УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).7-14

С. І. Балога[1], О. М. Гапак[2], Г. С. Тютюнникова[3], Є. І. Самусь[4], С. В. Тютюнников[5]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат фізико-математичних наук
switlana.baloha@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1221-9072

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат педагогічних наук
oksana.hapak@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3448-6670

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж,
ganna.tyutynnykova@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0859-6382

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж,
yevgenija.samus@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-9601-289X

[5] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
викладач кафедри приладобудування,
sergiy.tyutyunnykov@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4781-5453

ПРО ЗВЕДЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО L-ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Дана стаття присвячена асимптотичному інтегруванню систем диференціальних рівнянь, що є лінійним розширенням динамічної системи на торі. Основи цієї теорії були розроблені А. М. Самойленком.

Було досліджено задачу зведення одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тора T^m і n-вимірного евклідового простору E^n до L-діагонального вигляду. Сформульовано та доведено достатні умови зведення одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі, що має специфічні властивості в ω-граничній множині Ω, до L-діагонального вигляду.

Ключові слова: m-вимірний тор, n-вимірний Евклідів простір, ω-гранична множина, розширення динамічної системи на торі, L-діагональна система, асимптотика розв'язків.

1. Вступ. Теорія розширень систем динамічних рівнянь на торі [1] є важливим розділом теорії звичайних диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається та має важливе прикладне застосування до різноманітних задач науки та техніки. Дана теорія описує процеси, що носять коливний характер. Основи цієї теорії були розроблені А. М. Самойленком і узагальнено в працях [1] і [2].

Дана стаття присвячена дослідженню асимптотиці розв'язків одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених у просторі $\mathrm{T}^m \times R^n$. Розглянуто питання зведення одного класу розширень динамічних систем на торі до L-діагонального вигляду.

Питання зведення систем лінійних диференціальних рівнянь до L-діагонального вигляду розглянуто в праці [3], найпростіші з випадків були сформульовані ще раніше у роботах Н. Левінсоном [4].

Дослідженню поведінки розв'язку L-діагональних систем присвячено ряд робіт таких математиків, як Шпет і Перон у випадку, коли діагональна матриця є сталою та Рапопорт [3] і Н. Левінсон [4], при змінній діагональній матриці. Дослідженню поведінки розв'язку L-діагональних систем, що є лінійним розширенням динамічних систем на торі, та зведення такої системи до L-діагонального вигляду присвячена робота [5].

2. Постановка задачі та формулювання основного результату. Розглянемо лінійне розширення динамічної системи на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $a(\varphi)$, $A(\varphi) \in C(\mathrm{T}^m)$, $x \in R^n$.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ — розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через Ω_φ — ω-граничну множину цього розв'язку. Об'єднання ω-граничних множин для всіх $\varphi \in \mathrm{T}^m$ позначимо

$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{T}^m} \Omega_\varphi.$$

Лема.[6] *Для будь-якого фіксованого околу $U(\Omega)$ множини Ω знайдеться момент часу T такий, що для всіх $t \geq T$ і всіх $\varphi \in \mathrm{T}^m$ $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$.*

Позначимо через $C'(\mathrm{T}^m)$ підпростір простору неперервних функцій $C(\mathrm{T}^m)$, який складається з таких функцій u, що $\dot{u}(\varphi_t(\varphi))$ має по t неперервні похідні такі, що $\frac{d}{dt}u(\varphi_t(\varphi)) = \dot{u}(\varphi)$ для всіх $t \in R$, $\varphi \in \mathrm{T}^m$ і деякої функції $u(\varphi) \in C(\mathrm{T}^m)$.

Систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y, \tag{2}$$

де $a(\varphi) \in C(\mathrm{T}^m)$ — вектор-функція, $Q(\varphi)$ — деяка матрична функція, абсолютно інтегровна на проміжку $[0, \infty)$ вздовж кожного розв'язку $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathrm{T}^m$ першого із рівнянь системи (2), тобто

$$\int_0^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\| \, dt < \infty$$

а $\Lambda(\varphi) = diag(\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), ..., \lambda_n(\varphi)) \in C(\mathrm{T}^m)$– діагональна матриця, по аналогії з [4] називатимемо L-діагональною. Вважатимемо, що діагональні елементи $\lambda_j(\varphi)$ $(j = \overline{1, n})$ матриці $\Lambda(\varphi)$ асимптотично розділені, тобто величина $\mathrm{Re}(\lambda_j(\varphi) - \lambda_\nu(\varphi))$, $j \neq \nu$, не змінює знаку при $\varphi \in \Omega$. Асимптотиці розв'язків систем диференціальних рівнянь вигляду (2) присвячена робота [5].

Наведемо деякі випадки зведення системи вигляду (1) до L-діагонального вигляду (2).

Теорема 1. *Нехай матриця $A(\varphi)$ задовольняє наступні умови:*

- *існує*
$$\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A \tag{3}$$
для всіх $\varphi \in \mathrm{T}^m$ і всі власні числа граничної матриці A різні;
- *матриця*
$$D(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi),$$
абсолютно інтегровна на $[0,\infty)$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, тобто
$$\int\limits_0^\infty \|D(\varphi_t(\varphi))\|\, dt < \infty,$$
рівномірно по $\varphi \in \mathrm{T}^m$. Тоді в деякому околі $U(\Omega)$ множини Ω система (1) за допомогою лінійного перетворення $x = S(\varphi)y$ зводиться до L-діагонального вигляду
$$\dot\varphi = a(\varphi), \quad \dot y = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) \in C'(U(\Omega))$, $\Lambda(\varphi)$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(\varphi)$, $C(U(\Omega)) \ni Q(\varphi)$ — абсолютно інтегровна на $[T,\infty)$ матрична функція вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$.

Доведення. Нехай $S(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$, тобто
$$S^{-1}(\varphi)A(\varphi)S(\varphi) = \Lambda(\varphi), \quad \varphi \in U(\Omega).$$

Згідно з [6], враховуючи умови теореми, в деякому околі $U(\Omega)$ множини Ω існує неперервна, обмежена матриця $S(\varphi)$ з неперервною, обмеженою оберненою матрицею $S^{-1}(\varphi)$, причому матриці $S(\varphi)$, $S^{-1}(\varphi)$ неперервно диференційовні по $\varphi \in U(\Omega)$ і матриці
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi),$$
і
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi),$$
абсолютно інтегровні вздовж будь-якої траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ рівномірно по $\varphi \in \mathrm{T}^m$ на проміжку $[T,\infty)$.

Проведемо в системі (1) заміну:
$$\dot\varphi = a(\varphi), S(\varphi)\dot y + \dot S(\varphi)y = A(\varphi)S(\varphi)y,$$
або ж
$$\dot\varphi = a(\varphi), \dot y = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) = diag(\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), \dots \lambda_n(\varphi))$ — діагональна матриця, а $Q(\varphi) = -S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)$, $\varphi \in U(\Omega)$. Оскільки $S(\varphi)$ і $S^{-1}(\varphi)$ обмежені, то з останньої рівності випливає, що існує така додатна стала a_1, що

$$\|Q(\varphi)\| \leq a_1 \left\|\dot{S}(\varphi)\right\|, \quad \varphi \in U(\Omega).$$

Якщо матриця $D(\varphi)$ абсолютно інтегровна на $[0,\infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$, то $\dot{S}(\varphi)$ буде абсолютно інтегровною вздовж кожної траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ на проміжку $[T,\infty)$ такому, що $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$ для всіх $\varphi \in \mathrm{T}^m$, а тому

$$\int\limits_T^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\| \, dt \leq a_1 \int\limits_T^\infty \left\|\dot{S}(\varphi_t(\varphi))\right\| dt < \infty,$$

тобто $Q(\varphi)$ абсолютно інтегровна на проміжку $[T,\infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$. Теорему доведено.

Відомо [5], що система (1) за виконання умов теореми має фундаментальну систему розв'язків

$$x_j(t,\varphi) = e^{\int\limits_T^t \lambda_j(\varphi_s(\varphi))ds}(e_j + \eta_j(t,\varphi)), (j = \overline{1,n}; t \geq T),$$

де $\|\eta_j(t,\varphi)\| \to 0$, коли $t \to \infty$.

