УДК 517.946
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).42-51

В. В. Маринець[1], О. І. Когутич[2], О. Ю. Питьовка[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2455-2833

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
oksana.kohutych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3094-2467

[3] Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
O.Pitovka@mail.msu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-0127-5032

ОДИН ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Будується одна модифікація двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, яка описує поширення вологи у пористих середовищах. Одержані достатні умови існування, єдиності та регулярності і знакосталості шуканого розв'язку, доведено теореми про диференціальні нерівності, дається апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

Ключові слова: модифікація двостороннього методу, функції порівняння, єдиність розв'язку, диференціальні рівняння в частинних похідних, наближений розв'язок

1. Вступ. Як відомо, процеси переносу вологи в грунтах, фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерегенному середовищі описуються скалярним рівнянням вигляду [1, 2]

$$\begin{gathered} m(t,x)D^{(1.2)}u(t,x) + \alpha(t,x)D^{(1.1)}u(t,x) + d(t,x)D^{(0.1)}u(t,x) + \\ +\eta(t,x)D^{(0.2)}u(t,x) + a(t,x)D^{(1.0)}u(t,x) + b(t,x)u(t,x) = g(t,x), \end{gathered} \tag{1}$$

де коефіцієнти диференціального рівняння в частинних похідних (ДРЧП) є неперервними функціями у заданій області $D \in \mathbb{R}^2$. Крайові задачі у випадку рівняння (1) при різних вихідних даних розглядались у багатьох роботах, зокрема і в [2]– [4].

У роботі [5] та монографії [6] досліджуються задачі з локальними та нелокальними крайовими умовами у випадку нелінійного ДРЧП вигляду

$$\begin{aligned} D^{(2.1)}u(t,x) = f(t,x,u(t,x), D^{(1.0)}u(t,x), D^{(0.1)}u(t,x), \\ D^{(1.1)}u(t,x), D^{(0.2)}u(t,x)); \end{aligned} \tag{2}$$

при певних умовах, накладених на праву частину рівняння (2) та область відшукання розв'язку розглядуваних крайових задач, одержані достатні умови існування, єдиності, знакосталості шуканого розв'язку та будуються методи знаходження їх наближених розв'язків.

У даній роботі продовжуються дослідження приведені в [5, 6] для нового класу крайових задач і покращуються результати, раніше відомі.

2. Постановка задачі та основні означення. Розглянемо крайову задачу: у просторі функцій $C^*(\overline{D}_0) := C^{(1.2)}(D_0) \cap C(\overline{D}_0)$, $D_0 = \{(t,x)\,|t \in (0,b),$ $x \in (0,a)\}$, знайти розв'язок ДРЧП

$$\begin{gathered} D^{(1.2)}u(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.2)}u(t,x) + a_2(t,x)D^{(1.1)}u(t,x) = \\ f(t,x,u(t,x),D^{(1.0)}u(t,x),D^{(0.1)}u(t,x)) := f[u(t,x)], \end{gathered} \tag{3}$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} u(0,x) = T(x),\ x \in [0,a], \\ D^{(0.1)}u(t,0) = \psi(t),\ u(t,a) = \varphi(t),\ t \in [0,b], \end{gathered} \tag{4}$$

де $D^{(k)}u(t,x) : D_0 \to D_k \subset \mathbb{R}$, $k = (k_1,k_2)$, $k_r = 0,1$, $r = 1,2$; $k_1 + k_2 < 2$, $f : B \to \mathbb{R}$, $B = D_0 \times \prod\limits_{k_1,k_2} D_{(k_1,k_2)} \in \mathbb{R}^5$.

Надалі будемо вважати, що задані функції $T(x) \in C^2[0,a]$, $\varphi(t),\psi(t) \in$ $\in C^1[0,b]$, $0 \geq a_1(t,x) \in C^{(0.1)}(D_0)$, $a_2(t,x) \in C^{(1.0)}(D_0)$ та виконуються умови узгодженості

$$T'(0) = \psi(0),\ T(a) = \varphi(0), \tag{5}$$

а права частина рівняння (3) $f[u(t,x)] \in C(\overline{B})$.

