УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).22-28

М. Ф. Городній[1], О. А. Печериця[2]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
horodnii@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9991-910X

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
pecheritsa.aleksey@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7016-9854

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Отримано достатні умови існування єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку одного нелінійного диференціального рівняння з кусково-сталим операторним коефіцієнтом у лінійній частині.

Ключові слова: банахів простір, нелінійне диференціальне рівняння, обмежений розв'язок, лінійний неперервний оператор, кусково-сталий операторний коефіцієнт.

1. Вступ. Нехай $(X, \ \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — банахів простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X, $C_b(\mathbb{R}, X)$ — банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x : \mathbb{R} \to X$ з нормою $\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$.

Зафіксуємо натуральне число p, оператори $A, B; A_k, 1 \le k \le p$, з $L(X)$, дійсні числа $t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, покладемо $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\backslash\{t_0, t_1, \ldots, t_p\}$ і розглянемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = T(t)x(t) + f(t, x(t), y(t)), \ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в якому $T(t) = A, \ t \ge t_p$; $T(t) = A_k, \ t_{k-1} \le t \le t_k, \ 1 \le k \le p$; $T(t) = B, \ t < t_0$; $f : \mathbb{R} \times X \times X \to X$ — деяке відображення; y — фіксована функція з $C_b(\mathbb{R}, X)$. Обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1) будемо називати таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Мета цієї статті — отримати достатні умови для операторів $A, B; A_k, 1 \le k \le p$, і відображення f, які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. Для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ диференціальне рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок.

Для лінійного диференціального рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом, частковим випадком якого є рівняння

$$x'(t) = T(t)x(t) + y(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

умова обмеженості та її зв'язок з умовою експоненціальної дихотомії досліджувались, зокрема, в [1], [2], [3], [4], [5]. Різні підходи до дослідження існування обмежених розв'язків нелінійних аналогів таких рівнянь можна знайти в [3], [4], [5].

2. Зображення диференціального рівняння (2) **в еквівалентному операторному вигляді.** Зазначимо, що коли x є відповідним до $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ обмеженим розв'язком диференціального рівняння (2), то додатково x' є неперервною функцією на $\widehat{\mathbb{R}}$ і

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|x'(t)\| \leq L\|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

де $L = \max\{\|A\|, \|B\|, \|A_k\|,\ 1 \leq k \leq p\}$.

Позначимо через Y набір усіх функцій $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$ таких, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $u'(t)$, u' — неперервна функція на $\widehat{\mathbb{R}}$ і $\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|x'(t)\| < +\infty$. Легко переконатися, що Y — лінійний нормований простір з поточковим додаванням і множенням на комплексне число і нормою

$$\|u\|_Y = \|u\|_\infty + \sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'(t)\|.$$

Далі використовується така лема.

Лема 1. $(Y,\ \|\cdot\|_Y)$ — *банахів простір.*

Доведення. Нехай $\{u_m,\ m \geq 1\}$ — фундаментальна послідовність елементів Y. З означення $\|\cdot\|_Y$ випливає, що тоді послідовність $\{u_m,\ m \geq 1\}$ є фундаментальною і в банаховому просторі $C_b(\mathbb{R}, X)$, а отже, знайдеться така функція $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що

$$\|u_m - u\|_\infty \to 0,\ m \to \infty. \tag{3}$$

Доведемо що для кожного фіксованого $t_* \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $u'(t_*)$, а також u' є неперервною функцією на $\widehat{\mathbb{R}}$. Зафіксуємо такі дійсні числа a, b, що $a < t_* < b$, $[a, b] \subset \subset \widehat{\mathbb{R}}$. Знову скориставшись фундаментальністю послідовності $\{u_m,\ m \geq 1\}$ в просторі Y, робимо висновок, що послідовність $\{u_m(t),\ t \in [a, b],\ m \geq 1\}$ є фундаментальною в банаховому просторі $C^1([a, b], X)$ усіх неперервно диференційовних за нормою на $[a, b]$ функцій $v : [a, b] \to X$ з нормою

$$\|v\|_{C^1} = \max_{t \in [a,b]} \|v(t)\| + \max_{t \in [a,b]} \|v'(t)\|.$$

Тому, з урахуванням (3), існує $u'(t_*)$, $u'_m(t_*) \to u'(t_*)$, $m \to \infty$, а також функція $u' : \widehat{\mathbb{R}} \to X$ неперервна на $\widehat{\mathbb{R}}$.

