УДК 512.56
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).7-11

В. М. Бондаренко[1], М. В. Стойка[2], М. В. Стьопочкіна[3]

[1] Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,
доцент кафедри математики і інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
stoyka_m@yahoo.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0840-1496

[3] Поліський національний університет,
доцент кафедри вищої і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
stmar@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7270-9874

ПРО КОМБІНАТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН НАДСУПЕРКРИТИЧНОГО MM-ТИПУ НАЙМЕНШОГО ПОРЯДКУ

М. М. Клейнер довів, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду $(1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$, $(\mathrm{N},4)$, а Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина S є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4),(1,2,6)$, $(\mathrm{N},5)$. Ці ч. в. множини називаються відповідно критичними і суперкритичними.

Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних в тій самій мірі, що суперкритичні відрізняються від критичних, називаються надсуперкритичними. У цій статті ми вивчаємо деякі комбінаторні властивості ч. в. множин, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичним ч. в. множинам найменшого порядку.

Ключові слова: критичні, суперкритичні та надсуперкритичні ч. в. множини, мінімаксний ізоморфізм, граф Хассе, 0-довжина ланцюга.

1. Вступ. М. М. Клейнер [7] довів, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду $(1,1,1,1),(2,2,2),(1,3,3),(1,2,5)$ і $(И,4)$, які називаються критичними множинами; (P,Q) позначає ч. в. множину, яка є прямою сумою ч. в. множин P і Q, а $(i_1,i_2,\ldots,i_p)$ — ч. в. множину, яка є прямою сумою ланцюжків довжини $i_1,i_2,\ldots,i_p$. У [2] доведено, що ч. в. множина є критичною відносно додатності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна (чи, формально, більш точно — мінімаксно ізоморфна) критичній множині (поняття мінімаксної еквівалентності введено в [1]); в [2] всі такі ч. в. множини повністю описано.

Подібну ситуацію маємо і з ручними ч. в. множинами. Л. А. Назарова [8] довела, що ч. в. множина S ручна тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ і $(И,5)$; ці ч. в. множини називають надкритичними. У [3] доведено, що ч. в. множина є критичною відносно невід'ємності форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна суперкритичній ч. в. множині; всі такі критичні ч. в. множини описані в [4].

Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин у спосіб, яким суперкритичні ч. в. множини відрізняються від критичних, називаються надсуперкритичними. Точніше (див. [5]), це такі ч. в. множини: 1) $(1,1,1,1,1,1)$, 2) $(1,1,1,1,2)$, 3) $(1,1,2,2)$, 4) $(1,1,1,3)$, 5) $(2,3,3)$, 6) $(2,2,4)$, 7) $(1,4,4)$, 8) $(1,3,5)$, 9) $(1,2,7)$, 10) $(6,И)$.

У цій статті вивчаються комбінаторні властивості ч. в. множин S, які мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним ч. в. множинам шостого порядку, тобто множинам $A_0 = (1,1,2,2)$, $B_0 = (1,1,1,3)$, $C_0 = (1,1,1,1,2)$, $D_0 = (1,1,1,1,1,1)$. В цьому випадку кажуть, що S має відповідно MM-тип A_0, B_0, C_0, D_0. Іншими (більш загальними словами), в цій статті ми вивчаємо властивості ч. в. множин надсуперкритичного MM-типу найменшого порядку.

2. Формулювання основних результатів. Нехай S скінченна ч. в. множина. Її діаграмою Хассе називається орієнтований граф $H(S)$ з вершинами $x \in S$ і стрілками (x,y), $x,y \in S$, де y накриває x (тобто, $x < y$ і не існує z такого, що $x < z < y$). Ми називаємо 0-довжиною орієнтованого шляху графа Хассе $H(S)$ число його вершин і позначаємо через $l_{min}(S)$ (відповідно $l_{max}(S)$) 0-довжину найбільш короткого (відповідно довгого) орієнтованого шляху графа $H(S)$. Зауважимо, що шляхи довжини 1 також роглядаються. Ми позначаємо через $[S]^{\sim}$ множину всіх ч. в. множин мінімаксно еквівалентних ч. в. множині S (див. [1]) і покладаємо