Приклад. Застосуємо вищевикладені міркування до наступної системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \ddot{x} + p^2(\varphi)x = 0, \tag{4}$$

де $a(\varphi) \in C'(\mathrm{T}^m)$, $p(\varphi)$ — додатна неперервно диференційовна 2π-періодична по φ функція.

Систему (4) можна записати у вигляді:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p^2(\varphi)x, \tag{5}$$

або ж

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2(\varphi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Безпосередні підрахунки показують, що матриця $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p\,(\varphi)\,i & -p\,(\varphi)\,i \end{pmatrix}$ приводить матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$ до діагонального вигляду

$$-\frac{1}{2p(\varphi)i}\begin{pmatrix} -p(\varphi)i & -1 \\ -p(\varphi)i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2(\varphi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p(\varphi)i & -p(\varphi)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\varphi)i & 0 \\ 0 & -p(\varphi)i \end{pmatrix}.$$

Тому вихідну систему, зробивши в ній заміну

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p\,(\varphi)\,i & -p\,(\varphi)\,i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

зводимо до системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\varphi)i & 0 \\ 0 & -p(\varphi)i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_{\ 1} \end{pmatrix} + \frac{\dot{p}(\varphi)}{2p(\varphi)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

яка є L-діагональною, причому величина $\mathrm{Re}(\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)) = \mathrm{Re}(2p(\varphi)i) = 0$, тобто не змінює знак. Якщо $\dot{p}(\varphi_t(\varphi))$ абсолютно інтегровна на проміжку $[0, \infty)$ для будь-якої траєкторії $\varphi_t(\varphi)$, то для фундаментальної матриці справедлива асимптотична формула

$$Y(t,\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds} + \varepsilon_1(t,\varphi) & \varepsilon_2(t,\varphi) \\ \varepsilon_3(t,\varphi) & e^{-i\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds} + \varepsilon_4(t,\varphi) \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_\nu(t,\varphi) \to 0$ при $t \to \infty$,$(\nu = \overline{1,4})$.

Повертаючись до вихідних змінних x і y для системи (5) дістанемо фундаментальну матрицю

$$\tilde{X}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p(\varphi)\,i & -p(\varphi)\,i \end{pmatrix} \cdot Y(t,\varphi) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds} + \tilde{\varepsilon}_1(t,\varphi) & e^{-i\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds} + \tilde{\varepsilon}_2(t,\varphi) \\ p(\varphi)\,i \cdot e^{i\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds} + \tilde{\varepsilon}_3(t,\varphi) & -p(\varphi)\,i \cdot e^{-i\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds} + \tilde{\varepsilon}_4(t,\varphi) \end{pmatrix},$$

де $\tilde{\varepsilon}_\nu(t,\varphi) \to 0$, при $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Покладаючи

$$\tilde{X}(t,\varphi)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} = X(t,\varphi),$$

дістанемо дійсну фундаментальну матрицю

$$X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds + \eta_1(t,\varphi) & \sin\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds + \eta_2(t,\varphi) \\ -p(\varphi)\sin\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds + \eta_3(t,\varphi) & p(\varphi)\cos\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds + \eta_4(t,\varphi) \end{pmatrix},$$

де $\eta_j(t,\varphi) \to 0$, $j = 1, 2, 3, 4$ при $t \to \infty$.

Таким чином, вихідне рівняння (4) при $t \to \infty$ має загальний розв'язок асимптотичного вигляду

$$x(t,\varphi) = C_1 \cos\left(\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds\right) + C_2 \sin\left(\int\limits_0^t p(\varphi_s(\varphi))ds\right) + \eta(t,\varphi),$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі, $\eta(t,\varphi)$ і $\frac{d\eta(t,\varphi)}{dt} \to 0$, при $t \to \infty$.

