УДК 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).216-226

О. Ю. Червак-Смерічко

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри економіки і підприємництва,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
olesya.chervak@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6891-7307

ЛЕКСИКОГРАФІЧНА ЗГОРТКА БАГАТЬОХ КРИТЕРІЇВ ЯК НАДКРИТЕРІЙ ЇХ ПАРЕТІВСЬКОЇ ЗГОРТКИ

В статті розглядається лексикографічна згортка багатьох критеріїв в один векторний критерій. Ця згортка одержана на основі умови попарної різної важливості критеріїв. Також розглянута відповідна лексикографічній згортці критеріїв задача відшукання альтернативи, оптимальної в ній, — задача лексикографічної оптимізації.

В статті доведено, що лексикографічна згортка багатьох критеріїв є надкритерієм паретівської згортки критеріїв. На основі цього доведення показано, що розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською згорткою зводиться до розв'язання задач лексикографічної оптимізації. Розглянуто також лексикографічне лінійне програмування і побудована двоїста задача, як задача лінійного програмування з векторними змінними і доведені теореми двоїстості. Описано варіант симплексного алгоритму стосовно задачі лексикографічного лінійного програмування.

Ключові слова: лексикографічна згортка багатьох критеріїв, векторний критерій, надкритерій паретівської згортки критеріїв.

1. Вступ. Розв'язання сучасних проблем в економіці неможливе без застосування моделей, які описують сприйняття людиною навколишньої дійсності. До таких моделей відносяться багатокритеріальні моделі, структура яких визначається набором найбільш суттєвих критеріїв та зв'язків між ними. Клас проблем, який описується такими моделями, є найбільш поширеним на практиці, а їх вирішення найбільш складними.

Властивостям і методам розв'язування багатокритеріальних задач оптимізації, лексикографічної оптимізації, присвячено багато наукових праць, число яких нараховує уже декілька сотень найменувань. Так в праці [1] розглядається метод знаходження оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічної багатокритеріальної оптимізації шляхом зведення її до однокритеріальної з скалярною цільовою функцією. Праця [2] присвячена розгляду симплексного алгоритму для багатокритеріальної лексикографічної задачі лінійного програмування та його удосконалення. [3] присвячена розробці та обґрунтуванню математичних моделей та обчислювальних методів розв'язання векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних множинах. В [4] встановлено умови існування розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою множиною допустимих розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини, конусу, що лексикографічно впорядковує її відносно критеріїв оптимізації. Саме в праці [5] введено поняття надкритерію будь-якого критерію і побудовано окремі надкритерії паретівської згортки критеріїв. Праця [6] присвячена розгляду моделей, в яких множина альтернатив, на якій необхідно здійснити вибір, впорядковується за визначеним порядком віддачі переваги. Якщо на множині альтернатив задається багато порядків віддачі переваги, то вони згортаються в один єдиний порядок за допомогою додаткових умов підпорядкованості одних порядків іншим.

2. Постановка задачі. Метою дослідження є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю. Для цього, кожна з цих задач формулюється як задача з векторним критерієм, значення якого відповідно впорядковується, тобто на множині альтернатив визначається відповідний порядок віддачі переваги. Якщо цей порядок є повним порядком, то відповідна задача є задачею лексикографічної оптимізації, яка розв'язується відомими методами. Якщо порядок віддачі переваги є частковим порядком, то відповідна задача розв'язується шляхом заміни її однією або багатьма задачами, порядок віддачі переваги в яких є повним порядком на множині альтернатив, отже, кожна з них є або задачею лексикографічної оптимізації, або задачею скалярної оптимізації.

