УДК 519.4
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).79-89

Н. М. Самарук

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Аспірантка Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
samaruk.nat@khmnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4611-8528

КВАЗІ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПРОСТОРУ

Нехай H — підгрупа просторової афінної групи Aff(3), яка розглядається разом з природною дією на дійсному векторному просторі многочленів від трьох змінних. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ називається квазі-мономіальною відносно H, якщо групові оператори в двох різних базах $x^m y^n z^k$ та $B_{m,n,k}(x,y,z)$ мають *ідентичні* матриці. В даній статті ми отримали критерій квазі-мономіальності для випадку, коли група H є підгрупою масштабувань або підгрупою паралельних перенесеннь в термінах експоненціальної породжуючої функції для сім'ї многочленів $B_{m,n,k}(x,y,z)$.

Ключові слова: квазі-мономи, афінна група простору, група масштабування, група паралельних перенесень, експоненціальна породжуюча функція.

1. Вступ. Нехай H є підгрупою просторової афінної групи Aff(3), яка розглядається разом з природною дією на векторному просторі многочленів з трьома змінними. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ називається *квазі-мономіальною* відносно H, якщо оператори групи в двох різних базисах $x^m y^n z^k$ та $B_{m,n,k}(x,y,z)$ мають *ідентичні* матриці. У цьому випадку многочлени $B_{m,n,k}(x,y,z)$ називаються *квазі-мономами*. Останнім часом квазі-мономіальні сім'ї многочленів знайшли широке застосування в аналізі 2D та 3D зображень. Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно виділити такі *ознаки* зображень, які залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. Такими перетвореннями є обертання, паралельні перенесення, масштабування та композиція цих перетворень, див. [1]. Відповідні інваріантні ознаки для 2D зображень були вперше представлені у статті [2] та називаються *геометричними моментними інваріантами*. Проте, ці моментні інваріанти конструювалися у стандартному поліноміальному базисі $\{x^m y^n\}$, що спричиняло практичні труднощі через обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки значення $x^m y^n$ швидко зростають зі збільшенням розміру зображення. Перехід до інших базисів, особливо до базисів із класичних дискретних ортогональних многочленів, вирішив проблему нестабільності. Але тепер виникла нова проблема знаходження явних виразів для моментних інваріантів, які змінилися із зміною базису. Знаходження виразів для моментних інваріантів в новому базису стикається з великими технічними труднощами і задовільно вирішується лише для деяких часткових випадків, див. [3].

Проте, відносно недавно, в статті [4] автори довели, що в базисі $\{H_m(x)H_n(y)\}$, де $H_n(x)$ — класичні ортогональні многочлени Ерміта, вирази для $SO(2)$-інваріантних моментів виявилися ідентичними відомим виразам для $SO(2)$-інваріантних геометричних моментів в базисі $\{x^m y^n\}$. Таким чином, ця несподівана властивість многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислювати моменти зображення, інваріантні відносно групи обертань площини $SO(2)$.

У статті [5] ці ідеї були розвинуті, і отримано повний опис усіх сімей многочленів в термінах їхніх породжуючих функцій, які володіють цією властивістю, яка була названа властивістю квазі-мономіальності відносно групи обертань площини $SO(2)$. У роботі [6] поняття квазі-мономімальності було поширено на довільну підгрупу H афінної групи площини $\mathrm{Aff}(2)$, та отримано опис квазімономів для випадку, коли група H генерується масштабуванням та паралельними перенесеннями площини, а також їхніми композиціями, в тому числі з обертаннями.

У цій статті ми продовжуємо цей напрям досліджень і пропонуємо опис, всіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп масштабування та паралельних перенесень афінної групи простору $\mathrm{Aff}(3)$. Випадок групи обертань простору розглядався в [7]. В статті встановлено необхідні і достатню умови, для того, щоб сім'я многочленів буде квазімономіальною відносно підгруп масштабування або паралельних перенесень. Крім того, ми встановлюємо умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

2. Квазі-мономи відносно групи масштабування простору. Група масштабування простору є трипараметричною групою перетворень тривимірного простору, які масштабують координати точок незалежно за осями x, y та z відповідно до коефіцієнтів масштабування s, t та r. Масштабування може збільшувати або зменшувати об'ємні фігури та відстані між точками, але зберігає відносні пропорції фігур.