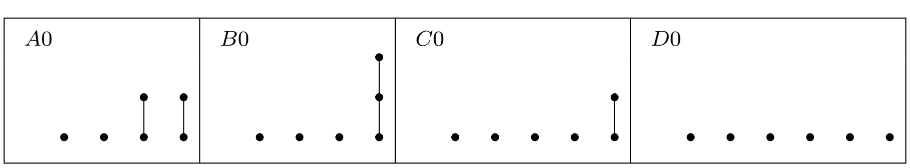
$$L_{min}(S) = min_{X \in [S]^{\sim}} l_{min}(X), \quad L_{max}(S) = max_{X \in [S]^{\sim}} l_{max}(X).$$

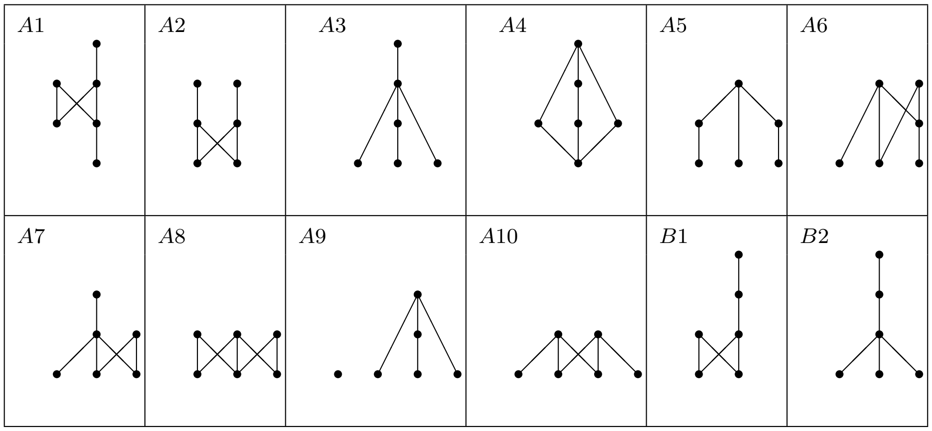
Число максимальних орієнтованих шляхів ч. в. множини X (тобто таких, що не належать орієнтованим шляхам більшої 0-довжини) позначається через $n(X)$.

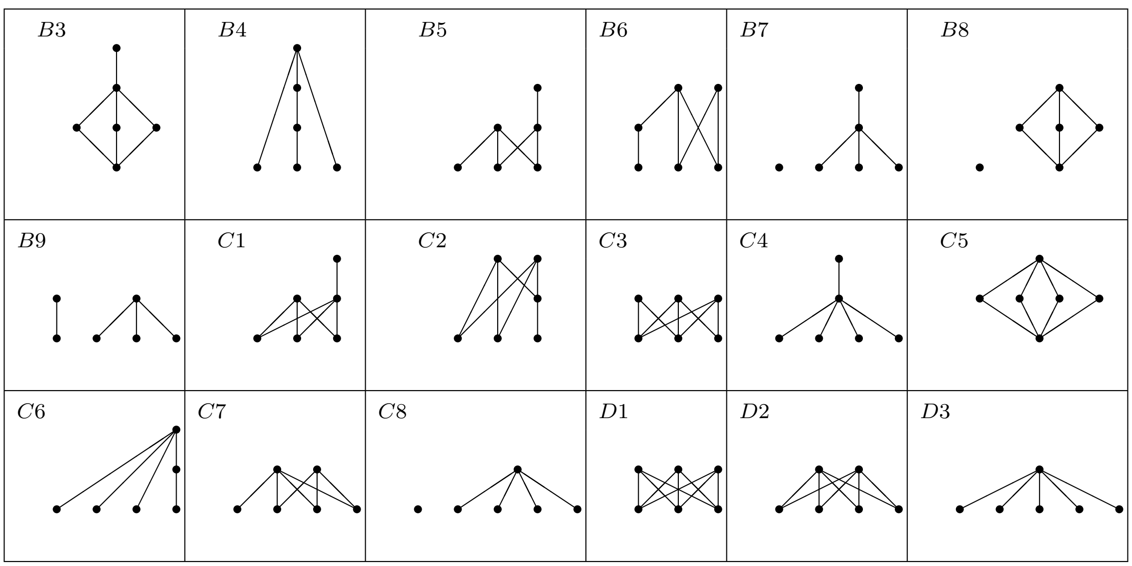
Теорема 1. *Нехай $S \in \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$. Тоді $L_{min}(S) = 1, L_{max}(S) = 4$ і для довільного $X \in [S]^{\sim}$, $1 \le l_{min}(X) \le 4$, $1 \le l_{max}(X) \le 4$, $1 \le n(X) \le 9$.*

3. Доведення теореми 1. З формальних міркувань (пов'язаних з нумерацією малюнків в таблицях) ми пишемо $A0, B0, C0, D0$ замість A_0, B_0, C_0, D_0.