Зазначимо тепер, що при фіксованому $\varepsilon > 0$ внаслідок фундаментальності $\{u_m,\ m \geq 1\}$ в просторі Y

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall m \geq m_0\ \ \forall q \geq 1\ \ \forall t \in \widehat{\mathbb{R}} : \|u'_m(t) - u'_{m+q}(t)\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Перейшовши в (4) до границі при $q \to \infty$, матимемо:

$$\forall m \geq m_0\ \ \forall t \in \widehat{\mathbb{R}} : \|u'_m(t) - u'(t)\| \leq \varepsilon.$$

Тому

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'(t)\| \leq \varepsilon + \sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'_{m_0}(t)\|, \tag{5}$$

а також

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'_m(t) - u'(t)\| \to 0,\ m \to \infty. \tag{6}$$

Із (3), (5), (6) випливає, що $u \in Y$ і $u_m \to u$, $m \to \infty$, в Y.

Лему 1 доведено.

Нехай лінійне диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості. Покладемо

$$D(\mathcal{L}) = \{x \in Y \mid \text{існує така функція } y \in C_b(\mathbb{R}, X), \text{ що}$$
$$x \text{ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (2), відповідний до } y\}$$

і визначимо лінійний оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset Y \to C_b(\mathbb{R}, X)$ за таким правилом. Для кожної функції $x \in D(\mathcal{L})$ $\mathcal{L}x$ — така функція з $C_b(\mathbb{R}, X)$, що

$$(\mathcal{L}x)(t) = x'(t) - T(t)x(t),\ t \in \widehat{\mathbb{R}}.$$

При цьому диференціальне рівняння (2) записується в операторному вигляді $\mathcal{L}x = y$.

Лема 2. *Якщо диференціальне рівняння* (2) *задовольняє умову обмеженості, то оператор* $\mathcal{L}$ *замкнений.*

Доведення. Зафіксуємо таку послідовність $\{x_m,\ m \geq 1\} \subset D(\mathcal{L})$, що $x_m \to x,\ m \to \infty$, в Y і $\mathcal{L}x_m \to y,\ m \to \infty$, в $C_b(\mathbb{R}, X)$. Скориставшись означенням $\|\cdot\|_Y$, робимо висновок, що для функції $\tilde{y}(t) = x'(t) - T(t)x(t),\ t \in \widehat{\mathbb{R}}$, справджується співвідношення

$$\sup_{t\in\widehat{\mathbb{R}}} \|(\mathcal{L}x_m)(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \sup_{t\in\widehat{\mathbb{R}}} \|x_m'(t) - x'(t)\| + \max_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\| \cdot \|x_m - x\|_\infty \to 0,\ m \to \infty.$$

Тому $y(t) = \tilde{y}(t)$ для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$, а отже, функція x є відповідним до y єдиним обмеженим розв'язком рівняння (2), тобто $x \in D(\mathcal{L}),\ \mathcal{L}x = y$.

Лему 2 доведено.