3. Лексикографічна згортка багатьох критеріїв як надкритерій їх паретівської згортки. Розглядаються критерії

$$c_j,\ j=1,2,\ldots,k. \tag{1}$$

Їх лексикографічна згортка базується на строгому ранжируванні. Нехай, j_1-ий критерій має найвищий ранг, j_2-ий критерій має нижчий за нього ранг, і т.д., j_k-ий критерій має найнижчий ранг. Тоді, альтернатива $\mathbf{x}$ вважається *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) > c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$
$$c_{j_2}(\mathbf{x}) > c_{j_2}(\mathbf{y}),$$

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$
$$c_{j_2}(\mathbf{x}) = c_{j_2}(\mathbf{y}),$$
$$c_{j_3}(\mathbf{x}) > c_{j_3}(\mathbf{y}),$$

або і т.д., або

$$c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y}), j = j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$$
$$c_{j_k}(\mathbf{x}) > c_{j_k}(\mathbf{y}).$$

Альтернатива $\mathbf{x}$ вважається *рівноцінною* альтернативі $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y}),\ j=1,2,\ldots,k$. Інакше, альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо значення $(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \ldots, c_{j_k}(\mathbf{x}))$ векторного критерію $\mathbf{c} = (c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_k})$ *лексикографічно більше* за значення $(c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \ldots, c_{j_k}(\mathbf{y}))$ цього векторного критерію, (в подальшому, відношення *лексикографічно більше* позначатимемо через $>^L$). Альтернатива $\mathbf{x}$ *рівноцінна* альтернативі $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо

$$(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \ldots, c_{j_k}(\mathbf{x})) = (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \ldots, c_{j_k}(\mathbf{y})).$$

Число всіх різних ранжирувань критеріїв (1) дорівнює числу перестановок індексів $1, 2, \ldots, k$, яке рівне $k!$. Отже, з цих критеріїв можна утворити $k!$ різних їх лексикографічних згорток. Паретівська згортка цих критеріїв єдина, бо вона не залежить від впорядкування цих критеріїв, так як її основою є попарна рівноважливість критеріїв. Основою ж лексикографічної згортки, в якій критерії ранжируються, є попарна їх різноважливість [6, с. 102–108].

Припустимо, що критерії (1) ранжировані в порядку зростання їх номерів: A_1 має найвищий ранг, A_2 має ранг, нижчий за ранг критерію A_1, і так далі, A_k має найнижчий ранг.

Отже, альтернатива $\mathbf{x}$ є *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^L \mathbf{c}(\mathbf{y})$, і альтернатива $\mathbf{x}$ *рівноцінна* альтернативі $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{y})$.

Таким чином, лексикографічна згортка критеріїв (1) є критерієм, який визначається шкалою як множиною векторних оцінок R^k, впорядкованою за допомогою відношення *лексикографічно більше*, і векторною критеріальною функцією $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$.

Лексикографічне впорядкування в R^k є повним впорядкуванням, тому непокращуване значення векторного критерію $\mathbf{A}$ єдине (назвемо його лексикографічним максимумом множини !) [6, с. 102–108].

Отже, якщо $\mathbf{A}^*$ є лексикографічним максимумом векторної функції $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ на множині X, то множиною оптимальних альтернатив в цій лексикографічній згортці є підмножина допустимих альтернатив, у яких векторна функція $\mathbf{A}$ досягає значення $\mathbf{A}^*$: $X_* = \{\mathbf{x} \in X | \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^*\}$.

Знаходження альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці критеріїв (1), зводиться до розв'язання k однокритеріальних задач оптимізації.

Покрокова схема цього зведення виглядає так:

1-ий крок. Розв'язується задача

$$\max c_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X. \tag{2}$$

Якщо задача (2) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці не існує.

Нехай A_1^* є максимумом критерію $c_1(\mathbf{x})$ на: $X_2 = \{\mathbf{x} \in X | c_1(\mathbf{x}) = c_1^*\}$. Тоді переходимо до другого кроку.

2-ий крок. Розв'язується задача

$$\max c_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X_2. \tag{3}$$

Якщо задача (3) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці також не існує.