Ч. в. множини, мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним ч. в. множинам шостого порядку (або, іншими словами, ч. в. множинам шостого порядку, що мають надсуперкритичний MM-тип), описані в [6]. Вони задаються з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) наступною таблицею.







Ми маємо таку теорему.

Теорема 2. *Для ч. в. множин* Ai, Bj, Ck, Ds *виконуеться наступне:*

N	l_{min}	l_{max}	n
$A0$	1	2	4
$B0$	1	3	4
$C0$	1	2	5
$D0$	1	1	6

N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n
$A1$	2	4	4	$B1$	2	4	4	$C2$	2	3	6
$A2$	3	3	4	$B2$	4	4	3	$C3$	2	2	8
$A3$	3	4	3	$B3$	4	4	1	$C4$	3	3	4
$A4$	3	4	1	$B4$	2	4	3	$C5$	3	3	1
$A5$	2	3	3	$B5$	2	3	5	$C6$	1	3	4
$A6$	2	3	5	$B6$	2	3	5	$C7$	2	2	7
$A7$	2	3	5	$B7$	1	3	4	$C8$	1	2	5
$A8$	2	2	7	$B8$	1	3	2	$D1$	2	2	9
$A9$	1	3	4	$B9$	2	2	4	$D2$	2	2	8
$A10$	2	2	6	$C1$	2	3	6	$D3$	2	2	5

Теорема 2 доводиться за допомогою безпосередніх обчислень

Теорема 1 випливає із теореми 2.

4. Висновки. У статті описуються комбінаторні властивості. ч. в. множин, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичним ч. в. множинам найменшого порядку. Результати та методи їх доведення можуть бути застосовані для інших класів ч. в. множин.

Список використаної літератури

1. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics).* 2005. No. 1. P. 24–25.
2. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.
3. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса. *Укр. мат. журнал.* 2008. Т. 60, № 9. С. 1157–1167.
4. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Укр. мат. журнал.* 2009. Т. 61, № 5. С. 734–746.
5. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В. Черв'яков І. В. 1-надсуперкритичні частково впорядковані множини з тривіальною групою автоморфізмів і min-еквівалентність. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика.* 2011. Т. 22, № 2. С. 17–25.
6. Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В. Про частково впорядковані множини шостого порядку, що мають надсуперкритичний ММ-тип. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2021. Т. 38, № 1. С. 7–15.
7. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ.* 1972. Т. 28. С. 32–41.
8. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР.* 1975. Т. 39, № 5. С. 963–991.

Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V. On combinatorial properties of the posets of oversupercritical MM-type of smallest order.

M. M. Kleiner proved that a poset S has finite representation type if and only if it does not contain subposets of the form $(1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$, $(\mathrm{N},4)$, and L. A. Nazarova proved that a poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4), (1,2,6)$, $(\mathrm{N},5)$. These posets are called, respectively, critical and supercritical.

The posets which differ from the supercritical posets in the same degree as the supercritical posets differ from the critical ones, are caleed oversupercritical. In this paper, we study some combinatorial properties of the posets that are minimax isomorphic to the oversupercritical posets of the smallest order.

Keywords: critical, supercritical and oversupercritical posets, minimax isomorphism, Hasse graph, 0-length of a chain.

References

1. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics),* 1, 24–25 [in Russian].
2. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form, *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr./Problems of Analysis and Algebra. Institute of Mathematics of NAN of Ukraine,* 2(3), 18–58. [in Russian].
3. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2008). (Min, max)-equivalency of posets and nonnegative Tits forms *Ukrainian Math. J.,* 60(9), 1349–1359.
4. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukrainian Math. J.,* 61(5), 734–746.
5. Bondarenko, V. V., Bondarenko, V. M., Stepochkina, M. V., & Chervyakov, I. V. (2011). 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.,* 22(2), 17–25. [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2021) On posets of sixth order having oversupercritical MM-type. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.,* 38(1), 7–15.
7. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauch. Semin. LOMI,* 28, 32–41. [in Russian].
8. Nazarova, L. A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* 39(5), 963–991. [in Russian].

Одержано 25.04.2023