3. Обмежені розв'язки диференціального рівняння (1)**.** Позначимо через $\bar{0}$ нульовий елемент в просторі X. Основним результатом даної статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

i1) лінійне диференціальне рівняння (2) *задовольняє умову обмеженості;*

i2) існує така стала $M > 0$*, що для кожної функції* $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ *і відповідного до* y *єдиного обмеженого розв'язку* x *рівняння* (2) *виконується нерівність* $\|x\|_\infty \leq M\|y\|_\infty$*;*

i3) відображення f *неперервне на* $\mathbb{R} \times X \times X$ *за нормою, тобто*

$$\forall (t_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times X \times X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (t, u, v) \in \mathbb{R} \times X \times X,$$
$$|t - t_0| + \|u - u_0\| + \|v - v_0\| < \delta\ :\ \|f(t, u, v) - f(t_0, u_0, v_0)\| < \varepsilon;$$

i4) $\exists C_1 > 0\ \forall u_1, u_2, v \in X\ \forall t \in \mathbb{R} : \|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)\| \leq C_1\|u_1 - u_2\|$*;*

i5) $\exists C_2 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall v \in X : \|f(t, \bar{0}, v)\| \leq C_2(1 + \|v\|)$*;*

i6) $MC_1 < 1$.

Тоді диференціальне рівняння (1) *задовольняє умову обмеженості.*

Доведення. Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Покладемо

$$y_1(t) = f(t, \bar{0}, y(t)), t \in \mathbb{R}.$$

Із умов і3), і5) випливає, що $y_1 \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Внаслідок умови і1) диференціальне рівняння (2) має єдиний обмежений розв'язок x_1, відповідний до функції y_1. Далі для кожного $n \geq 2$ визначимо функцію x_n як єдиний обмежений розв'язок рівняння (2), відповідний до функції $y_n(t) = f(t, x_{n-1}(t), y(t)),\ t \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $y_n \in C_b(\mathbb{R}, X)$, оскільки внаслідок умов і3), і4) функція y_n неперервна на $\mathbb{R}$, а також для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$\|y_n(t)\| \leq \|y_{n-1}(t)\| + \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq \|y_{n-1}\|_\infty + \|f(t, x_{n-1}(t), y(t)) - \\ - f(t, x_{n-2}(t), y(t))\| \leq \|y_{n-1}\|_\infty + C_1\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_\infty.$$

Тут $x_0(t) = \bar{0},\ t \in \mathbb{R}$.

Із умов і2), і4) випливає, що для кожного $n \geq 2$

$$\|x_n - x_{n-1}\|_\infty \leq M \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t, x_{n-1}(t), y(t)) - f(t, x_{n-2}(t), y(t))\| \leq MC_1\|x_{n-1} - x_{n-2}\|,$$

Тому, з урахуванням умови і6), послідовність $\{x_n,\ n \geq 1\}$ фундаментальна в банаховому просторі $C_b(\mathbb{R}, X)$, а отже, існує така функція $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що $\|x_n - x\|_\infty \to 0,\ n \to \infty$. Доведемо, що x є відповідним до y обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1). Скориставшись явним виглядом розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку, робимо висновок, що для кожного $n \geq 2$

$$x_n(t) = e^{A(t-t_p)}x_n(t_p) + \int_{t_p}^{t} e^{A(t-s)} f(s, x_{n-1}(s), y(s))ds,\ t \geq t_p.$$

Звідси, перейшовши до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$x(t) = e^{A(t-t_p)}x(t_p) + \int_{t_p}^{t} e^{A(t-s)} f(s, x(s), y(s))ds,\ t \geq t_p,$$

а отже, для кожного $t > t_p$

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t), y(t)).$$

Аналогічно перевіряється, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}} \backslash [t_p, +\infty)$ теж існує $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Доведемо єдиність цього обмеженого розв'язку. Нехай функція u також є відповідним до y обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1). Тоді x і u є обмеженими розв'язками лінійного диференціального рівняння (2), що відповідають функціям $y_x(t) = f(t, x(t), y(t)),\ t \in \mathbb{R}$, і $y_u(t) = f(t, u(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ з простору $C_b(\mathbb{R}, X)$. Тому, внаслідок умов і2), і4),

$$\|x - u\|_\infty \leq M\|y_x - y_u\|_\infty \leq MC_1\|x - u\|_\infty.$$

Оскільки $MC_1 < 1$, то $x = u$.

Теорему 1 доведено.

Нехай $G : \mathbb{R} \to L(X)$ — така неперервна за нормою на $\mathbb{R}$ операторнозначна функція, що $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|G(t)\| = C_3 < +\infty$.

