УДК 517.5+517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).72-81

Р. В. Хаць

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри математики та економіки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
khats@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ТИПУ

В роботі вивчається інтегральне зображення одного класу цілих функцій експоненційного типу. Знайдено умови існування цього інтегрального зображення в термінах розв'язків з відповідних просторів деяких диференціальних рівнянь. Отримано асимптотичні оцінки цілих функцій з розглядуваного класу функцій. Наведено також приклади цілих функцій з цього класу.

Ключові слова: теорема Пелі-Вінера, ціла функція експоненційного типу, диференціальне рівняння, інтегральне зображення, нерівність Шварца.

1. Вступ. Нехай $L^p(X)$ — простір всіх вимірних функцій $f : X \to \mathbb{C}$ на вимірній множині $X \subseteq \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad p \in [1; +\infty).$$

Ціла функція G називеться цілою функцією експоненційного типу $\sigma \in [0; +\infty)$ [1–3], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така стала $c(\varepsilon)$, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується $|G(z)| \le c(\varepsilon) \exp((\sigma + \varepsilon)|z|)$. Множину всіх цілих функцій експоненційного типу $\sigma \in (0; +\infty)$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належить простору $L^2(\mathbb{R})$, позначимо через PW^2_σ, а клас парних функцій з PW^2_σ — через $PW^2_{\sigma,+}$. За теоремою Пелі-Вінера [1–3], клас PW^2_σ складається з функцій G, які подаються у вигляді

$$G(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} g(t) \, dt, \quad g \in L^2(-\sigma; \sigma),$$

а клас $PW^2_{\sigma,+}$ — з функцій G, які подаються у вигляді

$$G(z) = \int_0^{\sigma} \cos(tz) g(t) \, dt, \quad g \in L^2(0; \sigma).$$

При цьому, $\|g\|_{L^2(0;\sigma)} = \sqrt{2/\pi}\|G\|_{L^2(0;+\infty)}$ і

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} G(z) \cos(tz) \, dz.$$

Задача про інтегральне зображення різних класів цілих функцій вивчалась в багатьох працях (див., наприклад, [1–15]). Зокрема, в роботах [6,7] розглядалось питання про опис класу $\mathcal{E}$ цілих функцій G експоненційного типу $\sigma \le 1$, які подаються у вигляді

$$G(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz)) g(t) \, dt, \quad g \in L^2(0; 1). \tag{1}$$

Теорема 1 (див. [6]). *Для того щоб ціла функція G подавалась у вигляді* (1), *необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння $f(z) - zf'(z) = G(z)$ мало розв'язок $f = F$, який належить простору $PW^2_{1,+}$.*

У статті [8] вивчався клас $\widetilde{\mathcal{E}}$ цілих функцій Q експоненційного типу $\sigma \le 1$, які подаються у вигляді

$$Q(z) = \int_0^1 (-z^2t^2\cos(tz) + 3tz\sin(tz) + 3\cos(tz))g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1). \tag{2}$$

Теорема 2 (див. [8]). *Для того щоб ціла функція Q подавалась у вигляді* (2), *необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння $-zf'(z) + 3f(z) = Q(z)$ мало розв'язок $f = G$, який належить до $\mathcal{E}$.*

Теорема 3 (див. [8]). *Для того щоб ціла функція Q подавалась у вигляді* (2), *необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння $z^2f''(z) - 3zf'(z) + 3f(z) = Q(z)$ мало розв'язок $f = F$, який належить до $PW^2_{1,+}$. Якщо ці умови виконані, то функція $z^{-1}(z^{-1}Q'(z))'$ також належить простору $PW^2_{1,+}$ і g можна знайти за кожною з наступних формул:*

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(z)\cos(tz)\,dz, \quad g(t) = \frac{2}{\pi t^4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{z}\left(\frac{Q'(z)}{z}\right)'\cos(tz)\,dz.$$

У роботі [8] отримано також асимптотичні оцінки цілих функцій $Q \in \widetilde{\mathcal{E}}$.