Нехай A_2^* є максимумом критерію $A_2(\mathbf{x})$ на X_2: $X_3 = \{\mathbf{x} \in X_2 | c_2(\mathbf{x}) = c_2^*\}$. Тоді переходимо до третього кроку. І так далі.

k-ий крок. Розв'язується задача

$$\max c_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X_{k-1}. \tag{4}$$

.

Якщо задача (4) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці не існує.

Нехай A_k^* є максимумом критерію $c_k(\mathbf{x})$ на X_{k-1}: $X_k^* = \{\mathbf{x} \in X_{k-1} | c_k(\mathbf{x}) = c_k^*\}$. Тоді X_k^* є множиною оптимальних альтернатив в лексикографічній згортці критеріїв (1).

Очевидно, описана схема, яку ми назвемо *схемою скаляризації*, дає можливість знаходити множину всіх альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці критеріїв (1).

Множини альтернатив, оптимальних в різних лексикографічних згортках критеріїв (1) є, взагалі кажучи, різними підмножинами допустимої множини X (число цих підмножин рівне $k!$) [2, с. 1–3].

Теорема 1. *Нехай критерії* (1) *ранжировані в порядку* $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_k}$ *Тоді відповідна їм лексикографічна згортка на множині* X *є надкритерієм їх паретівської згортки на* X.

Доведення. Нехай $\mathbf{x} \in X$ *краща* $\mathbf{y} \in X$ в паретівській згортці критеріїв (1). Тоді виконуються нерівності

$$c_j(\mathbf{x}) \geq c_j(\mathbf{y}), \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{5}$$

і існує t, $1 \leq t \leq k$, таке, що виконується строга нерівність

$$c_t(\mathbf{x}) > c_t(\mathbf{y}). \tag{6}$$

Нехай r $(1 \leq r \leq k)$ — найменший індекс, такий, що $c_{j_r}(\mathbf{x}) > c_{j_r}(\mathbf{y})$. Тоді, якщо $r = 1$, то

$$(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \ldots, c_{j_k}(\mathbf{x})) >^L (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \ldots, c_{j_k}(\mathbf{y})).$$

Якщо ж $r > 1$, то з нерівностей (5) випливає, що $c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y})$, $c_{j_2}(\mathbf{x}) = c_{j_2}(\mathbf{y})$, …, $c_{j_{r-1}}(\mathbf{x}) = c_{j_{r-1}}(\mathbf{y})$.

Отже, $(c_{j_1}(\mathbf{x})$, $c_{j_2}(\mathbf{x})$, …, $c_{j_k}(\mathbf{x})) >^L (c_{j_1}(\mathbf{y})$, $c_{j_2}(\mathbf{y})$, …, $c_{j_k}(\mathbf{y}))$ (існування номера r, $1 \leq r \leq k$, випливає з існування строгої нерівності (6)).

Таким чином, якщо $\mathbf{x}$ *краща* за $\mathbf{y}$ в паретівській згортці, то $\mathbf{x}$ *краща* за $\mathbf{y}$ і в будь-якій розглядуваній лексикографічній згортці критеріїв (1), звідки, за означенням надкритерію [5, с. 102–108], ця лексикографічна згортка є надкритерієм паретівської згортки критеріїв (1). Теорема доведена.

Ця теорема дає можливість зводити відшукання альтернатив, оптимальних в паретівській згортці критеріїв (1), до відшукання альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці цих критеріїв [5, с. 102–108] .

4. Лексикографічне лінійне програмування. Задача відшукання альтернативи $\mathbf{x}_* \in X$, оптимальної в лексикографічній згортці L критеріїв (1), розв'язується за схемою скаляризації.

Коротко, цю задачу записуватимемо так:

$$\max{}^L c(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X. \tag{7}$$

Називатимемо її *задачею лексикографічної максимізації*, або задачею лексикографічної максимізації векторної функції $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (c_1(\mathbf{x}), c_2(\mathbf{x}), \ldots, c_k(\mathbf{x}))$ на допустимій множині X.

