

УДК 532.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).33-44](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).33-44)**Ю. В. Гуртовий¹, В. І. Єлькін²**

¹ Центральнoукраїнський державний університет ім. Володимира Винниченка,
доцент кафедри математики та методики її викладання

hurtovy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1499-7089>

² Центральнoукраїнський державний університет ім. Володимира Винниченка,
аспірант кафедри математики та методики її викладання

kamikadze19900@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5457-2593>

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДВОШАРОВІЙ ОБМЕЖЕНІЙ РІДИНІ

В статті розглядається дослідження стоячих внутрішніх хвиль у двошаровій гідродинамічній рідинній системі з обмеженими товщинами шарів. Проблема постановки задачі сформульована у безрозмірному вигляді. Для лінійної задачі отримано розв'язки для відхилення поверхні контакту двох шарів як для двовимірної, так і для тривимірної моделі задачі. Показано, що граничні умови на бокових стінках рідини обмежують значення хвильових чисел до певного дискретного набору. Для опису частоти стоячої внутрішньої хвилі була розроблена формула, яка залежить від фізичних параметрів системи та кількості вузлів. Ця формула дозволяє визначити частоту хвилі для заданої конфігурації системи. Графічно були зображені можливі форми стоячих хвиль, які містять декілька нерухомих точок на поверхні контакту шарів. Ці форми відображають стоячі хвилі з різною кількістю вузлів та вузлових ліній, що демонструють різноманітні коливальні структури, які можуть виникати у системі. Дослідження надає розширене розуміння поведінки стоячих внутрішніх хвиль у двошаровій гідродинамічній системі з кінцевими товщинами шарів, що може мати важливі застосування у вивченні гідродинаміки морських систем та інших стратифікованих середовищах.

Ключові слова: двошарова рідина, стоячі внутрішні хвилі, вузли і пучності, вузлові лінії.

1. Вступ. Системи з шаруватою структурою займають особливий клас об'єктів та процесів. Дослідження внутрішніх хвиль у таких системах займає великий теоретичний та прикладний інтерес і слугує областю досліджень багатьох вчених. Тому потрібен точний аналітичний метод для опису руху поверхні розділу двох рідин з різною густиною для розрахунку параметрів стоячих хвиль. Дослідження та аналіз фізичних характеристик внутрішніх хвиль також є актуальними під час розробки відповідних технологій та пристроїв, що застосовують енергію внутрішніх хвиль для генерації електричного струму. В статті будемо розглядати двовимірну та тривимірну модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох обмежених рідких шарів.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми. З початку XIX століття були встановлені основні принципи теорії хвиль, включаючи теорію нелінійних хвиль, які в основному застосовуються для розв'язання задач газу та гідродинаміки. Спостереження та експерименти підтверджують основні результати досліджень поширення хвиль у двошарових гідродинамічних системах в багатьох дослідженнях.

В роботах, які були опубліковані в останній час та пов'язані з дослідженням стоячих хвиль в рідких систем, можна виділити наступні.

У роботі [1] було описано експерименти та розроблені для експериментальні висновки про стоячі хвилі. Близьке наближення до вільних коливань створювалося в резервуарі генераторами хвиль. Вони працювали з малою амплітудою та на частотах, для яких за рахунок резонансу відбувалося велике посилення. Амплітудно-частотна крива при цьому складається з двох гілок, які не перетинаються, що може бути пояснено теоретично. Передбачення, зроблене Пенні та Прайсом, полягало в тому, що хвилі будуть нестійкими, коли висота гребенів стоячих хвиль досягає приблизно 0.15 довжини хвилі. Було знайдені умови експерименту, необхідні для отримання похилого гребеня. Був виявлений збіг з розрахунковою формою профілю найвищої хвилі, що мала кут дуже близький до 90° . Було виявлено, що передбачена нестійкість для двовимірних хвиль починається у той момент, коли гребінь стає гострим.