Наслідок 1. *Якщо для диференціального рівняння* (2) *виконуються умови i1), i2) теореми 1, а також* $MC_3 < 1$, *то диференціальне рівняння*

$$x'(t) = (T(t) + G(t))x(t) + y(t),\ t \in \mathbb{R},$$

задовольняє умову обмеженості.

Для доведення наслідка 1 досить застосувати теорему 1 до відображення $f(t, u, v) = G(t)u + v$.

Із леми 2 і теореми Банаха про існування оберненого оператора для замкненого оператора випливає, що коли диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості, то оператор $\mathcal{L}$ має неперервний обернений оператор $\mathcal{L}^{-1} : C_b(\mathbb{R}, X) \to Y$. Розглянемо лінійний оператор $\mathcal{T} : C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X)$, який визначається за правилом $\mathcal{T}u = \mathcal{L}^{-1}u,\ u \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Оскільки $\|u\|_\infty \le \|u\|_Y$ для кожної функції $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$, то оператор $\mathcal{T}$ теж обмежений. Тому справджується таке твердження.

Теорема 2. *Якщо диференціальне рівняння* (2) *задовольняє умову обмеженості, то умова i2) теореми 1 виконується зі сталою* $M = \|\mathcal{T}\|$.

Для диференціального рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + y(t),\ t \ge 0, \\ x'(t) = Bx(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{7}$$

яке є частковим випадком рівняння (2), норму оператора $\mathcal{T}$ можна оцінити таким чином.

Відомо (див., наприклад, [2], гл. 2, § 4), що коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з уявною віссю $i\mathbb{R} = \{it \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\sigma_-(A)$ і $\sigma_+(A)$ — частини спектра $\sigma(A)$, що лежать відповідно у лівій і правій півплощині $\mathbb{C}$ (одна з них може бути порожньою), $P_\pm(A)$ — проєктори Рісса, що відповідають $\sigma_\pm(A)$, то простір X зображується у вигляді прямої суми $X = X_-(A)\dot{+}X_+(A)$ інваріантних відносно оператора A підпросторів $X_\pm(A) = P_\pm(A)X$. У роботі [6] доведено, що диференціальне рівняння (7) задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

j1) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset,\ \sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$;

j2) $X = X_-(A)\dot{+}X_+(B)$.

Безпосередньо перевіряється що при цьому відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ обмежений розв'язок x рівняння (7) зображується таким чином:

якщо $t \ge 0$, то

$$\begin{aligned} x(t) = \int\limits_0^t e^{A(t-s)}P_-(A)y(s)ds - \int\limits_t^{+\infty} e^{A(t-s)}P_+(A)y(s)ds + \\ + e^{At}P_- \int\limits_{-\infty}^0 e^{-Bs}P_-(B)y(s)ds + e^{At}P_- \int\limits_0^{+\infty} e^{-As}P_+(A)y(s)ds; \end{aligned} \tag{8}$$

якщо $t < 0$, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{B(t-s)} P_-(B) y(s) ds - \int_{t}^{0} e^{B(t-s)} P_+(B) y(s) ds - \\ - e^{Bt} P_+ \int_{0}^{+\infty} e^{-As} P_+(A) y(s) ds - e^{Bt} P_+ \int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} P_-(B) y(s) ds. \tag{9}$$

Тут P_-, P_+ — проєктори, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Внаслідок нерівності (4.5) із [2, с. 119], існують такі додатні сталі M_A, M_B, γ_A, γ_B, що для кожного $t \geq 0$

$$\max\{\|e^{At}P_-(A)\|,\ \|e^{-At}P_+(A)\| \leq M_A e^{-\gamma_A t},$$
$$\max\{\|e^{Bt}P_-(B)\|,\ \|e^{-Bt}P_+(B)\| \leq M_B e^{-\gamma_B t}.$$