Альтернатива $\mathbf{x}_* \in X$, така, що лексикографічна нерівність

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_*) \geq^L \mathbf{c}(\mathbf{x}), \tag{8}$$

виконується для всіх $\mathbf{x} \in X$, називається оптимальним розв'язком цієї задачі, а значення $\mathbf{A}_* = \mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$ – лексикографічним максимумом функції на X.

Аналогічно, формулюється й задача *лексикографічної мінімізації* векторної функції $\mathbf{A}$ на X, яку, коротко, записуватимемо так:

$$\min{}^L \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X. \tag{9}$$

Очевидно, що задача (9) зводиться до задачі лексикографічної максимізації векторної функції $-\mathbf{A}(\mathbf{x})$ на X, так як лексикографічна нерівність $\mathbf{c}(\mathbf{x}_*) \leq^L \mathbf{c}(\mathbf{x})$ рівносильна лексикографічній нерівності $-\mathbf{c}(\mathbf{x}_*) \geq^L -\mathbf{c}(\mathbf{x})$. Тому, достатньо розглядати тільки задачу (7).

Схема скаляризації, викладена вище є загальним способом розв'язання цієї задачі; вона базується на методах розв'язання однокритеріальних задач максимізації. Але, якщо критерії (1), які складають векторну функцію $\mathbf{c}(\mathbf{x})$, є лінійними функціями на $\mathbb{R}^n$, а допустима множина X задається за допомогою лінійних обмежень, то маємо задачу *лексикографічного лінійного програмування*, частинним випадком якої є звичайна задача лінійного програмування як задача однокритеріальної максимізації лінійної функції на допустимій множині X, заданої системою лінійних обмежень [3, с. 192–203].

Нехай, лінійні критеріальні функції (1) мають вигляд:

$$c_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \tag{10}$$

допустима множина $X \subset \mathbb{R}^n$ задається за допомогою лінійних обмежень-рівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{qj} x_j = a_{q0}, \quad q = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

і умов невід'ємності змінних x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Векторну лінійну функцію, складену з критеріїв (10), запишемо у формі:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{\boldsymbol{j}} x_j, \tag{13}$$

де

$$\mathbf{c}_{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \cdots \\ c_{kj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

— задані вектори.

Систему лінійних обмежень (11) запишемо у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{\boldsymbol{j}} x_j = \mathbf{a}_{\mathbf{0}}, \tag{14}$$

де

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

— задані вектори, а умову (12) у вигляді:

$$\mathbf{x} \geq^P \mathbf{0}, \tag{15}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор невідомих, а $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ — нульовий вектор.

Отже, розглядаємо задачу лексикографічної максимізації векторної функції (13) на множині $X \subset \mathbb{R}^n$, яка задається обмеженнями (14) і (15) [3, с. 192–203].

Легко показати, якщо функція (13) досягає на X лексикографічного максимума, то цей максимум досягається хоча б в одній крайній точці опуклої багатогранної множини X, або, інакше, цей максимум досягається хоча б в одному базисному допустимому розв'язку системи лінійних рівнянь (14). (Базисним допустимим розв'язком цієї системи, що визначається будь-якою її канонічною формою, назвемо такий розв'язок, у якого всі невідомі приймають невід'ємні значення, а невідомі, які є незалежними в даній канонічній формі, приймають нульові значення) [2, с. 1–3].

Таким чином, вище наведену задачу можна розв'язувати за допомогою направленого перебору базисних допустимих розв'язків системи рівнянь (14), так як локальний лексикографічний максимум векторної лінійної функції на опуклій багатогранній множині є й глобальним її лексикографічним максимумом на цій множині.

Отже, розв'язання цієї задачі може бути здійснене за допомогою схеми симплексного алгоритму. Опишемо зміст загального кроку цієї схеми.