У роботі [2] стабільний і точний чисельний метод для розрахунку руху інтерфейсів між двома рідинами використовується для розрахунку двовимірних стоячих хвиль на воді. Загальний метод, який обчислює довільне відхилення залежить від руху інтерфейсу. Визначено дуже круті стоячі хвилі. Як визначальний параметр використовується пікове прискорення гребеня, а не крутість хвилі. Виявлено, що крутість хвилі має максимальне значення, менше ніж екстремальна хвиля. Досліджено стійкість стоячих хвиль та розраховано інкременти нестійких мод. Встановлено, що всі стоячі хвилі, крім дуже крутих, загалом стійкі до гармонійних збурень. Однак стоячі хвилі, як правило, нестійкі до субгармонійних збурень через нестійкість бокового типу.

У дослідженні [3] розраховано просторово та тимчасово періодичні стоячі хвилі. Використовуючи метод спектрального граничного інтегралу у поєднанні з ітераціями Ньютона. Нові точні результати поблизу граничної форми гравітаційних хвиль отримані з використанням нерівномірного розподілу вузлів. Показано, що при найбільшій розрахунковій кривизні кут гребеня менший за 90° . Коли враховується невеликий поверхневий натяг, форма гребеня значно змінюється. Експерименти з хвилями Фарадея у прямокутному контейнері з великим подовженням узгоджуються з розрахунками. Це вперше, коли такі високо амплітудні періодичні хвилі спостерігалися у лабораторних умовах.

У роботі [4] досліджено граничну поведінку стоячих хвиль великої амплітуди на глибокій воді. Було використане чисельне моделювання високої роздільної здатності з подвійною точністю. У той час як біжучі періодичні хвилі, наближаються до екстремальної хвилі Стокса з гострим гребенем, виявилось, що стоячі хвилі змінюють свою поведінку. Замість того, щоб загострюватися до кута або виступу, як передбачалося раніше, на вершині гребеня розвиваються різні коливальні структури. Це призводить до того, що біфуркаційна крива, яка параметризує ці хвилі, розпадається на гілки, що не перетинаються. У багатьох випадках вертикальний струмінь рідини штовхає ці структури вгору, що призводить до хвильових профілів, які зазвичай спостерігаються в експериментах з хвильовим резервуаром.

У роботі [5] наведені явища відбивання та передачі водних хвиль через хвилеподібне проникне дно в двошаровій рідинній системі з використанням двовимірної лінеаризованої теорії. Досліджено вплив поверхневого натягу на вільну поверхню включено в цю роботу. Показано залежність коефіцієнтів відбиття і пропускання, отриманих в термінах інтегралів, від функції форми хвилеподі-

бного дна.

У дослідженні [6] розглядалась двошарова система покрита кригою. Проаналізоване явище відбиття і передачі водяних хвиль у ній. Дно нижнього шару є хвилеподібним і проникним, а верхній шар покритий крижаним листом. Коефіцієнти відображення і передачі першого порядку визначаються за допомогою регулярного аналізу збурень та методу перетворень.

У роботі [7] досліджується новий адаптивний пристрій генерації енергії водяної хвилі. Цей пристрій належить мікро-генератору енергії. Низько швидкісна енергія та енергія моменту обертання можна перетворити в електричну енергію, що може бути використана для зарядки літійового акумулятора, за допомогою верхніх та нижніх груп лопатей поглинача.

У статті [8] продемонстровано діелектричний еластомірний генератор, який може трансформувати енергію коливань, перенесену водними хвилями в електрику. Для побудови прототипу генератора використано поліакрилату плівку, а експерименти проводились у штучному басейні. За допомогою цього можна генерувати запрограмовані дрібно масштабні хвилі на різних частотах і амплітудах. Результати вихідної потужності продемонстрували велику ефективність хвильових перетворювачів енергії на основі пружних ємнісних генераторів.

Таким чином, дослідженню стоячих хвиль у різноманітних гідродинамічних системах присвячені численні наукові праці сучасних вчених, які мають як теоретичний так і експериментальний характер.

3. Мета та завдання. Метою даного дослідження є поширення внутрішніх стоячих хвиль у двошаровій рідині що має скінченну товщину.

Для досягнення мети поставлені наступні завдання:

- виконати математичну постановку задачі у двовимірному вигляді;
- виконати математичну постановку задачі у тривимірному вигляді;
- лінеаризувати початкову задачу та знайти розв'язки лінійної задачі;
- зробити аналіз отриманих розв'язків.