Тому, скориставшись зображенням (8) і операторними рівностями $P_- = P_-(A)P_-$, $P_+ = P_+(B)P_+$, для кожного $t \geq 0$ матимемо

$$\|x(t)\| \leq M_A \|y\|_\infty \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma_A |t-s|} ds + \\ + e^{-\gamma_A t} \|P_-\| \left(M_B \int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma_B |s|} ds + M_A \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma_A |s|} ds \right) \leq K_+ \|y\|_\infty,$$

де

$$K_+ = M_A \left(\frac{2}{\gamma_A} + \|P_-\| \left(\frac{M_B}{\gamma_B} + \frac{M_A}{\gamma_A} \right) \right).$$

Аналогічно внаслідок (9) $\|x(t)\| \leq K_- \|y\|_\infty$ для кожного $t < 0$, де

$$K_- = M_B \left(\frac{2}{\gamma_B} + \|P_+\| \left(\frac{M_B}{\gamma_B} + \frac{M_A}{\gamma_A} \right) \right).$$

Отже, $\|x\|_\infty \leq \max\{K_+, K_-\} \|y\|_\infty$.

Оскільки сталі K_+, K_- не залежать від y, то $\|\mathfrak{T}\| \leq \max\{K_+, K_-\}$ і тому має місце таке твердження.

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови j1), j2) і нерівність* $C_3 \max\{K_+, K_-\} < 1$, *то диференціальне рівняння*

$$\begin{cases} x'(t) = (A + G(t))x(t) + y(t),\ t \geq 0, \\ x'(t) = (B + G(t))x(t) + y(t),\ t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

задовольняє умову обмеженості.

4. Висновки. У статті отримано достатні умови існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку нелінійного диференціального рівняння (1) з кусково-сталим операторним коефіцієнтом $T(t)$ в лінійній частині. Як наслідок, наведено зручні для застосувань достатні умови існування єдиного обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку лінійного диференціального рівняння (10) зі змінним операторним коефіцієнтом, які не використовують поняття експоненціальної дихотомії.

Список використаної літератури

1. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. *Успехи математических наук.* 2013. Вип. 68, № 1 (409). С. 77–128.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва : Наука, 1970. 536 с.
3. Бойчук О. А., Журавльов В. П., Покутний О. О. Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь. *Український математичний журнал.* 2018. Вип. 70, № 1. С. 7–28.
4. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. Киев : Вища школа, 1992. 319 с.
5. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Москва : Мир, 1985. 376 с.
6. Городній М. Ф., Печериця О. А. Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами. *Нелінійні коливання.* 2021. Вип. 24, № 2. С. 147–157.

Horodnii M. F., Pecherytsia O. A. Bounded solutions to a nonlinear differential equation in a Banach space.

For a nonlinear differential equation with a piecewise constant operator coefficient in the linear part, sufficient conditions for the existence of a unique solution bounded on the entire real axis are obtained.

Keywords: Banach space, nonlinear differential equation, bounded solution, linear bounded operator, piecewise constant operator coefficient.

References

1. Baskakov, A. G. (2013). Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk,* 68(1(409)), 77–128 [in Russian].
2. Daletskii, Yu. L., & Krein, M. G. (1970). *Stability of solutions of differential equations in a Banach space.* Moskow: Nauka [in Russian].
3. Boichuk, O. A., Zhuravlov, V. P., & Pokutnyi, O. O. (2018). Bounded solutions of evolutionary equations. *Ukrainian Mathematical Journal,* 70(1), 7–28 [in Ukrainian].
4. Dorogovtsev, A. Ya. (1992). *Periodic and stationary regimes of infinite-dimensional deterministic and stochastic dynamical systems.* Kyiv: Vyshcha Shkola [in Russian].
5. Henry, D. (1985). *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Moscow: Mir [in Russian].
6. Horodni, M. F., & Pecherytsia, O. A. (2021). Bounded solutions of a differential equation with piecewise constant operator coefficients. *Nonlinear Oscillations,* 24(2), 147–157 [in Ukrainian].

Одержано 11.08.2023