Припустимо, що система рівнянь (14) записана в еквівалентній їй допустимій канонічній формі:

$$\sum_{q=1}^{m} \mathbf{e}_{\boldsymbol{q}} x_q + \sum_{q=m+1}^{n} \mathbf{b}_{\boldsymbol{q}} x_q = \mathbf{b}_{\mathbf{0}}, \tag{16}$$

де $\mathbf{e}_{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^m$, $q = 1, 2, \dots, m$, — одиничний вектор при базисній змінній x_q, у якого q-ва координата рівна 1, а всі інші координати рівні 0;

$$\mathbf{b}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} b_{1q} \\ b_{2q} \\ \dots \\ b_{mq} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad q = m+1, \dots, n,$$

— вектор коефіцієнтів при небазисній змінній x_q;

$$\mathbf{b}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \dots \\ b_{m0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

— вектор, складений з правих частин.

Отже, точка $\mathbf{x_0} = (b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{m0}, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ зображає базисний допустимий розв'язок системи рівнянь (14), який визначається цією канонічною формою (16).

Користуючись рівністю (16) виразимо базисні змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$, через небазисні змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, і підставимо ці вирази замість цих базисних змінних у функцію (13). В результаті одержимо

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum_{q=m+1}^{n} \mathbf{d_q} x_q + \mathbf{d_0}, \tag{17}$$

де

$$\mathbf{d_q} = \mathbf{c_q} - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{c_j} b_{jq}, \quad q = m+1, \ldots, n.$$

Очевидно, $\mathbf{d_q} = \mathbf{0}$, $q = 1, 2, \ldots, m$. Рівності (16) і (17), разом, складають допустиму канонічну форму розглядуваної задачі лексикографічної максимізації. $\mathbf{d_0}$ — значення векторної функції $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ в розглядуваному базисному розв'язку.

Легко показати, якщо виконуються лексикографічні нерівності

$$\mathbf{d_q} \leq^L \mathbf{0}, \quad q = m+1, m+2, \ldots, n, \tag{18}$$

то цей базисний допустимий розв'язок $\mathbf{x_0}$ є розв'язком розглядуваної задачі, тобто оптимальною альтернативою, а $\mathbf{d_0}$ — лексикографічним максимумом векторної функції $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ на допустимій множині X [3, с. 192–203].

Нехай існує індекс $l, m+1 \leq l \leq n$, такий, що $\mathbf{d_l} >^L \mathbf{0}$. Тоді, якщо $\mathbf{b_l} \leq^P \mathbf{0}$, то, очевидно, задача оптимального розв'язку не має, так як векторна функція $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ на X лексикографічно необмежена зверху. В супротивному, тобто, якщо $\mathbf{b_l}$ містить хоча б одну додатну компоненту, здійснюється перехід до наступної допустимої канонічної форми (аналогічно, як це робиться в звичайному симплексному алгоритмі), яка визначає наступний допустимий базисний розв'язок. Продовжуючи цей процес, або знайдеться оптимальний допустимий базисний розв'язок, який є шуканою оптимальною альтернативою, або встановлюється лексикографічна необмеженість зверху векторної функції $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ на X [2, с. 1–3].

Якщо виконуються лексикографічні нерівності

$$\mathbf{c_j} - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{c_i} b_{ij} \leq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

то базисний розв'язок $\mathbf{x_0}$ є оптимальним розв'язком задачі (13)–(15), тобто оптимальним розв'язком задачі лексикографічної максимізації лінійної векторної функції (13), при умовах (14) і (15).