Функція $Q(z) = 2z^4\cos z$ не належить [8] до $\widetilde{\mathcal{E}}$, а функція

$$Q(z) = z\frac{\left(1 - \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}(z^2-\pi^2/4)\right)(z^2-\pi^2/4)\sin z + 2z\cos z}{(z^2-\pi^2/4)^2} +$$

$$+3\frac{\cos z}{z^2-\pi^2/4}\left(1 - \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}(z^2-\pi^2/4)\right),$$

належить [8] до $\widetilde{\mathcal{E}}$ з функцією g, визначеною формулою

$$g(t) = \frac{4}{\pi^3t^2}\left(2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \pi t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right). \tag{3}$$

Метою цієї статті є опис класу $\widehat{\mathcal{E}}$ цілих функцій P експоненційного типу $\sigma \le 1$, які подаються у вигляді

$$P(z) = \int_0^1 (z^3t^3\sin(tz) + 6z^2t^2\cos(tz) - 15tz\sin(tz) - 15\cos(tz))g(t)\,dt, \tag{4}$$

з $g \in L^2(0;1)$. Такі класи функцій виникають при дослідженні деяких некласичних крайових задач для рівняння Бесселя, особливість яких полягає в тому, що система їх канонічних власних функцій є переповненою, тобто залишається повною після відкидання певної їх скінченної кількості (див. [16–21]). В даній роботі ми отримаємо аналоги теорем 1–3 для розглядуваного класу цілих функцій $\widehat{\mathcal{E}}$ (див. теореми 4–7). Подібні результати містяться в [14].

2. Основні результати. Основними результати роботи є наступні твердження, які доповнюють результати робіт [6–9, 18–21].

Теорема 4. *Для того щоб ціла функція P подавалась у вигляді (4), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння*

$$-z^2 f''(z) + 7zf'(z) - 15f(z) = P(z), \tag{5}$$

мало розв'язок $f = G$, який належить до $\mathcal{E}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція P подається у вигляді (4) і

$$G(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Тоді $G \in \mathcal{E}$,

$$G'(z) = \int_0^1 zt^2\cos(tz)g(t)\,dt, \quad G''(z) = \int_0^1 (t^2\cos(tz) - t^3 z\sin(tz))g(t)\,dt,$$

і

$$-z^2 G''(z) + 7zG'(z) - 15G(z) =$$

$$= \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz\sin(tz) - 15\cos(tz))g(t)\,dt = P(z).$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай рівняння (5) має розв'язок $f = G$, який належить до $\mathcal{E}$. Тоді

$$f(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Отже,

$$P(z) = -z^2 f''(z) + 7zf'(z) - 15f(z) =$$

$$= \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz\sin(tz) - 15\cos(tz))g(t)\,dt.$$

Теорему 4 доведено.

Зауваження 1. *Нехай [22]*

$$J_{-7/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-7/2}}{k!\Gamma(k-5/2)},$$

— функція Бесселя першого роду з індексом $-7/2$, де Γ — класична Гамма-функція Ейлера. Оскільки (див. [22])

$$z^3\sqrt{z}J_{-7/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(z^3\sin z + 6z^2\cos z - 15z\sin z - 15\cos z),$$

то функція $P \in \widehat{\mathcal{E}}$ подається також у вигляді

$$P(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z^3 t^3 \sqrt{tz} J_{-7/2}(tz) g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Приклад 1. *Функція*

$$P(z) = \frac{-4z^2}{(z^2-\pi^2/4)^3}\big(2z^2\cos z + (z^2-\pi^2/4)(z\sin z + 3\cos z)\big) +$$

$$+\frac{z^2\cos z - 7z\sin z - 15\cos z}{z^2-\pi^2/4}\left(1 - \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}(z^2-\pi^2/4)\right),$$

належить до $\widehat{\mathcal{E}}$ *з функцією* g, *визначеною формулою* (3). *Справді, функція*

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2-\pi^2/4}\left(1 - \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}(z^2-\pi^2/4)\right),$$

належить [7] до $\mathcal{E}$ *з* g, *визначеною формулою* (3). *До того ж, функція* f *є розв'язком рівняння* (5), *бо*

$$f'(z) = \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}\sin z - \frac{\sin z}{z^2-\pi^2/4} - \frac{2z\cos z}{(z^2-\pi^2/4)^2},$$

$$f''(z) = \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}\cos z - \frac{\cos z}{z^2-\pi^2/4} + \frac{4z\sin z - 2\cos z}{(z^2-\pi^2/4)^2} + \frac{8z^2\cos z}{(z^2-\pi^2/4)^3}.$$

Тому за теоремою 4 розглядувана функція P *подається у вигляді* (4).