Неважко переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 1. *Якщо $a_1(t,x) \in C^{(0.1)}(D_0)$, $a_2(t,x) \in C^{(1.0)}(D_0)$ і виконується умова*

$$D^{(0.1)}a_1(t,x) = D^{(1.0)}a_2(t,x), \tag{6}$$

то крайова задача (3)–(5) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню вигляду

$$u(t,x) = \Phi(t,x) + TF[u(\eta,\zeta)], \tag{7}$$

де

$$\begin{gathered} \Phi(t,x) := \varphi(t) + \int\limits_a^x T'(\xi)\exp\left(\int\limits_t^0 a_1(\eta,\xi)d\eta\right)d\xi - \\ -T'(0)\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_t^0 a_1(\tau,\xi)d\tau + \int\limits_\xi^0 a_2(0,\tau)d\tau\right)d\xi + \\ +\psi(t)\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_\xi^0 a_2(t,\tau)d\tau\right)d\xi, \end{gathered}$$

$$TF[u(\eta,\zeta)] := \int\limits_a^x \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi K(t,\xi,\eta,\zeta)F[u(\eta,\zeta)]d\zeta d\eta d\xi,$$

$$K(t,x;\eta,\xi) := \exp\left(\int\limits_t^\eta a_1(\tau,x)d\tau + \int\limits_x^\xi a_2(\eta,\tau)d\tau\right),$$

$$F[u(t,x)] := f[u(t,x)] + \left[D^{(0.1)}a_1(t,x) + a_1(t,x)a_2(t,x)\right]D^{(0.1)}u(t,x).$$

Очевидно, що функція $\Phi(t,x) \in C^*(\overline{D}_0)$ і задовольняє крайові умови (4), (5), а отже, ввівши нову функцію $z(t,x) := u(t,x) - \Phi(t,x)$ ми зводимо задачу (3)–(5) до задачі з однорідними крайовими умовами. Тому, не зменшуючи загальності подальших міркувань, будемо вважати, що $T(x) = 0$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$.

Означення 1. *Будемо говорити, що* $F[u(t,x)] \in C_2^*(\overline{B})$, *якщо функція* $F[u(t,x)]$ *задовольняє наступні умови [7, 8]:*

1) $F[u(t,x)] \in C(\overline{B})$,
2) *в просторі функцій* $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^8$, $Пр_{tOx}\overline{B}_1 = \overline{D}_0$, *існує така функція* $H(t,\, x,\, u(t,x),\, D^{(1.0)}u(t,x),\, D^{(0.1)}u(t,x);\; v(t,x),\, D^{(1.0)}v(t,x),\, D^{(0.1)}v(t,x)) :=$ $:= H[u(x,y); v(x,y)]$, *що:*
   (а) $H[u(t,x); u(t,x)] \equiv F[u(t,x)]$;
   (б) *для довільної з простору* $C^{(k_1,k_2)}(\overline{D}_0)$ *пари функцій* $u(t,x)$, $v(t,x) \in \overline{B}_1$, *які задовольняють умову* $D^{(k_1,k_2)}[u(t,x) - v(t,x)] \geq (\leq) 0$, $k_1 = 0,1$, $k_2 = 1 (k_2 = 0)$, $k_1 + k_2 < 2$, $(t,x) \in \overline{D}_0$, *в області* $\overline{B}_1$ *виконується нерівність*
$$H[u(t,x); v(t,x)] - H[v(t,x); u(t,x)] \geq 0; \tag{8}$$
3) *функція* $H[u(t,x); v(t,x)]$ *в області* $\overline{B}_1$ *задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору* $C^*(\overline{D}_0)$ *функцій* $u_r(t,x)$, $v_r(t,x)$, $r = 1,2$, *виконується умова*
$$|H[u_1(t,x); u_2(t,x)] - H[v_1(t,x); v_2(t,x)]| \leq$$
$$\leq \frac{1}{6}\, L \sum_{r=1}^{2} \left(|w_r(t,x)| + \left| D^{(1.0)} w_r(t,x) \right| + \left| D^{(0.1)} w_r(t,x) \right| \right),$$
де $w_r(t,x) := u_r(t,x) - v_r(t,x)$, $r = 1,2$, $\dfrac{1}{6}\, L$ *— стала Ліпшиця.*

Очевидно, якщо функція $F[u(t,x)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, розпочинаючи з третього, то $F[u(t,x)] \in C_2^*(\overline{B})$ [6]. Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_p(t,x)$, $V_p(t,x) \in C^k(\overline{D}_0)$ належать області $\overline{B}_1$ і $p \in \mathbb{N}_0$.

