насыщения в численном анализе. *Доклады АН СССР.* 1978. Т. 241, № 3. С. 505–508.
4. Сергієнко І. В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності. Київ : Академперіодика, 2010. 293 с.
5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. Киев : Наук. думка, 1986. 584 с.
6. Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Yu., and Stelya O. B. Piecewise Polynomial Algorithms for the Analysis of Processes in Inhomogeneous Media. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, No. 4. P. 636–642. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0064-6.
7. Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Yu. Piecewise-Polynomial Approximations for the Solutions of Impulsive Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2019. Vol. 71, No. 2. P. 190–201. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01638-3.
8. Летичевский А. А., Денисенко П. Н., Биленко В. И., Волков В. А. Реализация численно-аналитических методов приближения функций, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями. *Кибернетика и системный анализ.* 1997. Т. 33, № 1. С. 108–112.
9. Ortiz E. L., Pham Ngoc Dinh A. On the convergence of the tau method for nonlinear differential equations of Riccati's type. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods, Applications* 1985. Vol. 9, No. 1. P. 53–60. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(85)90052-5.
10. Божонок К. В. Ітераційні процедури розв'язування нелінійного диференціального рівняння Абеля на основі a-методу В. К. Дзядика. *Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції.* Київ : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 10–12.

Bozhonok K. V. Algorithm for the Polynomial Approximation of the Abel's Differential Equation Solutions.

The problems of construction and theoretical substantiation of numerical-analytical algorithms for polynomial approximation of the Cauchy problem solutions for Abel's differential equation are considered. The algorithm is based on the Dzyadyk's approximation method for the solution of differential and integral equations, the main idea of which is to construct such an approximate solution that would satisfy the Chebyshov's approximation theorem on the characterization of the best approximation polynomial as accurately as possible. In the paper the a-method is generalized to equations with nonlinearities in the form of polynomials. The theorem on the deviation of the approximate solution from the exact solution of the given Cauchy problem for uniform and quadratic metrics is proved, the estimations of errors are obtained. The algorithm was tested on a test task. The computational experiment illustrates the high efficiency of the proposed algorithm and theoretical results.

Keywords: Polynomial approximation, the best approximation, algebraic-nonlinear equations, Abel's differential equation, optimal algorithms.

References

1. Dziadyk, V. K. (1988). *Approximation Methods to Solve Differential and Integral Equations.* Kyiv: Naukova Dumka [in Russian].
2. Havryliuk, I. P., & Makarov, V. L. (2004). *Strongly Positive Operators and Numerical Algorithms without Accuracy Saturation.* Kyiv: Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine [in Russian].
3. Babenko, K. I. (1978). On the phenomenon of saturation in numerical analysis. *Reports USSR Academy of Sciences,* 241(3), 505–508. [in Russian].
4. Serhiienko, I. V. (2001). *Methods of optimization and system analysis for problems of transcomputational complexity.* Kyiv: Akademperiodika [in Ukrainian].
5. Ivanov, V. V. (1986). *Calculation Methods Using Computers: A Handbook.* Kyiv: Naukova Dumka [in Russian].
6. Bilenko, V. I., Bozhonok, K. V., Dzyadyk, S. Yu., & Stelya, O. B. (2018). Piecewise Polynomial Algorithms for the Analysis of Processes in Inhomogeneous Media. *Cybernetics and Systems Analysis,* 54(4), 636–642. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0064-6.
7. Bilenko, V. I., Bozhonok, K. V., & Dzyadyk, S. Yu. (2019). Piecewise-Polynomial Approximations for the Solutions of Impulsive Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal,* 71(2), 190–201. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01638-3.
8. Letichevskii, A. A., Denisenko, P. N., Bilenko, V. I., & Volkov, V. A. (1997). Implementation of numerical-analytical approximation methods for functions defined by ordinary differential equations. *Cybernetics and Systems Analysis,* 33(1), 108–112. [in Russian].
9. Ortiz, E. L., & Pham Ngoc Dinh, A. (1985). On the convergence of the tau method for nonlinear differential equations of Riccati's type. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods, Applications,* 9(1), 53–60. https://doi.org/10.1016/0362-546X(85)90052-5.
10. Bozhonok, K. V. (2023). Iterative procedures for solving Abel's nonlinear differential equation based on V. K. Dziadyk's a-method. *Actual problems of physics, mathematics, informatics and their teaching methods: Proceedings from '23.* Kyiv: Mykhailo Drahomanov State University. 10–12. [in Ukrainian].

Одержано 25.04.2023