УДК 512.56
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).45-53

М. М. Капустей[1], П. В. Слюсарчук[2], Т. В. Бояріщева[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
здобувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
m.kapustey@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4438-3395

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
petro.slyusarchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9235-1497

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2899-4900

ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ В ТЕРМІНАХ ЗРІЗАНИХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин в термінах усереднених псевдомоментів. У роботі [1] одержано узагальнення нерівності Беррі-Ессеена із використанням різного вогляду псевдомоментів. Завдяки роботі [1] псевдомоменти набули широкого застосування у граничних теорремах. У роботі [2] розглядаються умови, при виконанні яких швидкість збіжності буде вищою, ніж у нерівності Беррі-Ессеена. Псевдомоменти знайшли застосування до оцінки швидкості збіжності цін опціонів [3]. У роботах [4] і [5] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [1] для різнорозподілених випадкових величин. У даній роботі ми узагальнюємо результати [1] на послідовність серій незалежних в кожній серії різнорозподілених випадкових величин, при цьому узагальнюються результати робіт [4] і [5].

Ключові слова: центральна гранична теорема, швидкість збіжності, псевдомомент.

1. Вступ. Застосування псевдомоментів до дослідження швидкості збіжності у граничних теоремах дозволяє вивчати поведінку законів розподілу випадкових величин різної природи: як однаково, так і різно розподілених. У даній роботі розглядається послідовність серій випадкових величин, що є різно розподіленими і в кожній серії незалежними. Для оцінки швидкості збіжності розподілу їх сум до нормального використано псевдомоменти так званого урізаного виду, перевага яких у тому, що вони краще враховують близькість розподілів до граничного в околі нуля.

2. Основний результат. Розглянемо послідовність серій $\xi_{n_1}, \ldots \xi_{n_n}$ незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями $M\xi_{n_i} = 0$, дисперсіями $D\xi_{n_1} = \sigma_{n_1}^2$, $\sigma_{n_i} > 0$, $\sum_{i=1}^n \sigma_{n_i}^2 = 1$, $\bar{\sigma}_n = \max \sigma_{n_1}, \ldots, \sigma_{n_n}$. Розглянемо послідовність серій $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями $M\xi_{ni} = 0$, дисперсіями $D\xi_{ni} = \sigma_{ni}^2$, $\sigma_{ni} > 0$, $\sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 = 1$, $\bar{\sigma}_n = \max\{\sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nn}\}$. Позначимо: $F_{ni}(x)$ — функція розподілу ξ_{ni}, $f_{ni}(t)$ — характеристична функція ξ_{ni}, $S_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ — функція розподілу S_n; $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$. Для довільного $y > 0$ визначимо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{nk}^{(1)}(y) = \int\limits_{|x|\le y} \max(1, |x|^3)|d(F_{nk}(x\sigma_{nk} - \Phi(x))|,$$

$$\nu_{nk}^{(2)}(y) = \int\limits_{|x|> y} \max(1, x^2)|d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|,$$

$$\bar{\nu}_n^{(1)}(y) = \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(1)}(y),\ \ \bar{\nu}_n^{(2)}(y) = \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(2)}(y).$$

Теорема 1. *Нехай $\bar{\sigma}_n^2 \le \frac{3}{4}$ при $n \ge 2$. Тоді існує стала C, що для всіх $n \ge 1$*

$$\rho_n \le C \inf_{y>0} (\bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(y) + \bar{\nu}_n^{(2)}(y)).$$

Доведення. При доведенні будемо використовувати наступні нерівності, що справедливі для всіх $t \in R$. Враховуючи, що $M\xi_{nk} = 0$, $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$,

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sigma_{nk}} d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} - \frac{(itx\sigma_{nk})^2}{2} \right) d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| \le$$

$$\le \int\limits_{|x|\le y} \left| e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} - \frac{(itx\sigma_{nk})^2}{2} \right| |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| +$$

$$+ \int\limits_{|x|> y} \left| e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} - \frac{(itx\sigma_{nk})^2}{2} \right| |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| \le$$

$$\le \int\limits_{|x|\le y} \frac{|tx\sigma_{nk}|^3}{6} |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| + \int\limits_{|x|> y} (tx\sigma_{nk})^2 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| =$$

$$= \frac{1}{6}|t|^3\sigma_{nk}^3 \int\limits_{|x|\le y} |x|^3 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| + t^2\sigma_{nk}^2 \int\limits_{|x|> y} |x|^2 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| \le$$

$$\le \nu_{nk}^{(1)}(y)\frac{1}{6}|t|^3\sigma_{nk}^3 + \nu_{nk}^{(2)}(y) t^2 \sigma_{nk}^2. \tag{1}$$