Введемо позначення:
$$W_p(t,x) = Z_p(t,x) - V_p(t,x),\; (t,x) \in \overline{D}_0,$$
$$f^p(t,x) = H[Z_p(t,x); V_p(t,x)],\; f_p(t,x) = H[V_p(t,x); Z_p(t,x)],$$
$$D^k \overline{Z}_p(t,x) := D^k Z_p(t,x) - q_p^k(t,x) D^k W_p(t,x),$$
$$D^k \overline{V}_p(t,x) := D^k V_p(t,x) + c_p^k(t,x) D^k W_p(t,x),$$
$$k = (k_1,k_2),\; k_r = 0,1;\; r = 1,2,\; k_1 + k_2 < 2,\; p \in \mathbb{N}_0,$$
$$\overline{f}^p(t,x) := H[\overline{Z}_p(t,x); \overline{V}_p(t,x)],\; \overline{f}_p(t,x) = H[\overline{V}_p(t,x); \overline{Z}_p(t,x)],$$
$$\omega_p(t,x) := \int_0^x f_p(t,\xi) K(t,x;t,\xi) d\xi,\; \omega^p(t,x) := \int_0^x f^p(t,\xi) K(t,x;t,\xi) d\xi,$$

$$\alpha_p(t,x) := D^{(1.1)}Z_p(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}Z_p(t,x) - \omega^p(t,x),$$
$$\beta_p(t,x) := D^{(1.1)}V_p(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}V_p(t,x) - \omega_p(t,x),\ (t,x) \in \overline{D}_0, \tag{9}$$

$q_p^k(t,x)$, $c_p^k(t,x)$ є довільними із простору $C(\overline{D}_0)$ функціями, які задовольняють умови

$$0 \le q_p^k(t,x) \le 0{,}5;\ 0 \le c_p^k(t,x) \le 0{,}5;$$
$$p \in \mathbb{N}_0;\ (t,x) \in \overline{D}_0;\ k_r = 0{,}1;\ k_1 + k_2 < 2. \tag{10}$$

3. Побудова модифікації двостороннього методу дослідження задачі (3)–(5) [8]. Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(t,x)\}$, $\{V_p(t,x)\}$ згідно формул

$$Z_{p+1}(t,x) = T\overline{f}^p(\eta,\zeta),\ V_{p+1}(t,x) = T\overline{f}_p(\eta,\zeta),\ (t,x) \in \overline{D}_0, \tag{11}$$

де функції нульового наближення $Z_0(t,x)$, $V_0(t,x) \in C^{(1.1)}(\overline{D}_0)$, які належать області $\overline{B}_1$ вибираємо таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\alpha_0(t,x) \ge 0,\ \beta_0(t,x) \le 0,\ D^{(k_1,k_2)}W_0(t,x) \ge (\le) 0,$$
$$(t,x) \in \overline{D}_0,\ k_1 = 0{,}1;\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2. \tag{12}$$

Означення 2. *Функції $Z_0(t,x)$, $V_0(t,x) \in C^{(1.1)}(\overline{D}_0)$, які належать області $\overline{B}_1$ і задовольняють крайові умови (4) та нерівності (12), називаються функціями порівняння задачі (3)–(5).*

Зауважимо, що із (11) маємо

$$D^{(1.1)}Z_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}^p(t,x),$$
$$D^{(1.1)}V_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}_p(t,x).$$