Формула для масштабування простору може бути записана як:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

де (x, y, z) — координати початкової точки, (x', y', z') — координати точки після масштабування, а s, t та r — коефіцієнти масштабування вздовж відповідних осей. Група масштабування простору діє операторами $T_{s,t,r}$ на функції таким чином:

$$T_{s,t,r}(f(x, y, z)) = f(sx, ty, rz), s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, для мономів ми маємо

$$T_{s,t,r}(x^m y^n z^k) = t^m s^n r^k x^m y^n z^k.$$

Нас цікавлять сім'ї многочленів, на які оператори групи $T_{s,t,r}$ діють аналогічним чином.

Означення 1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається квазі-мономіальною відносно групи масштабування простору, якщо дія групи на ці многочлени збігається з дією групи на стандартні мономи, тобто виконується тотожність*

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z), \tag{1}$$

для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$.

Наступна теорема описує всі сім'ї многочленів які є квазі-мономіальними відносно групи масштабування простору в термінах породжуючої функції:

Теорема 1. *Сім'я многочленів* $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$*, визначена експоненційною породжуючою функцією*

$$G=\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабування простору тоді і тільки тоді коли G *є функцією від трьох змінних* xu, yv *і* zw :

$$G=G\left(xu,yv,zw\right).$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Припустимо, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ задовольняє умову (1). Спочатку доведемо, що у цьому випадку многочлени $B_{m,n,k}(x,y,z)$ для всіх індексів m,n,k задовольняють таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x}=m\,B_{m,n,k}(x,y,z),\\ y\dfrac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y}=n\,B_{m,n,k}(x,y,z),\\ z\dfrac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial z}=k\,B_{m,n,k}(x,y,z).\end{cases}$$

Справді, продиференціюємо тотожність (1) по змінній s:

$$x\frac{\partial B_{m,n,k}(sx,ty,rz)}{\partial x}=ms^{m-1}t^nr^kB_{m,n,k}(x,y,z).$$

Поклавши $s=1,t=1,r=1$ отримаємо

$$x\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x}=mB_{m,n,k}(x,y,z).$$

Аналогічно, послідовними диференціюванням по t та по r виводяться друга та третя тотожності.

Враховуючи першу доведену тотожність, отримаємо

$$x\frac{\partial G}{\partial x}=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}\left(x\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x}\right)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}mB_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}=$$

$$=u\sum_{m,n,k=0}^{\infty}B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}=u\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Аналогічно знаходимо, що мають місце рівняння

$$y\frac{\partial G}{\partial y}=v\frac{\partial G}{\partial v},$$

і

$$z\frac{\partial G}{\partial z} = w\frac{\partial G}{\partial w}.$$

Отже, породжуюча функція G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial G}{\partial x} = u\dfrac{\partial G}{\partial u}, \\ y\dfrac{\partial G}{\partial y} = v\dfrac{\partial G}{\partial u}, \\ z\dfrac{\partial G}{\partial z} = w\dfrac{\partial G}{\partial w}. \end{cases} \tag{2}$$

Система з трьох диференціальних рівнянь, для функції від шести змінних, не може мати більше трьох функціонально незалежних розв'язків, див. [8]. Однак, xu, yv і zw є очевидно є функціонально незалежними розв'язками. Отже, G повинна бути функцією лише від змінних xu, yv і zw.

($\Longleftarrow$) Тепер доведемо зворотну імплікацію. Нехай

$$G(x, y, z, u, v, w) = G(xu, yv, zw).$$

Доведемо, що $B_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє умову (1):

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Зауважимо, що, оскільки

$$G(sxu, tyv, rzw) = G(x(su), y(tv), z(rw)),$$

то функція G задовольняє тотожність

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = G(x, y, z, su, tv, rw).$$

Тепер, з одного боку ми маємо

$$G(sx, ty, rz, u, v, z) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!},$$

а з іншого боку:

$$G(sx, ty, rz, u, v, z) = G(x, y, z, su, tv, rw) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z)\frac{(su)^m}{m!}\frac{(tv)^n}{n!}\frac{(rw)^k}{k!}.$$

Порівнюючи ліву і праву частини отримуємо

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z)\frac{(su)^m}{m!}\frac{(tv)^n}{n!}\frac{(rw)^k}{k!}.$$

Прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів u і v, знаходимо, що

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

як і вимагалося.