Аналогічно,

$$\omega_{nk}(t) = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} \right) d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| \le$$

$$\leq \frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\left|d(F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x))\right| \leq \frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}\left(\nu_{nk}^{(1)}(y)+\nu_{nk}^{(2)}(y)\right). \qquad (2)$$

$$\omega_{nk}(t)=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sigma_{nk}}d(F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x))\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|d(F_{nk}(x\sigma_{nk})-\Phi(x))\right| \leq$$

$$\leq \nu_{nk}^{(1)}(y)+\nu_{nk}^{(2)}(y). \qquad (3)$$

У нерівності ([6], ст. 299)

$$|F(x)-G(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{T}|f(t)=g(t)|\,\frac{dt}{t}+\frac{24\sup\limits_{x}|G'(x)|}{\pi T},$$

покладемо $F(x)=\Phi_n(x)$, $G(x)=\Phi(x)$, $f(t)=\prod\limits_{k=1}^{n} f_{nk}(t)$, $g(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \qquad (4)$$

Із нерівності

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i-\prod_{i=1}^{n} b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|\left(\prod_{k=1}^{i-1}|b_k|\right)\left(\prod_{k=i+1}^{n}|a_k|\right),$$

і із умови (1) теореми

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|=\left|\prod_{i=1}^{n} f_{ni}(t)-\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{ni}^2}{2}}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}(t)\prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\prod_{k=i+1}^{n}|f_{nk}(t)| \leq \sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}(t)\psi_{ni}(t), \qquad (5)$$

де

$$\psi_{ni}(t)=\prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\prod_{k=i+1}^{n}|f_{nk}(t)|.$$

Позначимо $\bar\nu_n(y)=\max\left\{\bar\nu_n^{(1)}(y),\bar\nu_n^{(2)}(y)\right\}$. Нехай $n\geq 2$, $c\in\left(0;e^{-9n\bar\sigma_n^2}\right]$ — довільна стала. Будемо припускати, що $\bar\nu_n^{(2)}(y)\leq c$, бо у протилежному випадку теорема є справедливою.

Покладемо $T_n^{(1)}=\frac{1}{\bar\sigma_n}\sqrt{-2\ln\bar\nu_n(y)}$, якщо $\bar\nu_n^{(1)}(y)\leq c$, і $T_n^{(2)}=\frac{1}{\bar\sigma_n}\frac{c}{\bar\nu_n^{(1)}(y)}$, якщо $\bar\nu_n^{(1)}(y)>c$.

Нехай $n\geq 2$, $\bar\nu_n^{(1)}(y)>c$. Із нерівності

$$|f_{nk}(t)|=\left|f_{nk}(t)-e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}+e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\right| \leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}+\omega_{nk}(t), \qquad (6)$$

і (1) при $|t| \le T_n^{(2)}$

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2\sigma_{nk}^2\nu_{nk}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{\left(T_n^{(2)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(T_n^{(2)}\frac{t^2\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2\sigma_{nk}^2 c\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + t^2\sigma_{nk}^2\sqrt{e}\left(\frac{c}{\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}\frac{1}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + c\right)\right).$$

Тоді

$$\psi_{ni}(t) = \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} |f_{nk}(t)| \le$$

$$\le \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + t^2\sigma_{nk}^2\sqrt{e}\left(\frac{c}{\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}\frac{1}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + c\right)\right) \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1-\sigma_{ni}^2) + t^2\sqrt{e}\frac{7c}{6}\right\} \le e^{-c_2t^2}, \qquad (7)$$

де $c_2 = \frac{1}{8} - \frac{7}{6}\sqrt{e}c > 0$.

Із (5) і (7) при $\bar{\nu}_n^{(1)} > c$, $|t| \le T_n^{(2)}$ і $n \ge 2$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2\sigma_{nk}^2\nu_{nk}^{(2)}(y)\right)e^{-c_2t^2} \le$$

$$\le \left(\frac{|t|^3}{6}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + t^2\bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right)e^{-c_2t^2}. \qquad (8)$$

Нехай $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) > c$ і $n \ge 2$. Покладемо у (4) $T = T_n^{(2)}$. Із (4) і (8)

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^{T_n^{(2)}} \left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_n^{(2)}} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^{T_n^{(2)}} \left(\frac{t^2}{6}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + t\bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right)e^{-c_2t^2}dt +$$

$$+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\frac{\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}{c} \le C_3\left(\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + \bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right),$$

де надалі C_k — сталі, що залежать тільки від c.

