УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).193-200

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики,
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

ЕКВАЦІОНАЛЬНЕ ОПИСАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО НЕПОВНИХ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У даній роботі розглядається клас булевих алгебр, які включають в себе операції сума за модулем два, диз'юнкцію, кон'юнкцію, заперечення, константи 0 та 1. Введені поняття сигнатурної тотожності, за допомогою якої можна змінювати сигнатуру алгебр цього класу, та поняття екваціонального кластеру алгебр. Усі функціонально неповні алгебри утворюють двадцять один кластер. У роботі знайдені повні системи тотожностей для всіх тридцяти чотирьох функціонально неповних алгебр даного класу.

Ключові слова: універсальна булева алгебра, екваціональність, повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, екваціональний кластер.

1. Вступ. Загальна теорія алгебр як математична дисципліна почала існувати з 1935 року. Саме тоді Біркгоф опублікував свої перші статті, в яких доводить теореми про повноту для екваціональної логіки, яка відіграє особливу роль у математиці, оскільки класи алгебр, які найбільше цікавлять алгебраїстів, або аксіоматично визначені тотожностями або тісно пов'язані з таким класом [1]. Особливе місце у теорії функцій двозначної логіки займає булева алгебра, яка застосовується у задачах обробки інформації, роботі з базами даних, логічному програмуванні, для конструювання та аналізу роботи комп'ютерів та інше.

Дана робота є продовженням робіт [2–6], в яких проведені екваціональні дослідження алгебр заданими над бінарними квадратними матрицями, в сигнатуру яких входять операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. У роботі [7] розроблена методика знаходження повних систем тотожностей для деяких класів булевих алгебр. Знайдені повні системи тотожностей алгебр, які належать кубу Буля і Жегалкіна.

2. Основні результати. Нехай задано клас універсальних булевих алгебр $M = \{U = \langle A, \Omega \rangle\}$, $A = \{0, 1\}$, Ω — деяка множина булевих операцій. Позначимо через $R(U)$ множину всіх тотожностей алгебри U.

Означення 1. *Алгебри U_1 і U_2 називають екваціонально еквівалентними, якщо $R(U_1) = R(U_2)$.*

Означення 2. *Алгебра U_1 еквaціонально вкладається в алгебру U_2, якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$.*

Якщо сигнатури алгебр U_1 і U_2 не співпадають, то вони не є еквaціонально еквівалентними. Якщо алгебра U_1 еквaціонально вкладається в алгебру U_2, то $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Нехай задані алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ і $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ такі, що $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Означення 3. *Тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$ називається сигнатурною, якщо $F_2(\varphi)$ — формула, яка реалізує операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$, а $F_1(\psi)$ — формула, яка побудована з операцій алгебри U_1.*

Наприклад, якщо $U_1 = \langle A, \{\wedge, \vee, \neg\} \rangle$ і $U_2 = \langle A, \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \rangle$, то сигнатурними є тотожності $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$, $x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$.

Означення 4. *Система тотожностей $H \subset R(U)$ називається повною в U, якщо використовуючи операцію суперпозиції, можна довести довільну тотожність $F_1 = F_2$ до лексикографічної рівності.*

Питання чи мають алгебри скінченні повні системи тотожностей є відкритим навіть для скінчених алгебр.

Нехай алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ і $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ такі, що $\Omega_1 \subset \Omega_2$, і для кожної операції $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ знайдена сигнатурна тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi)$. Множину цих сигнатурних тотожностей позначимо через $R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Теорема 1. *Якщо для алгебри U_1 знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$, то повна система тотожностей $H(U_2)$ алгебри U_2 дорівнює $H(U_1) \bigcup R(\Omega_2 - \Omega_1)$.*

Доведення. Доведення теореми випливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операції $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ з формули алгебри U_2, звівши їх до формул алгебри U_1, для якої знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$.