4. Постановка задачі для двовимірного випадку. Досліджується задача поширення хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідких шарів.

$\Omega_1 = \{(x, z), 0 < x < l, -h_1 < z < 0\}$ з густиною ρ_1 верхнього рідкого шару та

$\Omega_2 = \{(x, z), 0 < x < l, 0 < z < h_2\}$ з густиною ρ_2 нижнього рідкого шару (рис. 1).

У безрозмірному вигляді постановка задачі визначається системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка містить рівняння Лапласа для потенціалів швидкостей в шарах Ω_1 і Ω_2 .

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0; \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхні

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \quad \text{при } z = \eta(x, t), \quad (2)$$

динамічну умову на поверхні контакту

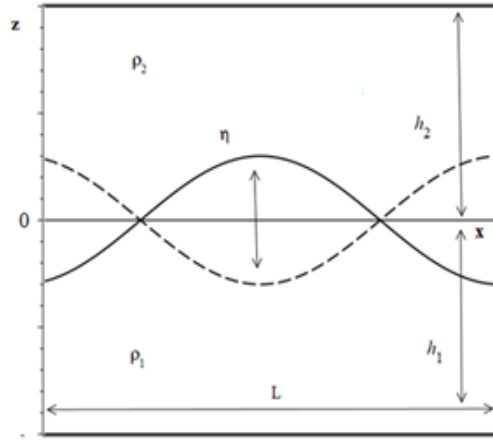


Рис. 1. Двошарова обмежена рідина.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2] - T \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

при $z = \eta(x, t)$, граничні умови на бокових стінках

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \quad \begin{cases} \frac{\varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = l, \quad (4)$$

граничні умови на дні та кришці

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_2. \quad (5)$$

Швидкості у Ω_j виражені через градієнт потенціалу φ_j , $j = 1, 2$. Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$. Враховується сила поверхневого натягу, де T — коефіцієнт поверхневого натягу. Сила тяжіння напрямлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку. Рідини вважаються нестисливими, тобто $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ — відношення густин верхнього та нижнього рідких шарів залишається сталою.

5. Тривимірна модель задачі. Стоячі хвилі розглядаємо у басейні у вигляді прямокутного паралелепіпеда що містить два рідких шари:

$\Omega_1 = \{(x, y, z), 0 < x < L_1, 0 < y < L_2 - h_1 < z < 0\}$ з густиною ρ_1 верхнього рідкого шару;

$\Omega_2 = \{(x, y, z), 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, 0 < z < h_2\}$ з густиною ρ_2 нижнього рідкого шару.

Швидкості у Ω_j виражені через градієнт потенціалу φ_j , $j = 1, 2$. Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, y, t)$ (рис. 2).

Математична постановка задачі про коливання внутрішніх стоячих хвиль з товщинами h_1 та h_2 має вигляд:

$$\nabla^2 \varphi_1 \equiv \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

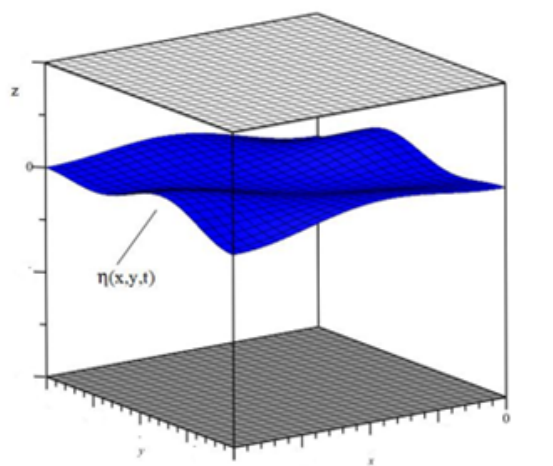


Рис. 2. Тривимірна модель обмеженої двошарової рідини.

$$\nabla^2 \varphi_2 \equiv \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad (7)$$

кінематичні умови

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (9)$$

динамічна умова

$$g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \eta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + 0,5 (\vec{\nabla} \varphi_1)^2 - 0,5 (\vec{\nabla} \varphi_2)^2 - \frac{T}{\rho_1} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{-3}{2}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (10)$$

граничні умови на бокових стінках

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad x = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = L_1, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad y = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{при } y = L_2.$$

граничні умови на дні та кришці

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = h_2. \quad (12)$$

6. Розв'язки для двовимірної моделі. Якщо амплітуда хвиль буде набагато меншою за характерну довжину хвилі, то коефіцієнт нелінійності α можна вважати рівним нулю, причому система (1–5) стає лінійною.