У випадку $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) > c$ і $n \ge 2$ теорема доведена.

Нехай $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \le c$, $n \ge 2$. Із (2) і (6) при $|t| \le T_n^{(1)}$

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\frac{1}{2}t^2\sigma_{nk}^2\left(\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(1+e^{\frac{\left(T_n^{(1)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{4}}\frac{1}{2}t^2\sigma_{nk}^2\left(\nu_{nk}^{(1)}(y)+\nu_{nk}^{(2)}(y)\right)\right)\leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(1+(\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^2\sigma_{nk}^2\left(\nu_{nk}^{(1)}(y)+\nu_{nk}^{(2)}(y)\right)\right).$$

Тоді, із умови $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$, при $n \geq 2$, дістанемо

$$\psi_{ni}(t)\leq\prod_{k=1}^{i-1}e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\prod_{k=i+1}^{n}e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(1+(\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^2\sigma_{nk}^2\left(\nu_{nk}^{(1)}(y)+\nu_{nk}^{(2)}(y)\right)\right)\leq$$

$$\leq\exp\left\{-\frac{t^2}{4}(1-\sigma_{ni}^2)+(\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^2\left(\bar{\nu}_n^{(1)}(y)+\bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right)\right\}\leq$$

$$\leq\exp\left\{-\frac{t^2}{4}\left(1-\sigma_{ni}^2\right)+t^2\sqrt{\bar{\nu}_n(y)}\right\}\leq\exp\left\{-t^2\left(\frac{1}{16}-\sqrt{c}\right)\right\}=e^{-c_1t^2}, \tag{9}$$

де $c_1 = \frac{1}{16} - \sqrt{c} > 0$.

Із (5) і (9) при $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$, $|t| \leq T_n^{(1)}$ і $n \geq 2$ маємо

$$\left|\prod_{k=1}^{n}f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y)+t^2\sigma_{nk}^2\nu_{nk}^{(2)}(y)\right)e^{-c_1t^2}\leq$$

$$\leq\left(\frac{|t|^3}{6}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y)+t^2\bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right)e^{-c_1t^2}. \tag{10}$$

Покладемо у (4) $T = \frac{c}{\bar{\sigma}_n}\,(\bar{\nu}_n(y))^{-1}$, $T' = \min\left\{T; T_n^{(1)}\right\}$. Тоді із (4)

$$\rho_n\leq\frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\prod_{k=1}^{n}f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}\leq$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{T'}\left|\prod_{k=1}^{n}f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t}+\frac{2}{\pi}\int_{T'}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n}f_{nk}(t)\right|\frac{dt}{t}+\frac{2}{\pi}\int_{T'}^{T}e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n(y)=I_1+I_2+I_3+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n(y). \tag{11}$$

Оскільки $T' \leq T_n^{(1)}$, то із (10)

$$I_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{T'}\left|\prod_{k=1}^{n}f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t}\leq$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{T'}\left(\frac{t^2}{6}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y)+t\bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right)e^{-c_1t^2}dt\leq C_4\left(\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y)+\bar{\nu}_n^{(2)}(y)\right). \tag{12}$$

Із (1) і (6) при $\bar{\nu}_n(y) \le c$ і $|t| > T_n^{(1)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n}\sqrt{-2\ln\bar{\nu}_n(y)}$

$$\left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)\right| \le \prod_{k=1}^n \left(e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t)\right) \le$$

$$\le \prod_{k=1}^n \left(e^{-\frac{\left(T_n^{(1)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{2}} + \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y)\right) = \prod_{k=1}^n \left((\bar{\nu}_n(y))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} + \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y)\right) =$$

$$= (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \prod_{k=1}^n \left(1 + (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}}(\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y))\right),$$

і, використавши нерівність $x_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\prod\limits_{i=1}^n x_i \le \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^n$, одержимо

$$\left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)\right| \le (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left(1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}}(\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y))\right)^n \le$$

$$\le (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left(1 + (\bar{\nu}_n(y))^{-1}\bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n (\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y))\right)^n \le (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} 3^n. \qquad (13)$$