Як приклад наведемо аналог рівняння Матьє

$$\dot{\varphi} = \sin\varphi, \ddot{x} + (a - 2h^2\cos 2\varphi)x = 0.$$

Це рівняння вигляду (4), у якому $a(\varphi) = \sin\varphi$, де φ — кутова координата на одиничному колі і $p^2(\varphi) = a - 2h^2\cos 2\varphi$, $a > 2h^2$.

$$\frac{\dot{p}}{2p} = \frac{4h^2\sin 2\varphi}{4p^2} = \frac{h^2\sin 2\varphi}{a - 2h^2\cos 2\varphi}.$$

Збіжність $\int\limits_0^\infty \frac{\dot{p}(\varphi_t(\varphi))}{2p(\varphi_t(\varphi))}dt$ еквівалентна збіжності

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\pi} \frac{h^2\sin 2\varphi}{a - 2h^2\cos 2\varphi}d\varphi = -\frac{h^2}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\pi} \frac{d(\cos 2\varphi)}{a - 2h^2\cos 2\varphi} = \frac{1}{4}\ln(a - 2h^2\cos 2\varphi)\Big|_{\varphi_0}^{\pi},$$

тобто інтеграл збіжний і маємо висновок: з плином часу система наближається до режиму гармонічних коливань з амплітудою $\omega(\varphi_t(\varphi)) \to \sqrt{a - 2h^2}$.

Перехідний процес описується асимптотичними формулами

$$x(t,\varphi) = C_1\cos\left(\int\limits_0^t \sqrt{a - 2h^2\cos 2\varphi_s(\varphi)}ds\right) +$$
$$+C_2\sin\left(\int\limits_0^t \sqrt{a - 2h^2\cos 2\varphi_s(\varphi)}ds\right) + \eta(t,\varphi).$$

Покажемо ще один випадок зведення системи диференціальних рівнянь до L-діагонального вигляду за допомогою лінійної підстановки.

Нехай $S(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$, тобто

$$S^{-1}(\varphi)A(\varphi)S(\varphi) = \Lambda(\varphi), \varphi \in U(\Omega).$$

За певних умов така матриця існує [6]. Провівши у системі (1) заміну

$$x = S(\varphi)[I + C(\varphi)]y, \varphi \in U(\Omega),$$

одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad S(\varphi)[I + C(\varphi)]\dot{y} = \left\{[S(\varphi)\Lambda(\varphi) - \dot{S}(\varphi)][I + C(\varphi)] - S(\varphi)\dot{C}(\varphi)\right\}y,$$

або після домноження зліва на $S^{-1}(\varphi)$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad [I + C(\varphi)]\dot{y} = \left\{\Lambda(\varphi) - S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)][I + C(\varphi)] - \dot{C}(\varphi)\right\}y.$$

Матрицю $C(\varphi)$ визначимо з матричного рівняння, адже вона до цього часу залишалася довільною:

$$\Lambda(\varphi)C(\varphi) - C(\varphi)\Lambda(\varphi) = G(\varphi),$$

де $G(\varphi) = S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)$. На головній діагоналі матриць, що утворюють ліву і праву частини останнього рівняння, розташовані елементи, тотожно рівні нулю, а прирівнюючи інші елементи цих двох матриць знайдемо

$$c_{ij}(\varphi) = \frac{g_{ij}(\varphi)}{\lambda_i(\varphi) - \lambda_j(\varphi)}, i \neq j.$$

На головній діагоналі матриці $C(\varphi)$, до прикладу, можна покласти $c_{ii}(\varphi) = 0$. Отже, якщо матриця $C(\varphi)$ задовольняє поставленим умовам, то систему диференціальних рівнянь можна записати:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad [I + C(\varphi)]\dot{y} = [I + C(\varphi)]\Lambda(\varphi)\, y - [G(\varphi)\, C(\varphi) - \dot{C}(\varphi)]y$$

або ж після домноження зліва на обернену матрицю $[I + C(\varphi)]^{-1}$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = \Lambda(\varphi)\, y - [I + C(\varphi)]^{-1}[G(\varphi)\, C(\varphi) - \dot{C}(\varphi)]y.$$