Задачу лексикографічної мінімізації лінійної векторної функції

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i0} \mathbf{y_i}, \tag{20}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{y_i} \geq^L \mathbf{c_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

де $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^k, i = 1, 2 \ldots, m,$ — невідомі векторні змінні, назвемо двоїстою задачею до задачі (13)–(15). Легко показати, що для будь-яких допустимих розв'язків прямої задачі (13)–(15) і двоїстої задачі (20) і (21) виконується лексикографічна нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \leq^L \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \mathbf{y}_i. \tag{22}$$

Теорема 2. *Якщо пряма задача* (13)–(15) *має оптимальний розв'язок, то і двоїста задача* (20), (21) *має оптимальний розв'язок, причому, оптимальні значення їх векторних цільових функцій співпадають.*

Доведення. Нехай пряма задача розв'язана симплексним методом;

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} \mathbf{b}_i x_i = \mathbf{b_0} \tag{23}$$

— знайдена оптимальна канонічна форма, де $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ — одиничний вектор при базисній змінній x_i $(1 \leq i \leq m)$, i-ва компонента якого дорівнює 1, а всі інші компоненти дорівнюють 0; $\mathbf{x_0} = (b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{m0}, 0, 0, \ldots, 0)$ — відповідний оптимальний базисний розв'язок задачі, який визначається канонічною формою (23). Позначимо через B матрицю порядку $m \times m$, складену з векторів $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при базисних змінних в системі рівнянь (14). Ці вектори утворюють базис в просторі $\mathbb{R}^m$. Тоді, виконуються лексикографічні нерівності (19). Але, так як $\mathbf{b}_j = B^{-1}\mathbf{a}_j$, то $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{c}_j b_{ij} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c}_m) B^{-1}\mathbf{a}_j$ як добутку матриці, складеної з вектор-стовпців $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c}_m$, на вектор-стовпець $B^{-1}\mathbf{a}_j$. Отже, лексикографічні нерівності (1) запишуться так:

$$\mathbf{c}_j - (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c}_m) B^{-1}\mathbf{a}_j \leq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Позначимо $(\mathbf{y_{10}}, \mathbf{y_{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{m0}) = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c}_m) B^{-1}$, де $\mathbf{y}_{i0} \in \mathbb{R}^k$. Тоді, нерівності (24) запишуться так:

$$\mathbf{c}_j - (\mathbf{y_{10}}, \mathbf{y_{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{m0})\mathbf{a}_j = \mathbf{c}_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{y}_{i0} \leq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{y}_{i0} \geq^L \mathbf{c}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

звідки $(\mathbf{y_{10}}, \mathbf{y_{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{m0})$ є допустимим розв'язком двоїстої задачі (20), (21).

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i0} \mathbf{y}_{i0} = (\mathbf{y_{10}}, \mathbf{y_{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{m0})\mathbf{a_0} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c}_m) B^{-1}\mathbf{a_0} =$$

$$= (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c}_m)\mathbf{b_0} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_{j0},$$

тобто значення векторної функції (20) в допустимому розв'язку двоїстої задачі $(\mathbf{y_{10}}, \mathbf{y_{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{m0})$ дорівнює оптимальному значенню векторної функції (14) прямої задачі. Так як, за умовою (22), повинна виконуватися лексикографічна нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{\boldsymbol{j}} x_{j0} \leq^{L} \sum_{i=1}^{m} a_{i0} \mathbf{y}_{\boldsymbol{i0}},$$

то $\sum_{i=1}^{m} a_{i0}\mathbf{y}_{\boldsymbol{i0}}$ є лексикографічним мінімумом функції (20), при умовах (21), тобто $(\mathbf{y}_{\mathbf{10}}, \mathbf{y}_{\mathbf{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{\boldsymbol{m0}})$ є оптимальним розв'язком задачі (20), (21). Теорема довдена.

Двоїста задача (20) і (21) є задачею лінійного програмування відносно векторних змінних $\mathbf{y}_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ввівши допоміжні лексикографічно невід'ємні векторні змінні $\mathbf{y}_{\boldsymbol{m+j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, запишемо цю задачу так: лексикографічно мінімізувати векторну функцію

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_{i0} \mathbf{y}_{\boldsymbol{i}}, \tag{25}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{y}_{\boldsymbol{i}} - \mathbf{y}_{\boldsymbol{m+j}} = \mathbf{c}_{\boldsymbol{j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{26}$$

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{m+j}} \geq^{L} \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

де $a_{i0} = 0$, $i = m+1, \ldots, m+n$.