Теорема 5. *Для того щоб ціла функція* P *подавалась у вигляді* (4), *необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння*

$$zf'(z) - 5f(z) = P(z), \tag{6}$$

мало розв'язок $f = Q$, *який належить до* $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція P подається у вигляді (4) і

$$Q(z) = \int_0^1 (-z^2t^2\cos(tz) + 3tz\sin(tz) + 3\cos(tz))g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Тоді $Q \in \widetilde{\mathcal{E}}$,

$$Q'(z) = \int_0^1 (zt^2\cos(tz) + z^2t^3\sin(tz))g(t)\,dt,$$

і

$$zQ'(z) - 5Q(z) =$$

$$= \int_0^1 (z^3t^3\sin(tz) + 6z^2t^2\cos(tz) - 15tz\sin(tz) - 15\cos(tz))g(t)\,dt = P(z).$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай рівняння (6) має розв'язок $f = Q$, який належить до $\widetilde{\mathcal{E}}$. Тоді

$$f(z) = \int_0^1 (-z^2t^2\cos(tz) + 3tz\sin(tz) + 3\cos(tz))g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Тому

$$P(z) = zf'(z) - 5f(z) =$$

$$= \int_0^1 (z^3t^3 \sin(tz) + 6z^2t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t)\, dt.$$

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Для того щоб ціла функція P подавалась у вигляді (4), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння*

$$z^3 f'''(z) - 6z^2 f''(z) + 15zf'(z) - 15f(z) = P(z), \tag{7}$$

мало розв'язок $f = F$, який належить до $PW^2_{1,+}$. Якщо ці умови виконані, то функція $z^{-1}(z^{-1}(z^{-1}P'(z))')'$ також належить простору $PW^2_{1,+}$ і g можна знайти за кожною з наступних формул:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(z) \cos(tz)\, dz, \tag{8}$$

$$g(t) = -\frac{2}{\pi t^6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \left(\frac{P'(z)}{z} \right)' \right)' \cos(tz)\, dz. \tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція P подається у вигляді (4) і

$$F(z) = \int_0^1 \cos(tz) g(t)\, dt, \quad g \in L^2(0; 1). \tag{10}$$

Тоді

$$P'(z) = \int_0^1 (z^3t^4 \cos(tz) - 3t^3z^2 \sin(tz) - 3t^2z \cos(tz))g(t)\, dt, \quad g \in L^2(0; 1),$$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{P'(z)}{z} \right)' = \int_0^1 (-zt^5 \sin(tz) - t^4 \cos(tz))g(t)\, dt,$$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \left(\frac{P'(z)}{z} \right)' \right)' = -\int_0^1 t^6 \cos(tz) g(t)\, dt. \tag{11}$$

За теоремою Пелі-Вінера, функції $F(z)$ і $z^{-1}(z^{-1}(z^{-1}P'(z))')'$ належать простору $PW^2_{1,+}$. Крім того,

$$F'(z) = -\int_0^1 t \sin(tz) g(t)\, dt, \quad F''(z) = -\int_0^1 t^2 \cos(tz) g(t)\, dt,$$

$$F'''(z) = \int_0^1 t^3 \sin(tz) g(t)\, dt,$$

і

$$z^3 F'''(z) - 6z^2 F''(z) + 15zF'(z) - 15F(z) =$$

$$= \int_0^1 (z^3t^3 \sin(tz) + 6z^2t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t)\, dt = P(z).$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай рівняння (7) має розв'язок $f = F$, який належить до $PW^2_{1,+}$. Тоді, згідно з теоремою Пелі-Вінера,

$$f(z) = \int_0^1 \cos(tz)g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Тому

$$P(z) = z^3 f'''(z) - 6z^2 f''(z) + 15zf'(z) - 15f(z) =$$

$$= \int_0^1 (z^3t^3\sin(tz) + 6z^2t^2\cos(tz) - 15tz\sin(tz) - 15\cos(tz))g(t)\,dt,$$

тобто функція P подається у вигляді (4). Формули (8) і (9) випливають з рівностей (10) і (11) та формули для оберненого косинус-перетворення Фур'є. Теорему 6 доведено.