Таким чином із (9) та (11) одержимо

$$\alpha_{p+1}(t,x) = D^{(1.1)}Z_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t,x) - \omega^{p+1}(t,x) =$$
$$= \overline{\omega}^p(t,x) - \omega^{p+1}(t,x), \tag{13}$$
$$\beta_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}_p(t,x) - \omega_{p+1}(t,x),$$

$$\alpha_p(t,x) = D^{(1.1)}\left[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)\right] +$$
$$+ a_1(t,x)D^{(0.1)}\left[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)\right] + \overline{\omega}^p(t,x) - \omega^p(t,x),$$
$$\beta_p(t,x) = D^{(1.1)}\left[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)\right] +$$
$$+ a_1(t,x)D^{(0.1)}\left[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)\right] + \overline{\omega}_p(t,x) - \omega_p(t,x), \tag{14}$$

$$\begin{cases} W_{p+1}(t,x) = T\left(\overline{f}^p(\eta,\zeta) - \overline{f}_p(\eta,\zeta)\right), \\ D^{(1.1)}W_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}W_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}^p(t,x) - \overline{\omega}_p(t,x). \end{cases} \tag{15}$$

Відмітимо, що в силу (10)

$$D^{(k_1,k_2)}V_0(t,x) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}\overline{V}_0(t,x) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}\overline{Z}_0(t,x) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}Z_0(t,x),$$

$$k_1 = 0{,}1;\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2,\ (t,x) \in \overline{D}_0,$$

тобто, якщо $D^k Z_0(t,x)$, $D^k V_0(t,x) \in \overline{B}_1$, то $D^k \overline{Z}_0(t,x)$ та $D^k \overline{V}_0(t,x)$ також належить області $\overline{B}_1$. Із (14), враховуючи першу із умов (4) маємо

$$\begin{gathered} D^{(0.1)}[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)] = \\ = \int\limits_0^t [\alpha_p(\eta,x) + \omega^p(\eta,x) - \overline{\omega}^p(\eta,x)] \exp\left(\int\limits_t^\eta [a_1(\tau,x)d\tau\right) d\eta := \overline{\alpha}_p(t,x), \\ D^{(0.1)}[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)] = \\ = \int\limits_0^t [\beta_p(\eta,x) + \omega_p(\eta,x) - \overline{\omega}_p(\eta,x)] \exp\left(\int\limits_t^\eta [a_1(\tau,x)d\tau\right) d\eta := \overline{\beta}_p(t,x), \end{gathered} \tag{16}$$

звідки при $p = 0$, враховуючи (12), (10) та (8) одержимо

$$D^{(0.1)}[Z_0(t,x) - Z_1(t,x)] \ge 0,\ D^{(0.1)}[V_0(t,x) - V_1(t,x)] \le 0.$$

Інтегруючи останні нерівності по x від x до a та враховуючи крайові умови (4), маємо

$$Z_0(t,x) - Z_1(t,x) \le 0,\ V_0(t,x) - V_1(t,x) \ge 0.$$

Але тоді із (14) випливає, що

$$\begin{gathered} D^{(1.1)}\left[Z_0(t,x) - Z_1(t,x)\right] = \\ = \alpha_0(t,x) - a_1(t,x) D^{(0.1)}\left[Z_0(t,x) - Z_1(t,x)\right] + \omega^0(t,x) - \overline{\omega}^0(t,x) \ge 0, \\ D^{(1.1)}\left[V_0(t,x) - V_1(t,x)\right] \le 0, \end{gathered}$$

а отже

$$D^{(1.0)}\left[Z_0(t,x) - Z_1(t,x)\right] \le 0,\ D^{(1.0)}\left[V_0(t,x) - V_1(t,x)\right] \ge 0.$$

Із (15) враховуючи, що $\overline{f}^0(t,x) - \overline{f}_0(t,x) \ge 0$ при $p = 0$ маємо

$$D^{(k_1,k_2))}W_1(t,x) \ge (\le) 0,\ k_1 = 0{,}1;\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2,\ (t,x) \in \overline{D}_0.$$

Таким чином мають місце нерівності

$$D^{(k_1,k_2)}V_0(t,x) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}V_1(t,x) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}Z_1(t,x) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}Z_0(t,x),$$