Означення 5. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle \in M$ має еквaціональну потужність k у класі алгебр M, якщо в ній можна побудувати k сигнатурних тотожностей.*

Означення 6. *Алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ еквaціонально вкладається в алгебру $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ якщо для кожної операції $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існують сигнатурні тотожності.*

За допомогою цих сигнатурних тотожностей формули алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ можна звести до формул алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$. Те, що алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ еквaціонально вкладається в алгебру $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ будемо позначати $R(U_1) \subset$ $\subset R(U_2)$

Означення 7. *Алгебри $U_1, U_2, \ldots, U_t \in N$ утворюють еквaціональний кластер N, якщо*

1) *$\forall U_i, U_j$ існує така послідовність алгебр $U_{i_1}, U_{i_2} \ldots, U_{i_l} \in N$, що $R(U_i) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \ldots \subset R(U_{i_l}) = R(U_j)$.*
2) *$\forall U_k \in N$ не існує $U_i \in M$ такої, що $R(U_:) \subset R(U_V)$.*

Потужність еквaціонального кластера $|N|$ визначається кількістю алгебр, які входять до його складу.

Розглянемо клас булевих універсальних алгебр

$$M_6 = \{U = \langle A, \Omega\rangle \,|\, \Omega \in \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus\}\} .$$

Алгебри цього класу утворюють шестимірний сигнатурний куб (рис. 1), який містить шістдесят чотири алгебри.

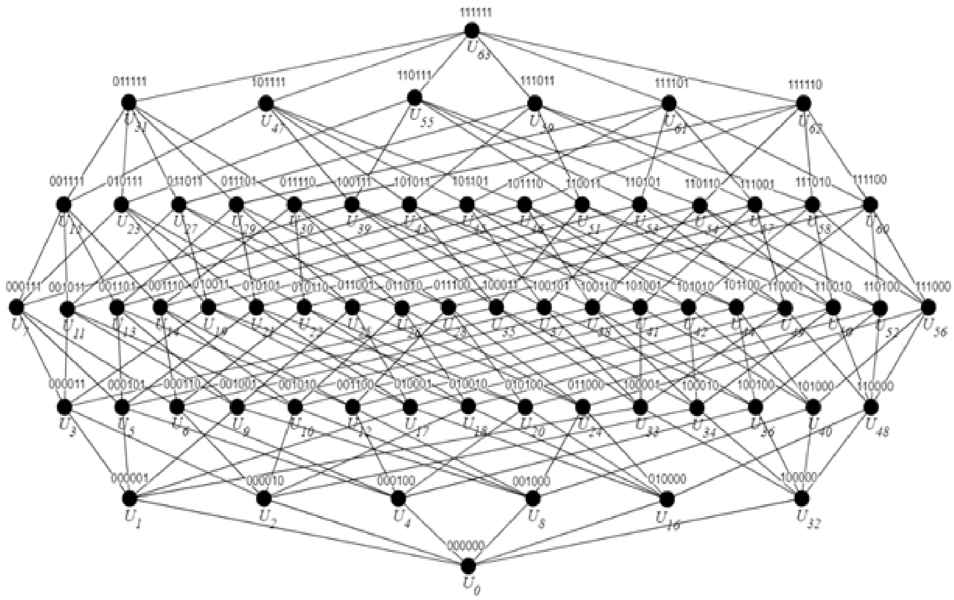

Рис. 1. Сигнатурний шестимірний куб класу алгебр M_6.