Якщо елементи матриць $G(\varphi)\, C(\varphi)$ і $\dot{C}(\varphi)$ абсолютно інтегровні на проміжку $[T, \infty)$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, при достатньо великому T і $\det[I + C(\varphi)] \neq 0$ в $U(\Omega)$, то система диференціальних рівнянь L-діагональна на цьому інтервалі, в якому елементи матриці абсолютно інтегровні на проміжку $[T, \infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$. Таким чином, вище викладені міркування доводять наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай матриця $A(\varphi)$ задовольняє умови теореми 1, $S(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$. Нехай матриця $C(\varphi)$ така, що задовольняє в $U(\Omega)$ рівняння $\Lambda(\varphi)C(\varphi) - C(\varphi)\Lambda(\varphi) = G(\varphi)$, де $G(\varphi) = S^{-1}(\varphi)S(\varphi)$. Тоді якщо $G(\varphi)\, C(\varphi)$ і $\dot{C}(\varphi)$ абсолютно інтегровні на проміжку $[0, \infty)$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, то в деякому околі $U(\Omega)$ система (1) за допомогою перетворення $x = S(\varphi)[I + C(\varphi)]y$, $\varphi \in U(\Omega)$ зводиться до L-діагонального вигляду*

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) \in C'(U(\Omega))$, $\Lambda(\varphi)$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(\varphi)$, $C(U(\Omega)) \ni Q(\varphi)$ — абсолютно інтегровна на $[T, \infty)$ матрична функція вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$.

3. Висновки. У роботі досліджено задачу зведення одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, до L-діагонального вигляду. Сформульовано та доведено достатні умови зведення одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі, що має специфічні властивості в ω-граничній множині Ω, до L-діагонального вигляду. Один із сформульованих та доведених випадків проілюстровано на прикладі.

Список використаної літератури

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова: монографія. Київ : Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы: монография. Москва : Наука, 1987. 304 с.
3. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. ИАН УССР : Киев, 1954. 287 с.
4. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations. *Duke Math. Journ.* 1948. Vol. 15. P. 111–126.
5. Балога С. І. Асимптотика розв'язків L-діагональних систем. *Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.* 2007. № 2. С. 43–46.
6. Балога С. І. Про діагоналізацію змінної матриці. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. «мат. та інформ.»* 2007. Вип. 14–15. С. 4–8.

Baloha S. I., Hapak O. M., Tyutynnykova G. S., Samus Ye. I., Tyutynnykov S. V. About the reducing of one class of systems of differential equations to the L-diagonal form.

This paper is devoted to the asymptotic integration of systems of differential equations, which are linear extensions of a dynamical system on a torus. The basics of this theory were developed by A. M. Samoilenko. The problem of reducing one class of systems of differential equations defined in the direct product of an m-dimensional torus T^m and an n-dimensional Euclidean space E^n to the L-diagonal form is investigated.

Sufficient conditions for reducing one class of linear expansions of dynamical systems on a torus with specific properties in the ω-boundary set Ω to the L-diagonal form were formulated and proved.

Keywords: m-dimensional torus, n-dimensional Euclidean space, ω-limit set, L-diagonal system, asymptotic behavior of the solutions.

References

1. Mitropolsky, Yu. A., Samoilenko, A. M., & Kulyk, V. L. (1990). *Investigation of dichotomy of linear system of differential equations via Lyapunov functions.* Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
2. Samoilenko, A. M. (1987). *Elements of mathematical theory of multi-frequency oscillations. Invariant torus.* Moskow: Nauka [in Russian].
3. Rapoport, I. M. (1954). *On some asymptotic methods in the theory of differential equations.* AN USSR: Kiev [in Russian].
4. Levinson, N. (1948). The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations. *Duke Math. Journ.,* 15, 111–126.
5. Baloha, S. I. (2007). Asymptotic behavior of the solutions L-diagonal system. *Scientific Bullet in of Kiev University, series of physical and mathematical sciences,* 2, 43–46 [in Ukrainian].
6. Baloha, S. I. (2007). On the diagonalization of a variable matrix. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, series of mathematics and informatics,* 14–15, 4–8 [in Ukrainian].

Одержано 15.10.2023