а отже $D^k Z_1(t,x)$, $D^k V_1(t,x) \in \overline{B}_1$. Але тоді із (13) при $p = 0$ маємо

$$\alpha_1(t,x) = \overline{\omega}^0(t,x) - \omega^1(t,x) = \int\limits_0^x (\overline{f}^0(t,\xi) - f^1(t,\xi)) K(t,x;t,\xi) d\xi,$$

$$\beta_1(t,x) = \int_0^x (\overline{f}_0(t,\xi) - f_1(t,\xi))K(t,x;t,\xi)d\xi.$$

Вибираючи довільні з простору $C(\overline{D}_0)$ функції $q_0^k(t,x)$ та $c_0^k(t,x)$, які задовольняють умови (10) таким чином, щоб виконувались нерівності

$$D^k\left[Z_0(t,x) - Z_1(t,x)\right] - q_0^k(t,x)D^kW_0(t,x) \geq (\leq)0,$$

$$D^k\left[V_0(t,x) - V_1(t,x)\right] + c_0^k(t,x)D^kW_0(t,x) \leq (\geq)0,$$

$$k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ (t,x) \in \overline{D}_0,$$

то із попередніх рівностей маємо $\alpha_1(t,x) \geq 0$, $\beta_1(t,x) \leq 0$, тобто побудовані функції $Z_1(t,x)$, $V_1(t,x)$ є також функціями порівняння крайової задачі (3)–(5). Беручи функції $Z_1(t,x)$ та $V_1(t,x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування методом математичної індукції переконуємось, що якщо на кожному кроці ітерації (11) неперервні функції $q_0^k(t,x)$ та $c_0^k(t,x)$, які задовольняють умови (10), вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались нерівності

$$D^k\left[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)\right] - q_p^k(t,x)D^kW_p(t,x) \geq (\leq)0,$$

$$D^k\left[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)\right] + c_p^k(t,x)D^kW_p(t,x) \leq (\geq)0, \tag{17}$$

$$(t,x) \in \overline{D}_0,\ k_1 = 0{,}1,\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),$$

то для довільних $p \in \mathbb{N}$ матимемо

$$\begin{gathered} D^kV_p(t,x) \leq (\geq)D^kV_{p+1}(t,x) \leq (\geq)D^kZ_{p+1}(t,x) \leq (\geq)D^kZ_p(t,x); \\ (t,x) \in \overline{D}_0,\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ p \in \mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{18}$$

Покажемо, що множина функцій $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x)$, які задовольняють умови (10), (17), не порожня. Дійсно, позначимо:

$$\alpha_{p,1}(t,x) := \alpha_p(t,x) + \omega^p(t,x) - \overline{\omega}^p(t,x),$$

$$\alpha_{p,2}(t,x) = \int_0^t \alpha_{p,1}(\eta,x)\exp\left(\int_t^\eta a_1(\tau,x)d\tau\right)d\eta,$$

$$\beta_{p,1}(t,x) := \beta_p(t,x) + \omega_p(t,x) - \overline{\omega}_p(t,x),$$

$$\beta_{p,2}(t,x) = \int_0^t \beta_{p,1}(\eta,x)\exp\left(\int_t^\eta a_1(\tau,x)d\tau\right)d\eta,$$

$$\rho_{p,1}(t,x) := \alpha_{p,2}(t,x) - \beta_{p,2}(t,x) + D^{(0.1)}W_p(t,x),$$

$$\rho_{p,2}(t,x) := \alpha_{p,1}(t,x) - \beta_{p,1}(t,x) + D^{(1.1)}W_p(t,x).$$

Лема 2. *Якщо виконуються умови Леми 1 і функція $F[u(t,x)] \in C_2^*(\overline{B})$, а крайова задача (3)–(5) має функції порівняння, то множина функцій $q_p^k(t,x)$, $c_p^k(t,x)$, які задовольняють умови (10), (17), не порожня.*