Приклад 2. *Функція $P(z) = z^7 \sin z$ не належить до $\widehat{\mathcal{E}}$. Справді, для цієї функції P диференціальне рівняння (7) має розв'язок $F(z) = C_1z + C_2z^3 + C_3z^5 + z^4\cos z - 6z^3\sin z - 15z^2\cos z + 15z\sin z$. Проте не існує сталих C_1, C_2 і C_3 таких, що функція P належить простору $PW^2_{1,+}$. Легко бачити, що функція P є парною тільки у випадку, коли $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, і при цьому функція $G(z) = z^4\cos z - 6z^3\sin z - 15z^2\cos z + 15z\sin z$ не належить простору $W^2_{1,+}$, бо $G \notin L^2(\mathbb{R})$. Тому рівняння (7) з $P(z) = z^7\sin z$ не має розв'язку, який належить до $PW^2_{1,+}$. Отже, за теоремою 6 функція P не подається у вигляді (4).*

Теорема 7. *Якщо ціла функція P подається у вигляді (4), то*

$$|P(z)| \le c_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1 + |\operatorname{Im} z|}}(1 + |z|)^3, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_1 > 0,$$

і P є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \le 1$. До того ж, функція $w^{-6}P(w)$ належить до $L^1(1;+\infty)$ і $P(z) = P_1(z) + P_1(-z)$, де P_1 — ціла функція така, що

$$|P_1(z)| \le c_2 \frac{(1 + |z|)^3}{\sqrt{1 + \operatorname{Im} z}}, \quad \operatorname{Im} z \ge 0, \quad c_2 > 0.$$

Крім того,

$$\int_x^{+\infty} \left|\frac{P(w)}{w^3}\right|^2 dw < +\infty, \quad \int_x^{+\infty} \frac{|P(w)|}{w^6}\,dw < +\infty,$$

для кожного $x \in (0;+\infty)$ і

$$\left|\int_x^{+\infty} \frac{P(w)}{w^6}\,dw\right| = o\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $P \in \widehat{\mathcal{E}}$ і $P(z) := F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) + F_4(z)$, де

$$F_1(z) = z^3 \int_0^1 t^3\cos(tz)g(t)\,dt, \quad F_2(z) = 6z^2 \int_0^1 t^2\cos(tz)g(t)\,dt,$$

$$F_3(z) = -15z\int_0^1 t\sin(tz)g(t)\,dt, \quad F_4(z) = -15\int_0^1 \cos(tz)g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

Згідно з теоремою Пелі-Вінера, функції $F_1(z)/z^3$, $F_2(z)/z^2$, $F_3(z)/z$ і $F_4(z)$ належать простору PW_1^2. До того ж,

$$F_4(z) = -15\int_0^1 \frac{e^{itz}}{2}g(t)\,dt - 15\int_0^1 \frac{e^{-itz}}{2}g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;1).$$

За нерівністю Шварца, отримуємо

$$|P(z)| \le c_3\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}(1+|z|)^3, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_3 > 0.$$

Тому функція P є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \le 1$. Крім того,

$$\int_x^{+\infty}\left|\frac{P(w)}{w^3}\right|^2 dw \le 15\int_x^{+\infty}\left(\left|\frac{F_1(w)}{w^3}\right|^2+\left|\frac{F_2(w)}{w^3}\right|^2+\left|\frac{F_3(w)}{w^3}\right|^2+\left|\frac{F_4(w)}{w^3}\right|^2\right)dw < +\infty,$$

і з нерівності Шварца, одержимо

$$\left|\int_x^{+\infty}\frac{P(w)}{w^6}\,dw\right| \le \frac{1}{x^2\sqrt{5x}}\left(\int_x^{+\infty}\left|\frac{P(w)}{w^3}\right|^2 dw\right)^{1/2} < +\infty, \quad x \in (0;+\infty).$$

Тому функція $w^{-6}P(w)$ належить простору $L^1(1;+\infty)$ і виконується асимптотична рівність (12). Далі, $P(z) = P_1(z) + P_2(z)$, де

$$P_1(z) := \int_0^1\left(z^3t^3\frac{e^{itz}}{2i} + 6z^2t^2\frac{e^{itz}}{2} - 15zt\frac{e^{itz}}{2i} - 15\frac{e^{itz}}{2}\right)g(t)\,dt,$$

$$P_2(z) := \int_0^1\left(-z^3t^3\frac{e^{-itz}}{2i} + 6z^2t^2\frac{e^{-itz}}{2} + 15zt\frac{e^{-itz}}{2i} - 15\frac{e^{-itz}}{2}\right)g(t)\,dt.$$