Оскільки $\bar{\nu}_n(y) \le c \le e^{-9n\bar{\sigma}_n^2} \le e^{-9}$ і $|t| > T_n^{(1)}$, то

$$|t|\bar{\sigma}_n > \bar{\sigma}_n T_n^{(1)} = \sqrt{-2\ln\bar{\nu}_n(y)} \le \sqrt{-2\ln c} \ge \sqrt{18}.$$

Будемо вважати, що $T' = T_n^{(1)}$, бо інакше $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, і справедливість теореми випливає із (11), (12). Із (13) (враховуємо, що $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$)

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{3^n 2}{\pi}(\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} t^{-1}dt =$$

$$= \frac{3^n 2}{\pi}(\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} t^{-\frac{8}{9}-\frac{1}{9}}dt \le \frac{3^n 18}{\pi}(\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left(T_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{9}} T^{\frac{1}{9}} \le$$

$$\le \frac{3^n 18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}-\frac{1}{9}} c^{\frac{1}{9}} \le \bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n(y)\frac{18}{\pi}18^{-\frac{1}{18}}c^{-1}\frac{1}{\bar{\sigma}_n}3^n c^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \le$$

$$\le \bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n(y)\frac{18}{\pi}18^{-\frac{1}{18}}c^{-1}\sqrt{n}(3e^{-9})^n \le \bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n(y)\frac{1}{\pi}18^{1-\frac{1}{18}}c^{-1}\sqrt{2}(3e^{-9})^2. \qquad (14)$$

Враховуючи, що $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \le c$, $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$ і $\bar{\sigma}_n^2 \le \frac{3}{4}$ при $n \le 2$, одержимо

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\left(T_n^{(1)}\right)^{-2} e^{-\frac{1}{2}\left(T_n^{(1)}\right)^2} = \frac{2}{\pi}\left(T_n^{(1)}\right)^{-2}(\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \le$$

$$\le \frac{1}{9\pi}\bar{\sigma}_n^2(\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \le \frac{1}{9\pi}\bar{\sigma}_n^2(\bar{\nu}_n(y))^{\frac{4}{3}} \le \bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n(y)\frac{1}{9\pi}c^{\frac{1}{3}}. \qquad (15)$$

У випадку $n \geq 2$, $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$ теорема випливає із (11), (12), (14), (15).

Нехай $n = 1$. Тоді σ_{11}^2 і

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F_{11}(x) - \Phi(x)| = \sup_x \left| \int\limits_{-\infty}^{x} d\left(F_{11}(u) - \Phi(u)\right) \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d\left(F_{11}(x) - \Phi(x)\right)| \leq \nu_{11}^{(1)}(y) + \nu_{11}^{(2)}(y).$$

Теорема доведена.

Введемо позначення

$$\check{\nu}_n^{(1)}(y) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^3 \nu_{nk}^{(1)}(y), \quad \check{\nu}_n^{(2)}(y) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 \nu_{nk}^{(2)}(y).$$

3. Деякі наслідки. У теоремі покладемо $y = \bar{\sigma}_n^{-1}$.

Наслідок 1. *Нехай $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$, при $n \geq 2$. Тоді для всіх $n \geq 1$*

$$\rho_n \leq C\left(\bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(\bar{\sigma}_n^{-1}) + \bar{\nu}_n^{(2)}(\bar{\sigma}_n^{-1})\right).$$

Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{nk}^{(0)}(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|, \quad \bar{\nu}_n^{(0)}(r) = \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_{nk}^{(0)}(r).$$

Наслідок 2. *Нехай $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ для $n \geq 2$, $2 < r \leq 3$. Тоді для всіх $n \geq 1$*

$$\rho_n \leq C \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\nu}_n^{(0)}(r).$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням $M\xi_i = 0$, дисперсією $D\xi_i = \sigma_i^2$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Позначимо через $F_k(x)$ функцію розподілу випадкової величини ξ_k і покладемо $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$. Тоді

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{B_n}, \quad F_{nk}(x) = F_k(xB_n),$$

$$\sigma_{nk}^2 = \frac{\sigma_k^2}{B_n^2}, \quad \bar{\sigma}_n^2 = \frac{\sigma^2}{B_n^2}, \quad \sigma = \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k.$$

$$\nu_k^{(0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_k(x\sigma_k) - \Phi(x))|, \quad \bar{\nu}_n^{(0)}(r) = \frac{\sigma^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \nu_k^{(0)}(r).$$

Наслідок 3. *Нехай $\frac{\sigma^2}{B_n^2} \leq \frac{3}{4}$ для $n \geq 2$. Тоді*

$$\rho_n \leq C\left(\frac{\sigma}{B_n}\right)^{r-2} \bar{\nu}_n^{(0)}(r).$$

4. Висновки. У роботі отримано оцінки швидкості збіжності розподілів послідовностей сум випадкових величин в схемі серій. Результати сформульовано в термінах псевдомоментів урізаного типу. Одержані оцінки можуть бути використані при дослідженні збіжності послідовностей випадкових величин з іншими властивостями.