Доведення. Дійсно, покладемо

$$q_p^{(0.1)}(t,x)=\frac{\alpha_{p,2}(t,x)}{\rho_{p,1}(t,x)},\ q_p(t,x)=\frac{\int\limits_x^a \alpha_{p,2}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a \rho_{p,1}(t,\xi)d\xi},\ q_p^{(1.0)}(t,x)=\frac{\int\limits_x^a \alpha_{p,1}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a \rho_{p,2}(t,\xi)d\xi},$$

$$c_p^{(0.1)}(t,x)=-\frac{\beta_{p,2}(t,x)}{\rho_{p,1}(t,x)},\ c_p(t,x)=-\frac{\int\limits_x^a \beta_{p,2}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a \rho_{p,1}(t,\xi)d\xi},\ c_p^{(1.0)}(t,x)=-\frac{\int\limits_x^a \beta_{p,1}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a \rho_{p,2}(t,\xi)d\xi},$$

$$(t,x)\in\overline{D}_0,\ p\in\mathbb{N}_0.$$

Очевидно, таким чином вибрані функції $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x)$, $k=(k_1,k_2)$, $k_1,k_2=0{,}1$, $k_1+k_2<2$, задовольняють умови (10), а

$$D^{(0.1)}[Z_p(t,x)-Z_{p+1}(t,x)]-q_p^{(0.1)}D^{(0.1)}W_p(t,x)=\alpha_{p,2}(t,x)\left[1-\frac{D^{(0.1)}W_p(t,x)}{\rho_{p,1}(t,x)}\right]\geq 0,$$

$$[V_p(t,x)-V_{p+1}(t,x)]+c_p^{(0.1)}W_p(t,x)=-\int\limits_x^a \beta_{p,2}(t,\xi)d\xi\left[1+\frac{W_p(t,x)}{\int\limits_x^a \rho_{p,1}(t,\xi)d\xi}\right]\geq 0.$$

Аналогічно переконуємось у виконанні усіх нерівностей в (17) і Лема 2 доведена.

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай функція $F[u(t,x)]\in C_2^*(\overline{B})$, виконуються умови Леми 1 і крайова задача (3)–(5) має функції порівняння. Тоді для функцій $Z_p(t,x)$, $V_p(t,x)$, побудованих згідно закону (11), (12), де $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x)\in C(\overline{D}_0)$ задовольняють в області $\overline{B}_1$ умови (10), (17), справедливі нерівності (18) для всіх $p\in\mathbb{N}_0$, $(t,x)\in\overline{D}_0$, $k_1,k_2=0{,}1$, $k_1+k_2<2$.*

Покажемо, що послідовності функцій $\{D^kZ_p(t,x)\}$, $\{D^kV_p(t,x)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (18), при існуванні функцій порівняння задачі (3)–(5), збігаються рівномірно при $(t,x)\in\overline{D}_0$ до єдиного розв'язку інтегро–диференціального рівняння (7). Враховуючи нерівності (18) для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty}D^kW_p(t,x)=0$ для $\forall(t,x)\in\overline{D}_0$, $k=(k_1,k_2)$, $k_1,k_2=0{,}1$, $k_1+k_2<2$.

Позначимо:

$$d:=\max_{k_1,k_2}\sup_{\overline{D}_0}\left|D^{(k_1,k_2)}W_0(t,x)\right|,\ q:=\max_{k_1,k_2}\sup_{\overline{D}_0}(1-q_p^k(t,x)-c_p^k(t,x)),$$

$$c:=\sup_{\overline{D}_0}|a_1(t,x)|,\ K:=\sup_{\overline{D}\times\overline{D}}K(t,x;\eta,\zeta),$$

$$\gamma:=\max\{1,\ a+b,\ a(a+b),\ (a+b)(1+ab)\}.$$

Тоді із (15) методом математичної індукції неважко переконатись у справедливості оцінок

$$\left|D^{(k_1,k_2)}W_p(t,x)\right|\leq\frac{[qKL\gamma(a+t-x)]^p}{p!}d,\ k_i=0{,}1,\ i=1,2,\ k_1+k_2<2,\qquad(19)$$

для всіх $(t,x) \in \overline{D}_0,\ p \in \mathbb{N}$.

На підставі оцінок (19) маємо, що $\lim\limits_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)} W_p(t,x) = 0$, тобто $\lim\limits_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)}$ $Z_p(t,x) = D^{(k_1,k_2)} V_p(t,x) := U_{k_1,k_2}(t,x)$.