Знайдемо повні системи тотожностей всіх алгебр цього класу. Для частини цих алгебр ця задача була розв'язана в [6]. Кожній алгебрі $U_i = \langle A, \Omega_i\rangle \in M_6$ поставимо у відповідність шестимірний булевий вектор $B_i(U_i) = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \alpha_4^i, \alpha_5^i, \alpha_6^i)$, де $\alpha_1 = 1$, якщо $\oplus \in \Omega_1$, $\alpha_1 = 0$, якщо $\oplus \notin \Omega_V$; $\alpha_2 = 1$, якщо $\vee \in \Omega_V$, $\alpha_2 = 0$, якщо $\vee \notin \Omega_V$; $\alpha_3 = 1$, якщо $\wedge \in \Omega_V$, $\alpha_3 = 0$, якщо $\wedge \notin \Omega_V$; $\alpha_4 = 1$, якщо $\neg \in \Omega_V$, $\alpha_4 = 0$, якщо $\neg \notin \Omega_V$; $\alpha_5 = 1$, якщо $1 \in \Omega_V$, $\alpha_5 = 0$, якщо $1 \notin \Omega_V$; $\alpha_6 = 1$, якщо $0 \in \Omega_V$, $\alpha_6 = 0$, якщо $0 \notin \Omega_V$.

Опишемо всі кластери у множині алгебр M_6.

Перший кластер N_0 складають алгебри, які мають екваціональну потужність 0, тобто в цих алгебрах не існує сигнатурних тотожностей. Цей клас складається з сімнадцяти алгебр, кожна з яких є одноелементним екваціональним кластером. Шістнадцять алгебр цього класу утворюють сигнатурний граф, представлений на рис. 2.

Повна система тотожностей алгебр класу N_0 екваціональна потужності, яка дорівнює нулю.

1. Алгебра $U_0 = \langle A, \emptyset\rangle$. $H(U_0) = \{x_i = x_i\}$.
2. Алгебра $U_1 = \langle A, 0\rangle$. $H(U_1) = \{x_i = x_i,\, 0 = 0\}$.
3. Алгебра $U_2 = \langle A, 1\rangle$. $H(U_2) = \{x_i = x_i,\, 1 = 1\}$.
4. Алгебра $U_3 = \langle A, 0, 1\rangle$. $H(U_3) = \{x_i = x_i, 0 = 0,\, 1 = 1\}$.
5. Алгебра $U_4 = \langle A, \neg\rangle$. $H(U_4) = \{x_i = x_i,\, \bar{\bar{x}} = x\}$.
6. Алгебра $U_8 = \langle A, \wedge\rangle$. $H(U_8) = \{x_i = x_i,\, x_1 x_1 = x_1, x_1 x_2 = x_2 x_1, (x_1 x_2)\, x_3 = = x_1\,(x_2 x_3)\}$.

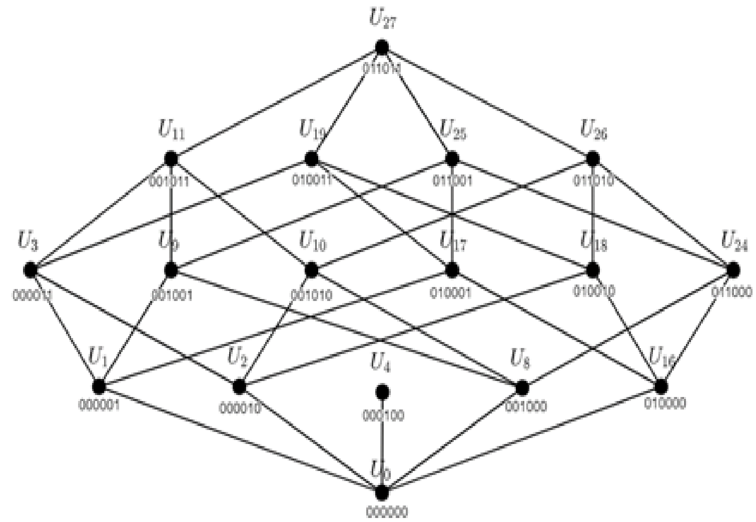

Рис. 2. Сигнатурний граф екваціональних алгебр потужності нуль.