Ця задача також розв'язується симплексним методом. Припустимо, що система лінійних рівнянь (26) з векторними змінними $\mathbf{y}_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, \ldots, m+n$, записана в еквівалентній допустимій канонічній формі

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{j}} + \sum_{i=n+1}^{m+n} d_{ij} \mathbf{y}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

де $\mathbf{y}_{\boldsymbol{j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — базисні векторні змінні, а $\mathbf{y}_{\boldsymbol{i}}$, $i = n+1, \ldots, n+m$ — небазисні векторні змінні;

$$(\mathbf{y}_{\mathbf{10}}, \mathbf{y}_{\mathbf{20}}, \ldots, \mathbf{y}_{\boldsymbol{n+m,0}}) = (\mathbf{g}_{\mathbf{1}}, \mathbf{g}_{\mathbf{2}}, \ldots, \mathbf{g}_{\boldsymbol{n}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$$

— відповідний базисний допустимий розв'язок, який визначається канонічною формою (28). Легко показати, якщо виконуються умови

$$a_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{j0} d_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{29}$$

$$a_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{j0} d_{ji} \geq 0, \quad i = m+1, \ldots, m+n, \tag{30}$$

то цей базисний допустимий розв'язок є оптимальним розв'язком задачі (25)–(27). Якщо задача (25)–(27) має оптимальний розв'язок, то і задача (14)–(15) має оптимальний розв'язок, причому, оптимальні значення їх векторних цільових функцій співпадають. Якщо ці дві задачі допустимі, то кожна з них має оптимальний розв'язок [2, с. 1–3].

5. Висновки. Побудовано нові моделі і запропоновані методи розв'язання задач, до яких зводиться аналіз цих моделей. Вони, в сукупності, вирішують як з теоретичної , так і з практичної точки зору, важливі проблеми багатокритеріального вибору, або, інакше, важливі проблеми теорії прийняття рішень за багатьма критеріями. Результати дають можливість формалізувати процеси прийняття рішень в умовах, коли альтернативи оцінюються за багатьма критеріями, будь-яка пара з яких або є рівноважливою, або є різноважливою при оцінці альтернатив. Сформульована лексикографічна задача багатокритеріальної оптимізації, критерієм в якій є векторна згортка багатьох критеріїв, за умови, що множина цих критеріїв розбита на попарно різноважливі критерії. Якщо $X_*(L)$ — множина оптимальних альтернатив в лексикографічній згортці багатьох критеріїв, $X_*(P)$ — множина оптимальних альтернатив в їх паретівській згортці, то $X_*(L) \subset X_*(P)$. Показано, що багатокритеріальні задачі оптимізації, критеріями в яких є згортки, за умовами рівної важливості або різної важливості, або змішаної важливості критеріїв, зводяться до задач скалярної оптимізації або до задач векторної лексикографічної оптимізації. Для лінійних задач лексикографічної оптимізації запропоновано варіант симплексного методу; побудована двоїста задача (як задача з векторними змінними) і доведені відповідні теореми двоїстості.