Для того, щоб показати, що $U_{k_1,k_2}(t,x) = D^{(k_1,k_2)} U(t,x)$, де $U(t,x)$ є регулярним розв'язком інтегро-диференціального рівняння (7) достатньо у (11) перейти до границі, коли $p \to \infty$ і результат продиференціювати по tk_1 разів, а по x — k_2, $k_1 + k_2 < 2$. У силу Леми 1 знайдена гранична функція і буде розв'язком крайової задачі (3)–(5).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*
Тоді:

1) *інтегро–диференціальне рівняння (7) у класі функцій $C^*(\overline{D}_0)$ має розв'язок і він єдиний при $(t,x) \in \overline{D}_0$;*
2) *послідовності функцій $\left\{Z_p^k(t,x)\right\}$, $\left\{V_p^k(t,x)\right\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (18) збігаються рівномірно при $(t,x) \in \overline{D}_0$ до єдиного розв'язку рівняння (7),*
3) *мають місце оцінки (19);*
4) *для довільних $p \in \mathbb{N}_0$, $k_1, k_2 = 0{,}1$, $k_1 + k_2 < 2$ та $(t,x) \in \overline{D}_0$ справедливі нерівності*

$$D^k V_p(t,x) \le (\ge) D^k V_{p+1}(t,x) \le (\ge) D^k U(t,x) \le (\ge)$$

$$\le (\ge) D^k Z_{p+1}(t,x) \le (\ge) D^k Z_p(t,x), \tag{20}$$

$$(t,x) \in \overline{D}_0,\ k_1 = 0{,}1,\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2;$$

5) *збіжність ітераційного методу (11), (12), (18) не повільніша збіжності методу, коли $q_p^k(t,x) \equiv 0$ та $c_p^k(t,x) \equiv 0$ для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, тобто методу*

$$Z^*_{p+1}(t,x) = Tf^p(\eta,\zeta),\ V^*_{p+1}(t,x) = Tf_p(\eta,\zeta). \tag{21}$$

Доведення. Єдиність розв'язку рівняння (7) доводиться методом від супротивного [6]. Твердження пунктів 2) та 3) даної Теореми 2 доведені вище.

Доведемо справедливість нерівностей (20). З цією метою припустимо, що для деякого номера $p \in \mathbb{N}$ у деякій точці $(t_0,x_0) \in \overline{D}_0$ виконується нерівність $D^k Z_p(t_0,x_0) < (>) D^k U(t_0,x_0)$. Тоді для всякого $n \in \mathbb{N}$ у силу нерівностей (18)

$$D^k Z_{p+n}(t_0,x_0) \ge (\le) D^k Z_p(t_0,x_0) < (>) D^k U(t_0,x_0),$$

$$k_1 = 0{,}1,\ k_2 = 1\ (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2,$$

а отже послідовність функцій $\left\{D^k Z_{p+n}(t_0,x_0)\right\}$ при $n \to \infty$ не збігається у точці (t_0,x_0) до $D^k U(t_0,x_0)$, що суперечить доведеному.

Аналогічно доводяться інші нерівності у (20).

Покажемо, що збіжність методу (11), (12), (18) не повільніша збіжності ітераційного методу (21).

Нехай $Z_p(t,x)$ та $V_p(t,x)$ — функції порівняння задачі (3)–(5), побудовані згідно деякого двостороннього методу. Тоді із (11) та (21), враховуючи (8), маємо

$$Z^*_{p+1}(t,x) - Z_{p+1}(t,x) = Tf^p(\eta,\zeta) - T\overline{f}^p(\eta,\zeta) = T[f^p(\eta,\zeta) - \overline{f}^p(\eta,\zeta)] \le 0,$$

$$V^*_{p+1}(t,x) - V_{p+1}(t,x) = T[f_p(\eta,\zeta) - \overline{f}_p(\eta,\zeta)] \geq 0.$$