7. Алгебра $U_{16} = \langle A, \vee \rangle$. $H(U_{16}) = \{x_i = x_i,\, x_1 \vee x_1 = x_1, x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\}$.
8. Алгебра $U_{17} = \langle A,\, \vee, 0\rangle.H(U_{16}) = \{H(U_{16}) \bigcup H(U_2),\, x \vee 1 = 1\}$.
9. Алгебра $U_9 = \langle A,\, \wedge, 0\rangle.H(U_9) = \{H(U_1) \bigcup H(U_8),\, 0 \wedge x = 0\}$.
10. Алгебра $U_{10} = \langle A,\, 1, \wedge\rangle.H(U_{10}) = \{H(U_8) \bigcup H(U_2),\, x \wedge 1 = x\}$.
11. Алгебра $U_{18} = \langle A,\, 1, \vee\rangle.H(U_{18}) = \{H(U_2) \bigcup H(U_{16}),\, x \vee 1 = 1\}$.
12. Алгебра $U_{24} = \langle A,\, \wedge, \vee\rangle$. $H(U_{24}) = \{H(U_8) \bigcup H(U_{16}), x_1 (x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee$ $\vee x_1x_3, x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3), x_1 \vee x_1x_2 = x_1,\, x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1\}$.
13. Алгебра $U_{11} = \langle A,\, 0, 1, \wedge\rangle.H(U_{11}) = \{H(U_9) \bigcup H(U_{10})\}$.
14. Алгебра $U_{19} = \langle A,\, 0, 1, \vee\rangle.H(U_{19}) = \{H(U_{17}) \bigcup H(U_{18})\}$.
15. Алгебра $U_{25} = \langle A,\, 0, \wedge, \vee\rangle.H(U_{25}) = \{H(U_9) \bigcup H(U_{17}) \bigcup H(U_{24})\}$.
16. Алгебра $U_{26} = \langle A,\, 1, \wedge, \vee\rangle.H(U_{26}) = \{H(U_{10}) \bigcup H(U_{18}) \bigcup H(U_{24})\}$.
17. Алгебра $U_{27} = \langle A,\, 0, 1, \wedge, \vee\rangle.H(U_{27}) = \{H(U_{11}) \bigcup H(U_{19}) \bigcup H(U_{25}) \bigcup H(U_{26})\}$.

Наслідок 1. *Повною системою тотожностей алгебри $U_{27} = \langle A,\, 0, 1, \wedge, \vee\rangle$ є система тотожностей, яка включає повні системи тотожностей алгебр $U_{11} = \langle A,\, 0, 1, \wedge\rangle$, $U_{19} = \langle A,\, 0, 1, \vee\rangle$, $U_{25} = \langle A,\, 0, \wedge, \vee\rangle$, $U_{26} = \langle A,\, 1, \wedge, \vee\rangle$.*

Виписавши тотожності цих алгебр, отримаємо систему:

1. $x_1 \vee x_1 = x_1$; $x_1 \wedge x_1 = x_1$.
2. $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$; $x_1x_2 = x_2x_1$.
3. $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$; $(x_1x_2)\, x_3 = x_1 (x_2x_3)$.
4. $(x_1 \vee x_2)\, x_3 = x_1x_3 \vee x_2x_3$; $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$.
5. $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$; $x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1$.
6. $0 \wedge x_1 = 0$; $1 \wedge x_1 = x_1$; $0 \vee x_1 = x_1$; $1 \vee x_1 = 1$.

Нехай F_1 і F_2 — формули алгебри U_{27}. Використовуючи тотожності (6), нуль і одиницю можна опустити або вони перетворяться у функції, які тотожно дорівнюють нулю або одиниці. За допомогою тотожностей (1–4) формули F_1 і F_2 зводяться до диз'юнктивної нормальної форми. Тотожності (5) дають можливість отримати диз'юнктивну нормальну форму, в якій кожна елементарна кон'юнкція не є власною частиною іншої. У роботі [6] показано, що таке представлення є єдиним відносно лексикографічного впорядкування.

Клас алгебр N_1, які мають екваціональну потужність 1, складається з двох алгебр $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$ і $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$. Сигнатурна тотожність $x \oplus x = 0$ дає можливість переходити від формули одної алгебри до інщої. Ці алгебри утворюють двохелементний екваціональний кластер.