□

2.1. Квазімономи відносно групи рівномірних масштабувань. Розглянемо частковий випадок групи *рівномірних* маштабувань простору, тобто таких перетворень простору

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \\ z' = sz. \end{cases}$$

Многочлени $B_{m,n,k}(x,y,z)$ назвемо квазімономами відносно групи рівномірних розтягів, якщо виконується тотожність:

$$B_{m,n}(sx,sy,sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x,y,z).$$

Наступна теорема дає повний опис таких многочленів у термінах породжуючих функцій.

Теорема 2. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ визначена експоненціальною породжуючою функцією*

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \frac{w^k}{k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних розтягів простору тоді і тільки тоді коли G є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Диференціюючи по s тотожність

$$B_{m,n}(sx,sy,sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x,y,z),$$

і поклавши $s = 1$ отримуємо таке диференціальне рівняння

$$x\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} + y\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,y)}{\partial y} + z\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,y)}{\partial z} = (m+n+k)B_{m,n,k}(x,y.z).$$

Тоді, аналогічно як при доведеннні Теореми 1 знаходимо, що породжуюча функція G задовольняє таке рівняння

$$x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} + z\frac{\partial G}{\partial z} = u\frac{\partial G}{\partial u} + v\frac{\partial G}{\partial v} + w\frac{\partial G}{\partial w}.$$

Це рівняння не може мати більше п'яти функціонально незалежних розв'язків, які ми можемо вказати явно: $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$. Тому, породжуюча функція є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$.

Достатність доводиться аналогічно як в Теоремі 1.

□

3. Квазі-многочлени відносно групи паралельних перенесень простору. Трипараметрична група трансляцій простору породжується паралельними перенесеннями такої форми

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Ця група діє на функції операторами зсуву $T_{a,b,c}$ наступним чином:

$$T_{a,b,c}(f(x,y,z)) = f(x+a, \ +b, z+c), a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$(x+a)^m(y+b)^n(z+c)^k = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{k}{l}x^iy^jz^la^{m-i}b^{n-j}c^{k-l},$$

то ми приходимо до такого означення

Означення 2. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ називається квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору, якщо виконується наступна тотожність*

$$B_{m,n,k}(x+a, y+b, z+c) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{k}{l}a^{m-i}b^{n-j}c^{k-l}B_{i,j,l}(x,y,z), \tag{3}$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 3. *Сім'я многочленів $B_{m,n,k}(x,y,z)$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд*

$$G = C(u,v,w)e^{xu+yv+zw},$$

де $C(u,v,w)$ — довільний степеневий ряд від змінних u, v, w.

Доведення. ($\Longrightarrow$) Спочатку диференціюємо (3) по a при $a = 0$ та $b = 0$, $c = 0$. Отримуємо диференціальне рівняння на $B_{m,n,k}(x,y,z):$

$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} = mB_{m-1,n,k}(x,y,z).$$

Аналогічно, диференціюючи по b та по c, отримуємо два інших диференціальних рівняння на $B_{m,n,k}(x,y,z):$

$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} = nB_{m,n-1,k}(x,y,z),$$
$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial z} = kB_{m,n,k-1}(x,y,z).$$

Взявши до уваги першу тотожність ми маємо

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x}\right) \frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} m B_{m-1,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!} =$$

$$= u\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m-1,n,k}(x,y,z)\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!} = u\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!} = uG.$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\frac{\partial G}{\partial y} = vG \text{ і } \frac{\partial G}{\partial z} = wG.$$

Отже, G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = uG, \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial y} = vG, \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial z} = wG, \end{cases} \tag{4}$$

Ця проста система диференціальних рівнянь першого порядку має такий розв'язок

$$G = C(u,v,w)e^{xu+yv+zw},$$

де C — довільна функція від u, v, w. Оскільки G є степеневим рядом, то $C(u,v,w)$ також степеневий ряд від змінних u, v, w.

$\Longleftarrow$ Припустимо тепер, що породжуюча функція для сім'ї многочленів $B_{m,n,k}(x,y,z)$ має вигляд

$$G = C(u,v,w)e^{xu+yv+zw}.$$

Для оператора зсуву маємо

$$T_{a,b,c}(xu+yv+zw) = au+vb+cw+ux+vy+zw.$$

З одного боку,

$$T_{a,b,c}(G) = T_{a,b,c}\left(\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}\right) =$$

$$= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x,y,z))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}.$$