Розв'язок такої задачі будемо шукати у вигляді стоячих хвиль:

$$\eta = A \cos(kx) \sin(\omega t). \quad (13)$$

Підстановка (13) в рівняння (1–2, 5) дає значення потенціалів швидкостей нижнього і верхнього шарів у вигляді:

$$\varphi_1 = \omega k^{-1} A \cos(kx) \sin(\omega t) \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)}, \quad (14)$$

$$\varphi_2 = \omega k^{-1} A \cos(kx) \sin(\omega t) \frac{\text{ch}(k(h_2 - z))}{\text{sh}(kh_2)}. \quad (15)$$

Підставляючи розв'язки (13–15) в рівняння (3), отримуємо дисперсійне рівняння

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\text{cth}(kh_1) + \rho \text{cth}(kh_2)}. \quad (16)$$

Можна зазначити, що дисперсійне співвідношення має такий самий вигляд як у випадку прогресивних хвиль.

Перевірка граничних умов на бокових стінках басейну (5) накладає обмеження на хвильове число стоячих хвиль:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad n = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (17)$$

Тут натуральне число n показує кількість вузлів для кожної стоячої хвилі. Підстановка (17) в (16) дає дискретний ряд частот, з якими коливається хвиля, що має n вузлів:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(1 - \rho + \frac{\pi^2 n^2 T}{L^2}) L}{\coth \frac{\pi n h_1}{L} + \rho \coth \frac{\pi n h_2}{L}}}. \quad (18)$$

Враховуючи дисперсійне співвідношення (18) можна зробити висновок, що частоти коливання стоячих хвиль належать до-дискретного спектру і можуть набувати лише певних значень. Дисперсійна діаграма являє собою неперервну криву, а набір точок вздовж деякої кривої (рис. 3).

На рис. 4 зображено стоячі хвилі для таких параметрів двошарової системи $h_1 = h_2 = 1$, $L = 2$, $A = 0.3$, $\rho = 0.9$, $n \in \{1, 2, 3\}$.

Кожна стояча хвиля має вузли — точки поверхні контакту, які залишаються нерухомими під час коливання стоячої хвилі. На рисунку 4 на них вказує штрихова лінія. Також є так звані пучності — точки контакту двох шарів, які коливаються з максимальною амплітудою. Всі точки межі розділу двох шарів коливаються з однаковою частотою, але з різними амплітудами. Якщо реалізована стояча хвиля з одним вузлом, то це буде середня точка поверхні контакту, а максимальна амплітуда коливань буде біля бокових стінок басейну. Частота коливань такої хвилі $\omega = 0.41$ визначається фізичними параметрами двошарової рідини і є найменшою серед усіх можливих значень. Стояча хвиля з двома вузлами коливається з частотою $\omega = 0.99$, яка більша ніж вдвічі за частоту хвилі з одним вузлом. Внутрішня стояча хвиля з трьома вузлами має частоту $\omega = 1.73$. На практиці може реалізовуватись накладання стоячих хвиль з різною кількістю вузлів.

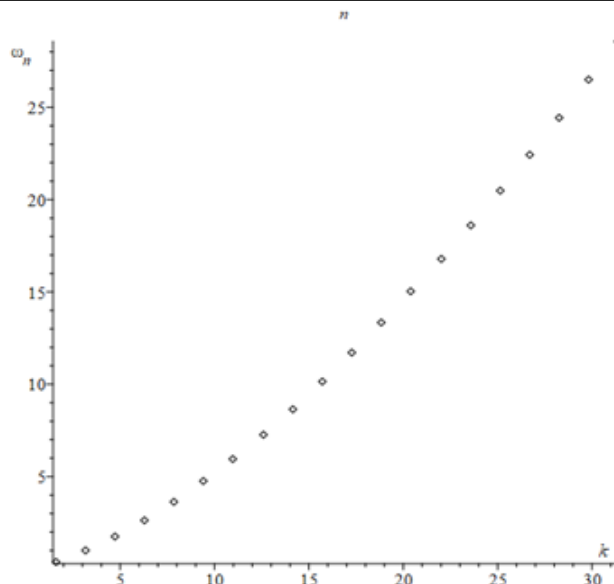


Рис. 3. Дискретна дисперсійна крива для стоячих хвиль.