18. Алгебра $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$. $H(U_{32}) = \{x_1 \oplus x_1 = x_2 \oplus x_2,\ x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1,\ x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2) = x_1, (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)\}$.
19. Алгебра $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$. $H(U_{33}) = \{x \oplus x = 0\,, H(U_{32})\}$.
    Трьохелементний кластер N_2 утворюють алгебри $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$, $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$ і $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$.
20. Алгебра $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$. $H(U_5) = \left\{\overline{\overline{x}} = x\right\}$. У цій алгебрі формули, за допомогою тотожності $\overline{\overline{x}} = x$, можуть бути приведені до формул вигляду $x,\ \bar{x},\ 0,\ \bar{0}$.
21. Алгебра $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$. $H(U_6) = \left\{\overline{\overline{x}} = x\right\}$. Формули можуть бути приведені до формул вигляду $x,\ \bar{x},\ 1,\ \bar{1}$.
22. Алгебра $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$. $H(U_7) = \left\{\overline{\overline{x}} = x,\ \bar{1} = 0,\ \bar{0} = 1\right\}$.

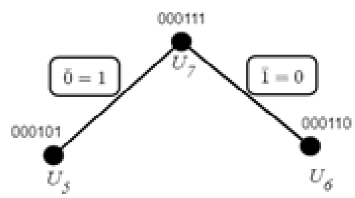

Рис. 3. Перший шестиелементний екваціональний кластер.

У класі M_6 побудовано два шістьелементних екваціональних кластери. Перший такий кластер N_3 утворюють алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$, $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee \rangle$, $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0 \rangle$, $U_{49} = \langle A, \oplus, \vee, 0 \rangle$, $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$, $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$. Цей екваціональний кластер можна зобразити у вигляді графа (рис. 4).

Алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$, $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee \rangle$ мають екваціональну потужність два, алгебри $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0 \rangle$, $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$ мають екваціональну потужність один, а алгебра $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$ має нульову екваціональну потужність. На ребрах графів вказані сигнатурні тотожності, які дають можливість перейти від сигнатури однієї алгебри до іншої.

У роботі [6] знайдена повна система тотожностей алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$. Вона складається з наступних тотожностей:

1. $x \oplus x = y \oplus y$.
2. $x \oplus y = y \oplus x$.
3. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
4. $y \oplus x \oplus x = y$.
5. $x \wedge x = x$.
6. $x \wedge y = y \wedge x$.
7. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.
8. $(x \oplus y) \wedge z = x \wedge z \oplus y \wedge z \oplus x \wedge y \wedge z$.
9. $x \oplus x \wedge y = x$.

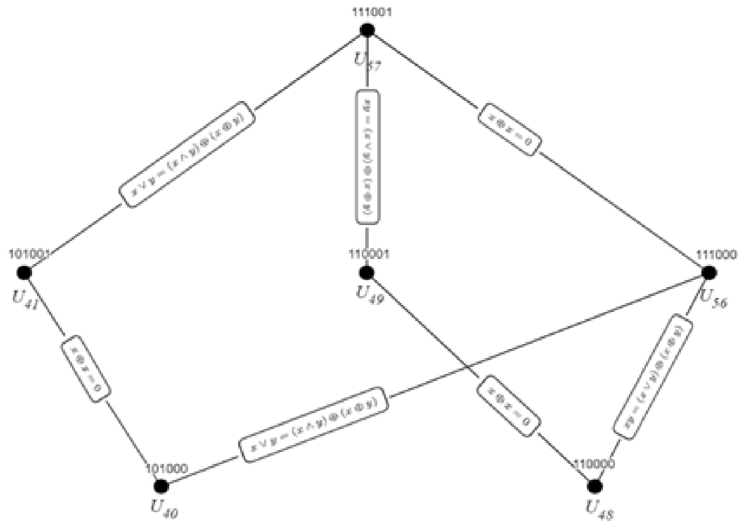

Рис. 4. Перший шестиелементний екваціональний кластер.