Список використаної літератури

1. Брила А. Ю., Гренджа В. І. Деякі задачі лексикографічної оптимізації альтернативними критеріями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика».* 2012. Вип. 23, № 1. С. 28–31.
2. Гренджа В. І., Червак О. Ю. Узагальнення симплексного алгоритму для багатокритеріальної лексикографічної задачі лінійного програмування. Збірник наукових праць з обчислювальної математики, м. Ужгород, 1997. Ужгород, 1997. С. 1–3.
3. Семенова Н. В., Колєчкіна Л. М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання: Монографія. Київ : Наукова думка, 2009. 266 с.
4. Семенова Н. В, Ломага М. М., Семенов В. В. Існування розв'язків та метод розв'язання лексикографічної задачі опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв. Доповіді Національної академії наук України, грудень 2020. с. 19–27. DOI: https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.019
5. Червак О. Ю. Оптимізація виробничої програми підприємства. Надкритерії паретівської згортки в багатокритеріальній оптимізації. Соціально-економічний та технічни розвиток підприємств: проблеми, рішення, оцінка ефективності. Колективна монографія. Дніпропетровськ : Пороги, 2016. с. 413–426
6. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород : Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.

Chervak-Smerichko O. Yu. Lexicographic convolution of multiple criteria as a supercriterion of their paretian convolution.

This article focuses on research, constructing new models, and developing methods to solve problems that involve analyzing these models. They tackle essential concerns regarding multiple criteria selection, considering both theoretical and practical aspects. Introducing a concept known as the super criterion has improved the selection process. This concept evaluates alternatives based on a shared set of options. Studies have demonstrated that any substitute that satisfies the super criterion is also the best choice based on the initial criteria for the identical range of alternatives. The choice is a significant aspect of purposeful activity. Almost every complex practical problem of choice is multi-criteria. Typically, it's challenging to find an alternative that meets all the criteria. Combining various criteria into a single one with agreed-upon conditions by all parties involved is a practical approach to simplify the process. Various conditions lead to different criteria convolutions, resulting in distinct challenges for multiple criteria optimization. A commonly used method for evaluating alternatives is the Paretian convolution, which involves pairwise balancing all the criteria. One way to combine multiple criteria into a single vector is by assigning pairwise different levels of importance to each of them. The type of convolution used in this context is called a lexicographic convolution.

It involves solving a lexicographic optimization problem to determine the best possible alternative. Note that the criterion order given by this convolution is a complete order on the set of options. The article considers the lexicographic convolution of multiple criteria into one vector criterion. Studies have demonstrated that multiple criteria combination results in a superior criterion compared to relying solely on the Paretian convolution. This proof indicates that solving the problem of multi-criteria selection through Paretian convolution can be simplified by solving lexicographic optimization issues instead. In optimization, one area of study is lexicographic linear programming, which involves creating a dual problem that uses vector variables and is demonstrated as a linear programming problem. Proofs related to duality have been presented within this framework. Furthermore, this article explains a version of the simplex algorithm used for lexicographic linear programming.

Keywords: lexicographic convolution of multiple criteria, vector criterion, supercriterion of the Paretian convolution of criteria.

References

1. Bryla, A. Yu., & Grenzha, V. I. (2012). Some problems of lexicographic optimization by alternative criteria. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and computer science,* 23(1), 28–31. [in Ukrainian].
2. Grenja, V. I., & Chervak, O. Yu. (1997). Generalization of the simplex algorithm for the multi-criteria lexicographic problem of linear programming. Collection of research papers on computational mathematics. Uzhgorod [in Ukrainian].
3. Semenova, N. V., & Kolechkina, L. M. (2009). *Vector problems of discrete optimization on combinatorial sets: research and solution methods: Monograph.* Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
4. Semenova, N. V., Lomaga, M. M., & Semenov, V. V. (2020). The existence of solutions and the method of solving the lexicographic problem of convex optimization with linear criteria functions. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.019 [in Ukrainian].
5. Chervak, O. Yu. (2016). *Optimization of the production program of the enterprise. Supercriteria of the Paretian convolution in multicriteria optimization. Socio-economic and technical development of enterprises: problems, solutions, evaluation of efficiency. Collective monograph.* Dnipropetrovsk: Porogy [in Ukrainian].
6. Chervak, Yu. Yu. (2002). *Optimization. An unimproved choice.* Uzhgorod: Uzhgorod National University [in Ukrainian].

Одержано 01.05.2023