Тоді

$$Z^*_{p+1}(t,x) \leq Z_{p+1}(t,x) \leq V_{p+1}(t,x) \leq V^*_{p+1}(t,x),$$

що і потрібно було показати.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови Теореми 1 і* $F[U(t,x)] \equiv H[U(t,x);0]$, *а крайові умови (4)є однорідними.*

Тоді якщо $F[0] \geq (\leq) 0$ *в області* $\overline{B}$, *то розв'язок задачі (3), (4) задовольняє нерівності*

$$D^{(k_1,k_2)}U(t,x) \geq (\leq) 0 \ \left(D^{(k_1,k_2)}U(t,x) \leq (\geq) 0\right),$$

при $(t,x) \in \overline{D}_0, k_1 = 0{,}1, \ k_2 = 1 \ (k_2 = 0), \ k_1 + k_2 < 2.$

4. Висновок. У даній роботі побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі для ДРЧП. Одержано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та визначено апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку задачі.

Список використаної літератури

1. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. Москва : Наука, 1976. 352 с.
2. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. *Дифференциальные уравнения.* 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
3. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений. *Дифференциальные уравнения.* 1983. Т. 19, № 1. С. 145–152.
4. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса. *Дифференциальные уравнения.* 1982. Т. 18, № 2. С. 280–288.
5. Маринец В. В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения.* 1988. Т. 24, № 8. С. 1393–1397.
6. Маринець В. В., Маринець К. В., Питьовка О. Ю. Аналітичні методи дослідження крайових задач. Монографія Ужгород : Вид-во УжНУ "Говерла", 2019. 288 с.
7. Marynets V., Kateryna M., Kohutych O. Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. 2021. P. 12. URL: https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Advanced_Methods_Computational_Mathematical_Physics (date of access: 15.04.2023).
8. Marynets V., Marynets K., Kohutych O. On a ovel aproache for the investigaion and aproximation of solutions to the systems of higher nonlineare PDES. *Monatchefte für Mathematik.* 2022. 14 p. DOI: https://doi.org/10.1007/800605-022-01771-5

Marynets V. V., Kohutych O. I., Pytovka O. Y. One approach of the investigation of a mathematical model of moisture distribution in porous environments.

The one modification of the two-side method of investigation and approximate solution to the boundary value problem (BVPs) that describe moisture distribution in porous environments is constructed. The sufficient conditions of existence, uniqueness, regularity, and sign-preserving of the desired solution are obtained. The theorems about differential inequalities are proven, and the posterior estimation of error of the approximate solution of BVPs is given.

Keywords: modification of the two-way method, comparison functions, uniqueness of solution, differential equations in parts of derivatives, approximate solution.

References

1. Chudnovskij, A. F. (1976). *Teplofizika pochv* [Thermal physics of soils]. Moscow: Nauka [in Russian].
2. Nahushev, A. M. (1979). Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture]. *Differenc. uravneniya,* 15(1), 96–105 [in Russian].
3. Shkhanukov, B. A. (1983). O nekotoryh kraevyh zadachah dlya uravneniya tret'ego poryadka i ekstremal'nyh svojstvah ego reshenij [On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions]. *Differenc. uravneniya,* 18(2), 145–152 [in Russian].
4. Vodahova, V. A. (1982). Kraevaya zadacha s nelokal'nym usloviem A. M. Nahusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa [A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer]. *Differenc. uravneniya,* 18(2), 280–288 [in Russian].
5. Marynets, V. V. (1988). O nekotoryh zadachah dlya sistem nelinejnyh differencial'nyh uravnenii v chastnyh proizvodnyh s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions]. *Differenc. uravneniya,* 24(8), 1393–1397 [in Russian].
6. Marynets, V. V., Marynets, K. V., & Pytovka, O. Yu. (2019). *Analytical methods of research of boundary value problems.* Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla" [in Ukrainian].
7. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2021). Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. Retrieved from https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Advanced_Methods_Computational_Mathematical_Physics
8. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2022). On a ovel aproache for the investigaion and aproximation of solutions to the systems of higher nonlineare PDES. *Monatchefte für Mathematik.* https://doi.org/10.1007/800605-022-01771-5

Одержано 23.08.2023