23. Алгебра $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$. $H\,(U_{40}) = \{1 - 9\}$.

Використаємо екваціональний кластер для знаходження повних систем тотожностей інших алгебр кластера. З теореми 1 випливає, що повні системи тотожностей алгебр $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0\rangle$, $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge\rangle$, $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0\rangle$ можемо отримати з повної системи тотожностей алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge\rangle$ приєднанням відповідних сигнатурних тотожностей, зображених на рисунку 4.

24. Алгебра $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0\rangle$. $H(U_{41}) = \{H(U_{40}) \bigcup x \oplus x = 0\}$.
25. Алгебра $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge\rangle$. $H(U_{56}) = \{H(U_{40}) \bigcup x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)\}$.
26. Алгебра $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0\rangle$. $H(U_{57}) = \{H(U_{41}) \bigcup xy = xy \oplus (x \oplus y)\}$, або
$$H(U_{57}) = \left\{H(U_{56}) \bigcup xy = x \oplus E = 0\right\}.$$

Доведемо на прикладі останньої алгебри, що повна система тотожностей алгебри $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0\rangle$ складається з повної системи тотожностей алгебри $U_8 = \langle A, \wedge\rangle$, яка доповнена тотожностями $x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)$ і $x \oplus E = 0$. Якщо за допомогою останніх тотожностей усунути операції $\vee$ і 0, то формули цієї алгебри перетворяться у формули алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge\rangle$.

27. Алгебра $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee\rangle$. $H(U_{48}) = \{H(U_{40}) \bigcup x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)$, $xy = (x \vee y) \oplus (x \oplus y)\}$.

Для того, щоб звести формули алгебри $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee\rangle$ до формул алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge\rangle$ необхідно у алгебрі $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge\rangle$ за допомогою сигнатурної тотожності $xy = (x \vee y) \oplus (x \oplus y)$ перейти до формул алгебри $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge\rangle$, а далі через сигнатурну тотожність $x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)$ до формул алгебри $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge\rangle$.

28. Алгебра $U_{49} = \langle A, \oplus, \vee, 0\rangle$. $H(U_{49}) = \{H(U_{48}) \bigcup x \oplus x = 0\}$.

Другий шестиелементний екваціональний кластер N_3 складається з алгебр $U_{34} = \langle A, \oplus, 1\rangle$, $U_{35} = \langle A, \oplus, 1, 0\rangle$, $U_{36} = \langle A, \oplus, \neg\rangle$, $U_{37} = \langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$, $U_{38} = \langle A, \oplus, \neg, 1\rangle$, $U_{39} = \langle A, \oplus, \neg, 1, 0\rangle$ класу M_6, який можемо зобразити у вигляді графа (рис. 5).

Наведемо повну систему тотожностей алгебри $U_{34} = \langle A, \oplus, 1\rangle$:

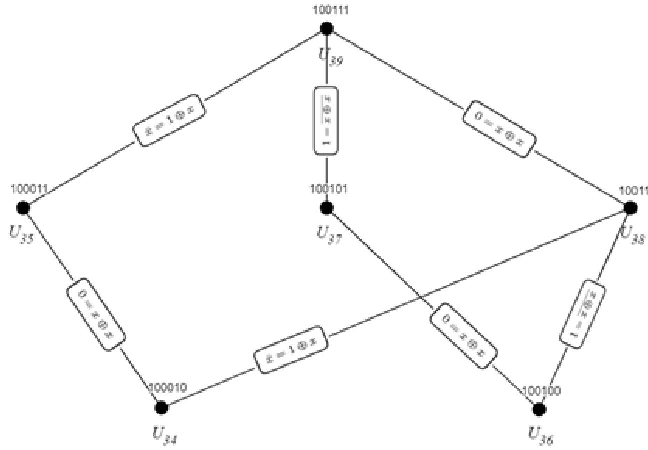

Рис. 5. Другий шестиелементний екваціональний кластер.