Отже, $P_2(z) = P_1(-z)$, і згідно з нерівністю Шварца, для $z = x+iy$ і $y \ge 0$ виконується

$$|P_1(z)| \le \frac{15}{2}(1+|z|)^3\|g\|_{L^2(0;1)}\left(\int_0^1 e^{-2ty}\,dt\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{15}{2}(1+|z|)^3\|g\|_{L^2(0;1)}\left(\frac{1-e^{-2y}}{2y}\right)^{1/2} \le c_4\frac{(1+|z|)^3}{\sqrt{1+\operatorname{Im} z}}, \quad c_4 > 0.$$

Теорему 7 доведено.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Робота присвячена дослідженню інтегрального зображення одного класу $\widehat{\mathcal{E}}$ цілих функцій P експоненційного типу $\sigma \le 1$. Знайдено умови для такого представлення в термінах існування розв'язків з відповідних просторів деяких диференціальних рівнянь (див. теореми 4–6). Отримано також асимптотичні оцінки цілих функцій $P \in \widehat{\mathcal{E}}$ (див. теорему 7) та побудовано приклади цілих функцій з $\widehat{\mathcal{E}}$ (див. приклади 1 і 2). Отримані результати можуть бути використані для дослідження повноти системи $\left\{t^3\rho_k^3\sqrt{t\rho_k}J_{-7/2}(t\rho_k) : k \in \mathbb{N}\right\}$ у просторі $L^2(0;1)$, де $J_{-7/2}$ — функція Бесселя першого роду з індексом $-7/2$ і $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність різних ненульових комплексних чисел.

Список використаної літератури

1. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr. : Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996. 248 p.
2. Sedletskii A. M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. *I.Journal of Mathematical Sciences.* 2005. Vol. 129, No. 6. P. 4251–4408. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-005-0349-y
3. Wiener N., Paley R. C. Fourier transforms in the complex domain. USA : Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1934. 183 p.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва : Наука, 1966. 672 с.
5. Griffith J. L. Hankel transforms of functions zero outside a finite interval. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales.* 1955. Vol. 89. P. 109–115.
6. Vynnyts'kyi B. V., Dilnyi V. M. On approximation properties of one trigonometric system. *Russian Mathematics.* 2014. Vol. 58, No. 11. P. 10–21. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X14110024
7. Khats' R. V. On the completeness of a system of Bessel functions of index $-3/2$ in weighted L^2-space. *Filomat.* 2023. Vol. 37, No. 19. P. 6335–6343. DOI: https://doi.org/10.2298/FIL2319335K
8. Khats' R. V. Integral representation of one class of entire functions. *Armenian Journal of Mathematics.* 2022. Vol. 14, No. 1. P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.1-1-9
9. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R.V. Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$. *Matematychni Studii.* 2010. Vol. 34, No. 2. P. 152–159.
10. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. Completeness and minimality of systems of Bessel functions. *Ufa Mathematical Journal.* 2013. Vol. 5, No. 2. P. 131–141. DOI: https://doi.org/10.13108/2013-5-2-131
11. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R.V. On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L^2-spaces. *Eurasian Mathematical Journal.* 2015. Vol. 6, No. 1. P. 123–131.
12. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R.V. A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler type functions. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences).* 2015. Vol. 50, No. 6. P. 300–305. DOI: https://doi.org/10.3103/S1068362315060060
13. Tuan V. K., Zayed A. I. Paley-Wiener-type theorems for a class of integral transforms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2002. Vol. 266, No. 1. P. 200–226. DOI: https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7740
14. Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations. Walter de Gruiter : Berlin, 2011. 341 p.
15. Unni K. R. Hankel transforms and entire functions. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1965. Vol. 71, No. 3. P. 511–513. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1965-11303-9
16. Khats' R. V. Generalized eigenvectors of linear operators and biorthogonal systems. *Constructive Mathematical Analysis.* 2022. Vol. 5, No. 2. P. 60–71. DOI: https://doi.org/10.33205/cma.1077842
17. Khats' R. V. Completeness of the system of generalized eigenfunctions for a Bessel-type differential operator. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 274, No. 6. P. 898–911. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06652-2
18. Шавала О. В. Про деякі апроксимаційні властивості функцій Бесселя з індексом $-5/2$. *Математичні студії.* 2015. Т. 43, № 2. С. 180–184. DOI: https://doi.org/10.15330/ms.43.2.180-184
19. Шавала О. В. Про повноту систем функцій, породжених функцією Бесселя. *Буковинський математичний журнал.* 2017. Т. 5, № 3-4. С. 168–171.
20. Винницький Б. В., Шавала О. В. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя. *Математичні студії.* 2008. Т. 30, № 1. С. 31–41.
21. Vynnyts'kyi B. V., Shavala O. V. Some properties of boundary value problems for Bessel's equation. *Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society.* 2013. Vol. 10. P. 169–172.

22. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1944. 804 p.

Khats' R. V. On the integral representation of one class of entire functions of exponential type.

In this paper, we study an integral representation of one class of entire functions of exponential type. Conditions for the existence of this representation in terms of solutions from the corresponding spaces of some differential equations are found. We obtain asymptotic estimates of entire functions from the considered class of functions. We also give examples of entire functions from this class.

Keywords: Paley-Wiener theorem, entire function of exponential type, differential equation, integral representation, Schwarz inequality.

References

1. Levin, B. Ya. (1996). *Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr.* USA: Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
2. Sedletskii, A. M. (2005). Analytic Fourier transforms and exponential approximations. *I. Journal of Mathematical Sciences,* 129(6), 4251–4408. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0349-y
3. Wiener, N., & Paley, R. C. (1934). *Fourier transforms in the complex domain.* USA: Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
4. Dzhrbashyan, M. M. (1966). *Integral transforms and representations of functions in the complex domain.* Moscow: Nauka [in Russian].
5. Griffith, J. L. (1955). Hankel transforms of functions zero outside a finite interval. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales,* 89, 109–115.
6. Vynnyts'kyi, B. V., & Dilnyi, V. M. (2014). On approximation properties of one trigonometric system. *Russian Mathematics,* 58(11), 10–21. https://doi.org/10.3103/S1066369X14110024
7. Khats', R. V. (2023). On the completeness of a system of Bessel functions of index $-3/2$ in weighted L^2-space. *Filomat,* 37(19), 6335–6343. https://doi.org/10.2298/FIL2319335K
8. Khats', R. V. (2022). Integral representation of one class of entire functions. *Armenian Journal of Mathematics,* 14(1), 1–9. https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.1-1-9
9. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2010). Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$. *Matematychni Studii,* 34(2), 152–159.
10. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2013). Completeness and minimality of systems of Bessel functions. *Ufa Mathematical Journal,* 5(2), 131–141. https://doi.org/10.13108/2013-5-2-131
11. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2015). On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L^2-spaces. *Eurasian Mathematical Journal,* 6(1), 123–131.
12. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2015). A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler type functions. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences),* 50(6), 300–305. https://doi.org/10.3103/S1068362315060060
13. Tuan, V. K., & Zayed, A. I. (2002). Paley-Wiener-type theorems for a class of integral transforms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 266(1), 200–226. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7740
14. Laine, I. (2011). *Nevanlinna theory and complex differential equations.* Berlin: Walter de Gruiter.
15. Unni, K. R. (1965). Hankel transforms and entire functions. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 71(3), 511–513. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1965-11303-9
16. Khats', R. V. (2022). Generalized eigenvectors of linear operators and biorthogonal systems. *Constructive Mathematical Analysis,* 5(2), 60–71. https://doi.org/10.33205/cma.1077842
17. Khats', R. V. (2023). Completeness of the system of generalized eigenfunctions for a Bessel-type differential operator. *Journal of Mathematical Sciences,* 274(6), 898–911. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06652-2
18. Shavala, O. V. (2015). On some approximation properties of the Bessel functions of order $-5/2$. *Matematychni Studii,* 43(2), 180–184. https://doi.org/10.15330/ms.43.2.180-184 [in Ukrainian].

19. Shavala, O. V. (2017). On completeness of systems of functions generated by the Bessel function. *Bukovinian Mathematical Journal,* 5(3-4), 168–171 [in Ukrainian].
20. Vynnyts'kyi, B. V., & Shavala,, O. V. (2008). Boundedness of solutions of a second-order linear differential equation and a boundary value problem for Bessel's equation. *Matematychni Studii,* 30(1), 31–41 [in Ukrainian].
21. Vynnyts'kyi, B. V., & Shavala, O. V. (2013). Some properties of boundary value problems for Bessel's equation. *Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society,* 10, 169–172.
22. Watson, G. N. (1944). *A treatise on the theory of Bessel functions. 2nd ed.* Cambridge: Cambridge University Press.

Одержано 07.10.2023