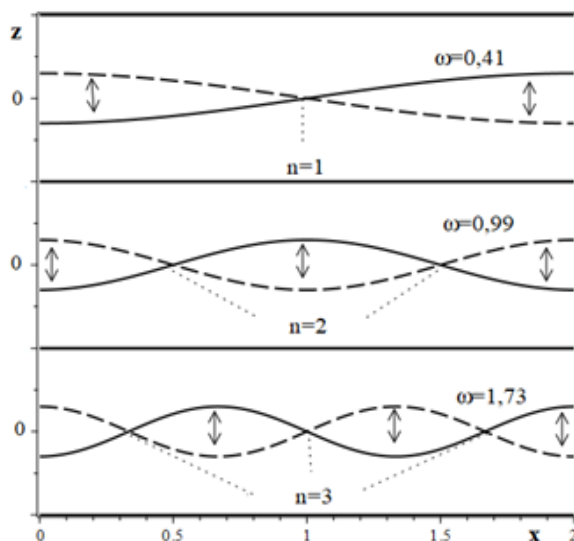


Рис. 4. Стоячі хвилі з різною кількістю вузлів.

7. Лінійна тривимірна задача. Розв’язок для тривимірної задачі одержуємо у вигляді стоячих хвиль:

$$\eta = A \cos(k_1x) \cos(k_2y) \sin(\omega t). \tag{19}$$

Підстановка (19) в рівняння (1-2, 5) дає значення потенціалів швидкостей нижнього і верхнього шарів у вигляді:

$$\varphi_1 = \omega k^{-1} A \cos(k_1x) \cos(k_2y) \cos(\omega t) \left(\frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)} \right), \tag{20}$$

$$\varphi_2 = \omega k^{-1} A \cos(k_1x) \cos(k_2y) \cos(\omega t) \left(\frac{\text{ch}(k(h_2 - z))}{\text{sh}(kh_2)} \right). \tag{21}$$

де $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Перевірка граничних умов на бокових стінках басейну накладає обмеження на числа k_1, k_2 :

$$k_1 = \frac{\pi n_1}{L_1}, \quad k_2 = \frac{\pi n_2}{L_2}, \quad n_1, n_2, \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (22)$$

Отже, хвильове число має вигляд $k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2}}$. Підставляючи розв'язки (19–21) в останнє з рівнянь отримуємо те саме дисперсійне рівняння, що і в двовимірному випадку

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\text{cth}(kh_1) + \rho \text{cth}(kh_2)}. \quad (23)$$

Покажемо, які розв'язки відповідають різним значенням чисел n_1 і n_2 . У випадку тривимірної задачі ми отримуємо вже вузлові лінії, які визначаються співвідношенням $\eta(x, y, t) = 0$. Тобто, це ті точки межі розділу двох рідких шарів, що залишаються нерухомими. На поданих нижче рисунках зображено вузлові лінії (лівий рисунок) та відхилення інтерфейсу двох рідких шарів (правий рисунок) для басейну у вигляді куба зі стороною рівною 2 (рис. 5–8).

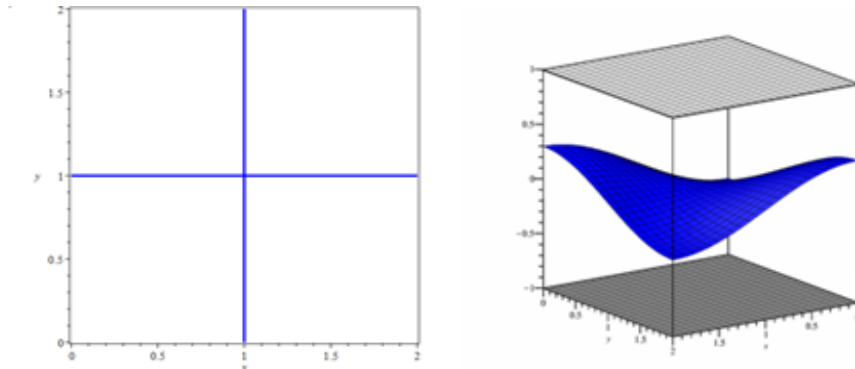


Рис. 5. Вузлові лінії $x = 1, y = 1$, та відхилення інтерфейсу для параметрів $n_1 = 1, n_2 = 1$.