1. $x \oplus y = y \oplus x$.
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
3. $x \oplus x = y \oplus y = 1 \oplus 1$.
4. $x \oplus 1 \oplus 1 = x$.

Тотожність 4 дозволяє отримувати формули, до складу яких входить не більше одної одиниці. За допомогою тотожностей 1 і 2 проводимо лексикографічне впорядкування змінних. Довільну формулу можемо звести до вигляду $1 \oplus 1$ або $1 \oplus F$, або F, причому формула F не містить однакових доданків. Легко показати, що формули F_1 і F_2 утворюють тотожність тоді і тільки тоді, коли в результаті застосування алгоритму лексикографічно впорядковані формули F'_1 і F'_2 співпадають.

29. Алгебра $U_{34} = \langle A, \oplus, 1 \rangle$. $H(U_{34}) = \{1 - 4\}$.
30. Алгебра $U_{35} = \langle A, \oplus, 1, 0 \rangle$. $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), x \oplus x = 0\}$.
31. Алгебра $U_{38} = \langle A, \oplus, \neg, 1 \rangle$. $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), \bar{x} = x \oplus 1\}$.
32. Алгебра $U_{39} = \langle A, \oplus, \neg, 1, 0 \rangle$. $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), \bar{x} = x \oplus 1, x \oplus x = 0\}$.
33. Алгебра $U_{36} = \langle A, \oplus, \neg \rangle$. $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), \overline{x \oplus x} = 1, \bar{x} = x \oplus 1\}$.
34. Алгебра $U_{37} = \langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$. $H(U_{37}) = \{H(U_{36}), x \oplus x = 0\}$.

Теорема 2. *Функціонально неповні алгебри утворюють сімнадцять одноелементних екваціональних кластерів; один двохелементний, один трьохелементний і два шестиелементних екваціональних кластерів.*

3. Висновки. У даній роботі продовжено дослідження класу булевих алгебр, які включають шість операцій: константи 0 та 1, заперечення, кон'юнкцію, диз'юнкцію та суму за модулем два. Для класу даних алгебр введено поняття сигнатурних тотожностей і екваціонального кластера. За допомогою цих понять вдалося компактно описати всі повні системи тотожностей функціонально неповних булевих алгебр. Кожна із тридцяти чотирьох функціонально неповних алгебр входить в один із двадцяти одного кластера.

Список використаної літератури

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1935. Vol. 31. P. 433–454.

2. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 1, № 30. С. 79–86. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86
3. Мич І. А., Ніколенко В. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 2, № 31. С. 123–128. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128
4. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 1, № 32. С. 124–129. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129
5. Мич І. А., Ніколенко В. В. Екваціональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 2, № 33. С. 109–113. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113
6. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В. Сигнатурна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 2, № 33. С. 41–44. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44
7. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В., Денис В. С. Екваціональні дослідження нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2021. Вип. 2, № 37. С. 142–149. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149

Mych I. A., Nikolenko V. V., Vartsaba O. V. Equational description of functionally incomplete Boolean algebras.

The paper has been considered a class of algebras with operations sum taken absolutely two, disjunction, conjunction, negation, constants 0 and 1. The concepts of signature identity, which can be used to change the signature of algebras, and the concept of an equational cluster of algebras are introduced. All functionally incomplete algebras form twenty-one clusters. The paper has found all complete systems of identities for thirty-four functionally incomplete algebras.

Keywords: universal Boolean algebra, equationality, complete system of identities, signature identity, equational cluster.

References

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.,* 31, 433–454.
2. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 1(30), 79–86. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86 [in Ukranian].
3. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics,* 2(31), 123–128. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128 [in Ukranian].
4. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2018). Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 1(32), 124–129. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129 [in Ukranian].
5. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 2(33), 109–113. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113 [in Ukranian].
6. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Lattice signature of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 2(33), 41–44. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44 [in Ukranian].
7. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 2(37), 142–149. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149 [in Ukranian].

Одержано 03.05.2023