Список використаної літератури

1. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem : Lecture Notes in Mathematics. Vol. 330. Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Berlin. Heidelberg : Springer, 1973. P. 531–543. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0061516
2. Mishura Y., Munchak Y., Slyusarchuk P. The rate of convergence to the normal law in therms of pseudomoments. *Modern Stochastics: Theory and Applications.* 2015. Vol. 2, No. 2. P. 95–106. DOI: https://doi.org/10.15559/15-VMSTA23
3. Мішура Ю., Мунчак Є. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів. *Теорія ймовірностей і математична статистика.* 2015. Вип. 92. С. 110–124.
4. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для послідовності серій в термінах середніх псевдомоментів. *Теорія ймовірностей і математична статистика.* 2018. Вип. 2, № 69. С. 91–100.
5. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Точність наближення в центральній теоремі в термінах усереднених псевдомоментів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 2, № 33. С. 78–87.
6. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Узагальнення одного результату В. М. Золотарьова *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика».* 1998. Вип. 3. С. 184–189.
7. Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика».* 1999. Вип. 4. С. 12–16.
8. Bojarishcheva T. V., Slyusarchuk P. V. The approximation of convergence of sums to the normal law. *Theory of stochastic processes.* 2003. Vol. 9(25), No. 3–4. P. 206–210.

Kapustey M. M., Slyusarchuk P. V., Boiaryshcheva T. V. Exactness of an approximation in the central limit theorem in the term of axe middle pseudomoments.

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem generalized for sequences series random variables in the term of middle pseudomoments. In the paper [1] a generalization of the Barry-Esseen inequality was obtained using a different kind of pseudomonitors. Due to the work [1], pseudomoments have become widely used in the limit theorems; a detailed bibliography is contained in [1]. In [2] we consider the conditions in which the convergence rate will be higher than in the Barry-Esseen inequality. Pseudomoments have been used to estimate the convergence rate of options prices [3]. In papers [4] and [5] different approaches to generalizing the results from [1] for variously distributed random variables are considered. In this paper we summarize the results of work [1] on a sequence of independent series in each series of randomly distributed random variables, while the results of works [4] and [5] are substantially generalized.

Keywords: central limit theorem, rate of convergence, pseudomoment.

References

1. Zolotarev, V. M. (1973). Exactness of an approximation in the central limit theorem. In Maruyama, G., Prokhorov, Y. V. (eds). *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory.* (Vol. 330). Berlin. Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/BFb0061516 [in German].
2. Mishura, Yu., Munchak, Ye., & Slyusarchuk, P. (2015). The rate of convergence to the normal

law in therms of pseudomoments. *Modern Stochastics: Theory and Applications,* 2(2), 95–106. https://doi.org/10.15559/15-VMSTA23

3. Mishura, Yu., & Munchak, Ye. (2015). The rate of convergence of option prices using the method of pseudo-moments. *Probability theory and mathematical statistics,* 92, 110–124. [in Ukrainian].
4. Kapustei, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). Estimation of the speed of convergence in the central limit theorem for a sequence of series in terms of average pseudo moments. *Probability theory and mathematical statistics,* 2(69), 91–100. [in Ukrainian].
5. Kapustei, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). Accuracy of the approximation in the central theorem in terms of averaged pseudo-moments. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Mathematics and computer science series,* 2(33), 78–87. [in Ukrainian].
6. Slyusarchuk, P. V., & Polyak, I. Y. (1998). Generalization of one result by V. M. Zolotaryov. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Mathematics and computer science series,* 3, 184–189. [in Ukrainian].
7. Boyarishcheva, T. V., & Slyusarchuk, P. V. (1999). Estimation of the speed of convergence in the central limit theorem for differently distributed quantities. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Mathematics series and computer science series,* 4, 12–16. [in Ukrainian].
8. Bojarishcheva, T. V., & Slyusarchuk, P. V. (2003). The approximation of convergence of sums to the normal law. *Theory of stochastic processes,* 9(25(3–4)), 206–210. [in Ukrainian].

Одержано 04.05.2023