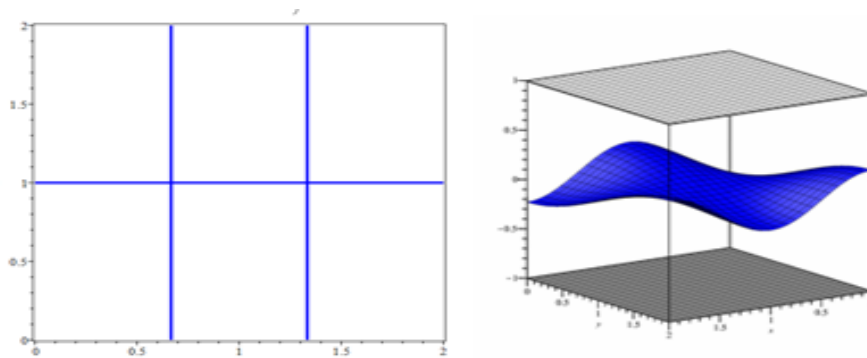


Рис. 6. Вузлові лінії $x = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$, та відхилення інтерфейсу для параметрів $y = 1, n_1 = 2, n_2 = 1$.

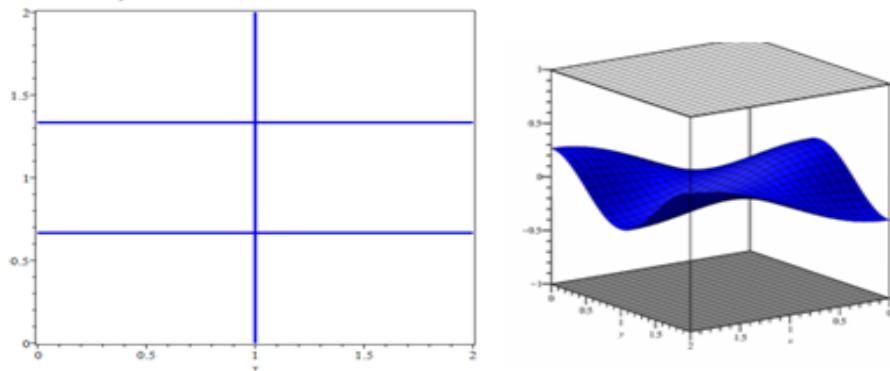


Рис. 7. Вузлові лінії $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, та відхилення інтерфейсу для параметрів $n_1 = 1$, $n_2 = 2$.

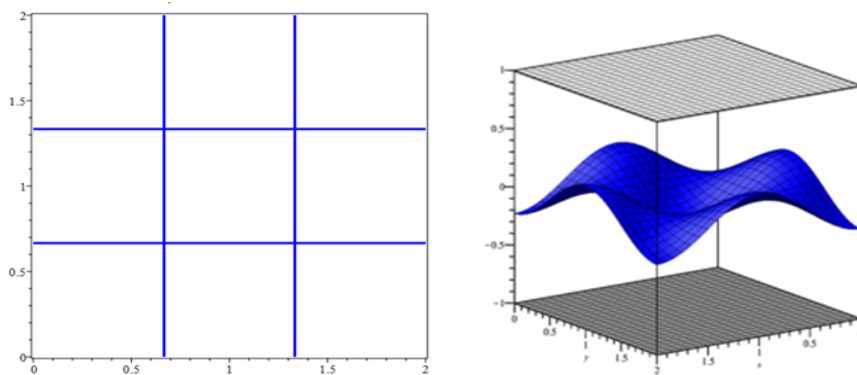


Рис. 8. Вузлові лінії $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, та відхилення інтерфейсу для параметрів $n_1 = 2$, $n_2 = 2$.