З іншого боку

$$T_{a,b,c}(G) = C(u,v,w)T_{a,b,c}\left(e^{xu+yv+zw}\right) = C(u,v,w)e^{au+vb+cw+ux+vy+zw} =$$

$$= e^{au+vb+cw}G = \left(\sum_{i,j,l=0}^{\infty} a^i b^j c^l \frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!}\frac{w^l}{l!}\right)\left(\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}\right) =$$

$$= \sum_{m,n,k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{k}{l} a^{m-i}b^{n-j}c^{k-l}B_{i,j,l}(x,y,z)\right)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!}.$$

Порівнюючи коефіцієнти однакових степенів u та v, ми отримуємо, що

$$T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x,y,z)) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{k}{l}a^{m-i}b^{n-j}c^{k-l}B_{i,j,l}(x,y,z).$$

Отже, многочлени $B_{m,n,k}(x,y,z)$ є квазі-мономами відносно групи паралельних перенесень простору.

□

Властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени нормалізуються, тобто множаться на деякі константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочленів при обчисленнях. Наступна теорема встановлює, який тип нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

Теорема 4. *Нехай $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ – квазі-мономіальна сім'я відносно групи паралельних перенесень простору. Сім'я $\{\widetilde{B}_{m,n}(x,y)\}$, де*

$$\widetilde{B}_{m,n,k}(x,y,z) = \alpha_{m,n,k}B_{m,n,k}(x,y,z),$$

буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли кожний коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є функцією ϕ, від одніеї змінної $m+n+k$, яка задовольняє таке рекурентне співвідношення:

$$\phi(m+n+k) = \phi(m+n+k-1).$$

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Оскільки виконується

$$\frac{\partial\widetilde{B}_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} = m\widetilde{B}_{m-1,n,k}(x,y),$$
$$\frac{\partial\widetilde{B}_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} = n\widetilde{B}_{m,n-1}(x,y),$$
$$\frac{\partial\widetilde{B}_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial z} = k\widetilde{B}_{m,n,k-1}(x,y),$$

то ми маємо

$$\alpha_{m,n,k}\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} = m\alpha_{m-1,n,k}B_{m-1,n,k}(x,y,z),$$
$$\alpha_{m,n,k}\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} = n\alpha_{m,n-1,k}B_{m,n-1,k}(x,y,z),$$
$$\alpha_{m,n,k}\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial z} = k\alpha_{m,n,k-1}B_{m,n,k-1}(x,y,z),$$

Ми отримуємо наступну систему рекурентних рівнянь для послідовності $\alpha_{m,n}$:

$$\begin{cases}\alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k},\\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k},\\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}.\end{cases}$$

Легко помітити, що розв'язок системи має вигляд $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$, де ϕ — довільна функція. Справді, розглянемо довільний індекс (m, n, k). Ми можемо досягти індексу $(0, 0, m + n + k)$ через послідовність перетворень, як показано нижче. Спочатку зменшуємо m, збільшуючи n, доки $m = 0$: $\alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{m,n,k}$. Потім зменшуємо n, збільшуючи k, доки $n = 0$: $\alpha_{0,0,m+n+k} = \alpha_{0,n+m,k}$.

В результаті маємо:

$$\alpha_{m,n,k} = \alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{0,0,m+n+k}.$$

Тепер можемо визначити функцію $\phi(x) = \alpha_{0,0,x}$. Тоді $\alpha_{m,n,k} = \phi(m + n + k)$, що показує, що будь-який розв'язок системи є функцією однієї змінної, $m+n+k$.

Підставимо розв'язок $\alpha_{m,n,k} = \phi(m + n + k)$ у перше рівняння і отримуємо необхідне рекурентне співвідношення $\phi(m + n + k) = \phi(m + n + k - 1)$.

($\Longleftarrow$) Тепер доведемо обернену імплікацію. Нехай $\alpha_{m,n,k} = \phi(m + n + k)$ і $\phi(m + n + k) = \phi(m + n + k - 1)$, тоді очевидно виконуються умови

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{cases}$$

Звідси

$$\frac{\partial \widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \\ = m\alpha_{m-1,n,k} B_{m-1,n,k}(x, y, z) = m\widetilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно отримуємо

$$\frac{\partial \widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n\widetilde{B}_{m,n-1,k}(x, y, z) \text{ і } \frac{\partial \widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k\widetilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z).$$

Отже, породжуюча функція для сім'ї многочленів $\widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє умови Теореми 3 і сім'я многочленів $\widetilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору.