Реальна стояча хвиля буде суперпозицією хвиль, які відповідають різним значенням параметрів n_1 і n_2 . Причому вузлові лінії можуть мати форму різноманітних плоских кривих. Форма кривої буде визначатися амплітудами стоячих хвиль, що входять в суперпозицію.

8. Результати дослідження двовимірної та тривимірної моделі задачі. При дослідженні двовимірної моделі всі точки крім вузлів межі розділу двох шарів коливаються з однаковою частотою, але з різними амплітудами. Якщо реалізована стояча хвиля з одним вузлом, то це буде середня точка поверхні контакту, а максимальна амплітуда коливань буде відбуватись біля бокових стінок басейну. Частота коливань такої хвилі $\omega = 0.41$ визначається фізичними параметрами двошарової рідини і є найменшою серед усіх можливих стоячих хвиль. У випадку двох трьох і більше вузлів частота коливань стоячої хвилі збільшується за дискретним законом згідно дисперсійного співвідношення.

Тривимірна задача для двошарового басейну і вигляді прямокутного паралелепіпеда дає елементарні розв'язки, які являють собою стоячі хвилі у вигляді поверхні, точки якої коливаються вертикально вздовж вісі z . Вузлові лінії для цього випадку є вертикальними і горизонтальними лініями, які залишаються нерухомими.

9. Висновки. Отже, у даній статті було досліджено проблему знаходжен-

ня параметрів внутрішніх стоячих хвиль у обмеженій гідродинамічній системі «шар – шар». Постановка задачі була здійснена для ідеальних рідин та містить рівняння Лапласа, кінематичні та динамічні умови рівноваги, а також граничні умови на дні і кришці та бокових стінках. Розв’язки задачі були отримані для довгих хвиль, тобто коли амплітуда значно менша за довжину хвилі. Це припущення дозволило лінеаризувати побудовану математичну модель та отримати розв’язки, які повністю описують можливі стоячі хвилі у таких системах. Показано, що дисперсійне співвідношення для внутрішніх стоячих хвиль має характер дискретної кривої, яка складається з окремих точок. Побудовано відхилення поверхні контакту у випадку двовимірної моделі для різної кількості вузлів та у випадку тривимірної моделі для різної кількості вузлових ліній. Дана задача може бути корисна для моделювання стоячих хвиль в обмежених рідких середовищах, а також може використовуватись для постановки експериментів для довгих хвиль у двошаровому басейні.

Список використаної літератури

1. Penney W. G., Price A. T., Thornhill C. K. Part II. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1952. Vol. 244, No. 882. P. 254–284. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1953.0086>
2. Mercer G. N., Roberts A. J. Standing waves in deep water: Their stability and extreme form. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1992. Vol. 4, No. 2. P. 259–269. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.858354>
3. Schultz W. W., Vanden-Broeck J. M., Jiang L., Perlin M. Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect. *Journal of Fluid Mechanics*. 1998. Vol. 369. P. 253–272. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112098001773>
4. Wilkening J. Breakdown of self-similarity at the crests of large-amplitude standing water waves. *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, No. 18. 184501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.184501>
5. Panda S., Martha S. C. Water-waves scattering by permeable bottom in two-layer fluid in the presence of surface tension. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2017. Vol. 22, No. 6. P. 827–851. DOI: <https://doi.org/10.3846/13926292.2017.1386239>
6. Selezov I. T., Avramenko O. V., & Gurtovy Y. V. Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 2007. Vol. 34, No. 5. P. 475–491 DOI: <https://doi.org/10.1615/InterJFluidMechRes.v34.i5.60>
7. Panda S. Oblique wave scattering by an undulating porous bottom in a two-layer ice-covered fluid. *China ocean engineering*. 2016. Vol. 30, No. 3. P. 431–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
8. Panda S. Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid. *China ocean engineering*. 2016. Vol. 130, No. 3. P. 431–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
9. Berti M., Montalto R. Quasi-periodic standing wave solutions of gravity-capillary water waves. *American mathematical society*. 2020. Vol. 263, No. 1273. DOI: <https://doi.org/10.1090/memo/1273>
10. Baldi P., Berti M., Haus E., Montalto R. Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth. *Inventiones mathematicae*. 2018. Vol. 214, No. 2. P. 739–911. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00222-018-0812-2>
11. Berti M., Franzoi L., Maspero A. Traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2021. Vol. 240, No. 1. P. 99–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-021-01607-w>
12. Berti M., Franzoi L., Maspero A. Pure gravity traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2021. Vol. 240. P. 99–202. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12006>
13. Feola R., Giuliani F. Time quasi-periodic traveling gravity water waves in infinite depth.

Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni. 2021. Vol. 31, No. 4. P. 901–916. URL: <https://ems.press/journals/rlm/articles/29647>

Hurtovyi Yu. V., Yelkin V. I. Standing waves in a two-layer limited liquid.

The article discusses the study of standing internal waves in a two-layer hydrodynamic fluid system with limited layer thicknesses. The problem formulation is presented in a dimensionless form. For the linear problem, solutions for the interface displacement between the two layers are obtained for both two-dimensional and three-dimensional models. It is shown that the boundary conditions on the lateral walls of the fluid restrict the values of wave numbers to a discrete set. A formula was developed to describe the frequency of the standing internal wave, which depends on the physical parameters of the system and the number of nodes. This formula allows for determining the wave frequency for a given system configuration. Possible forms of standing waves containing multiple stationary points on the interface surface were depicted graphically. These forms represent standing waves with different numbers of nodes and demonstrate various oscillatory structures that can occur in the system. The research provides an enhanced understanding of the behavior of standing internal waves in a two-layer hydrodynamic system with finite layer thicknesses, which may have important applications in studying the hydrodynamics of marine systems and other density-stratified environments.

Keywords: two-layer liquid, standing internal waves, nodes and antinodes, nodal lines.

References

1. Penney, W. G., Price, A. T., & Thornhill, C. K. (1952). Part II. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 244(882), 254–284. <https://doi.org/10.1098/rspa.1953.0086>
2. Mercer, G. N., & Roberts, A. J. (1992). Standing waves in deep water: Their stability and extreme form. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(2), 259–269. <https://doi.org/10.1063/1.858354>
3. Schultz, W. W., Vanden-Broeck, J. M., Jiang, L., & Perlin, M. (1998). Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 369, 253–272. <https://doi.org/10.1017/S0022112098001773>
4. Wilkening, J. (2011). Breakdown of self-similarity at the crests of large-amplitude standing water waves. *Physical Review Letters*, 107(18), 184501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.184501>
5. Panda, S., & Martha, S. C. (2017). Water-waves scattering by permeable bottom in two-layer fluid in the presence of surface tension. *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(6), 827–851. <https://doi.org/10.3846/13926292.2017.1386239>
6. Selezov, I. T., Avramenko, O. V., & Gurtovy, Y. V. (2007). Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 34(5). <https://doi.org/10.1615/InterJFluidMechRes.v34.i5.60>
7. Panda, S. (2016). Oblique wave scattering by an undulating porous bottom in a two-layer ice-covered fluid. *China ocean engineering*, 30(3), 431–446. <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
8. Panda, S. (2016). Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid. *China ocean engineering*, 130(3), 431–446. <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
9. Berti, M., & Montalto, R. (2020). Quasi-periodic standing wave solutions of gravity-capillary water waves (Vol. 263, No. 1273). American mathematical society. <https://doi.org/10.1090/memo/1273>
10. Baldi, P., Berti, M., Haus, E., & Montalto, R. (2018). Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth. *Inventiones mathematicae*, 214(2), 739–911. <https://doi.org/10.1007/s00222-018-0812-2>
11. Berti, M., Franzoi, L., & Maspero, A. (2021). Traveling quasi-periodic water waves

- with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 240(1), 99–202. <https://doi.org/10.1007/s00205-021-01607-w>
12. Berti, M., Franzoi, L., & Maspero, A. (2021). Pure gravity traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 240, 99–202. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12006>
 13. Feola, R., & Giuliani, F. (2021). Time quasi-periodic traveling gravity water waves in infinite depth. *Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni*, 31(4), 901–916. Retrieved from <https://ems.press/journals/rlm/articles/29647>

Одержано 04.05.2023