□

3.1. Рівномірні паралельні перенесення. Для часткового випадку рівномірних паралельних перенесень $T_{a,a,a} = T_a$:

$$T_a(x) = x + a, T_a(y) = y + a, T_a(z) = z + a,$$

справедливе наступне твердження:

Теорема 5. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд*

$$C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де C — довільний степеневий ряд від змінних $x - y, x - z, u, v, w$.

Доведення. Умова квазімономіальності (3) прийме вигляд

$$B_{m,n,k}(x+a, y+a, z+a)(x,y,z) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x,y,z),$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Диференціюємо цю тотожність по a в $a = 0$ знаходимо

$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial z} =$$
$$= mB_{m-1,n,k}(x,y,z) + nB_{m,n-1,k}(x,y,z) + kB_{m,n,k-1}(x,y,z).$$

Аналогічно отримаємо диференціальне рівняння на породжуючу функцію

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} = (u+v+w)G.$$

Можна показати, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$G = C(x-y, x-z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

Достатність доводиться аналогічно доведенню достатності в Теоремі 3.

□

Виникає природне питання — чи існують сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними одночасно відносно групи масштабування і відносно групи паралельних перенесень? Породжуюча функція для таких многочленів мала би бути одночасним розв'язком систем диференціальних рівнянь (2) і (4). Можна показати, що єдиним розв'язком цих систем рівнянь, з точністю до сталого множника, є функція $e^{xu+yv+zw}$. Але вона є експоненціальною породжуючою функцією стандартних мономів $x^m y^n z^k$ і ми не отримуємо ніяких нових сімей многочленів.

4. Висновки. У статті досліджено квазі-мономіальні сім'ї многочленів від трьох змінних, які є інваріантними відносно підгруп масштабування та паралельних перенесень афінної групи простору Aff(3). Встановлено необхідні і достатні умови, щоб сім'я многочленів була квазі-мономіальною відносно цих підгруп. Ми також розглянули умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Хоча отримані результати містять самостійний математичний інтерес, вони можуть бути використані для розвитку алгоритмів машинного навчання для розпізнавання та класифікації зображень, що залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. В майбутньому можна провести дослідження властивостей квазі-мономіальних сімей многочленів відносно інших підгруп афінної групи простору.

Список використаної літератури

1. Flusser J., Suk T., Zitová B. 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley and Sons, 2017.
2. Hu M. K. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Transactions on Information Theory.* 1962. Vol. 8, No. 2. P. 179–187.

3. Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R. Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition.* 2004. Vol. 37, No. 1. P. 119–129.
4. Yang B., Li G., Zhang H., Dai M. Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters.* 2011. Vol. 32, No. 2. P. 1283–1298.
5. Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition.* 2022. Vol. 127. P. 108–607.
6. Samaruk N. M. Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. *Matematychni Studii.* 2022. Vol. 59, No. 1. P. 3–11.
7. Flusser J., Suk T., Bedratyuk L., Karella T. Non-separable moments in 3D. *In: 20th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP),* Limassol, Cyprus, September 25–30, 2023.
8. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion : Teubner Verlag, 1979.

Samaruk N. M. Quasi-monomials with respect to subgroups of the space affine group.

Let H be a subgroup of the space affine group Aff(3) considered with the natural action on the real vector space of three variable polynomials. The polynomial family $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ is called quasi-monomial with respect to H if the group operators in two different bases $\{x^m y^n z^k\}$ and $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ have *identical* matrices. We obtain a criterion of quasi-monomiality for the case when the group H is generated by scalling and translations in terms of exponential generating function for the polynomial family $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$.

Keywords: quasi-monomials, space affine group, scalling group, translation group, exponential generating function.

References

1. Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2017). *2D and 3D Image Analysis by Moments.* John Wiley and Sons.
2. Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory,* 8(2), 179–187.
3. Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2004). Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition,* 37(1), 119–129.
4. Yang, B., Li, G., Zhang, H., & Dai, M. (2011). Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters,* 32(2), 1283–1298.
5. Bedratyuk, L., Flusser, J., Suk, T., Kostkova, J. & Kautsky, J. (2022). Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*, 127, 108–607.
6. Samaruk, N. M. (2022). Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. *Matematychni Studii,* 59(1), 3–11.
7. Flusser, J., Suk, T., Bedratyuk, L., & Karella, T. (2023). Non-separable moments in 3D. In: 20th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP), Limassol, Cyprus.
8. Kamke, E. (1979). *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion.* Teubner Verlag.

Одержано 30.04.2023