УДК 512.579, 512.53
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).34-41

Я. А. Крикля

ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»,
аспірантка, кафедра алгебри та системного аналізу,
krivorotko.yana@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8860-3433

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВІЛЬНИХ ЛІВИХ n-ТРИНІЛЬПОТЕНТНИХ ТРІОЇДІВ

Поняття тріоїда та триалгебри виникли в праці Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко, які побудували ці алгебри за допомогою операд, асоційованих з ланцюговими модулями симплексів та політопів Сташеффа. Триалгебри, як відомо, є лінійними аналогами тріоїдів. Серед перших результатів про тріоїди є побудова Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко вільного об'єкта рангу 1 у многовиді тріоїдів. Тріоїди й напівгрупи природно пов'язані між собою: якщо операції тріоїда збігаються, то він перетворюється в напівгрупу. Останнім часом кількість робіт з теорії тріоїдів та триалгебр стрімко зростає, водночас значна увага приділена побудові відносно вільних об'єктів. У цій роботі продовжено вивчення вільних лівих n-тринільпотентних тріоїдів. Охарактеризовано всі максимальні підтріоїди вільних лівих n-тринільпотентних тріоїдів ($n > 1$) та показано, що вільний лівий n-тринільпотентий тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда в скінченному випадку. Отримані результати можуть бути застосовані в теорії триалгебр.

Ключові слова: тріоїд, підтріоїд, вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд, напівгрупа.

1. Вступ. Нагадаємо, що тріоїд — це непорожня множина T, наділена трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють наступні вісім аксіом:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{T1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{T2}$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{T7}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T8}$$

для всіх $x, y, z \in T$. Цей клас універсальних алгебр було введено Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [7] під час вивчення тернарних планарних дерев. Тріоїди мають широке застосування в теорії триалгебр [1–3, 5, 7]. Вони також мають тісні зв'язки з такими алгебраїчними структурами як дімоноїди [4, 10, 11, 16], діалгебри [6, 8, 9], допельнапівгрупи [14, 15] та n-кратні напівгрупи [19, 22]. Для подальшої інформації про тріоїди див., наприклад, оглядові статті [17, 18].

Теорія многовидів тріоїдів була розвинута в [4, 13, 18, 20, 23–27]. У [20] було побудовано вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди довільного рангу, а у [21] охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. У цій статті продовжено дослідження, розпочаті в [20, 21]. Нашою метою є вивчення деяких властивостей вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів довільного рангу. У роботі описано всі максимальні підтріоїди вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда ($n > 1$) та показано, що вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда в скінченному випадку. Використовуючи принцип двоїстості, можна одержати опис відповідних властивостей вільних правих n-тринільпотентних тріоїдів. Отримані результати можуть знайти деякі застосування в теорії триалгебр.

2. Ліві n-тринільпотентні тріоїди. Наведемо визначення вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда [20]. Як зазвичай, $\mathbb{N}$ позначає множину всіх натуральних чисел. Через Ω позначимо сигнатуру тріоїда. Нехай $a_1, \ldots, a_n$ — індивідуальні змінні. Через $P(a_1, \ldots, a_n)$ будемо позначати множину всіх термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1, \ldots, \circ_{n-1} \in \Omega$. Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається лівим тринільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $a \in T$ та будь-якого $p(a_1, \ldots, a_n) \in P(a_1, \ldots, a_n)$ виконуються наступні тотожності:

$$p(a_1, \ldots, a_n) * a = p(a_1, \ldots, a_n),$$

$$p(a_1, \ldots, a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n,$$

де $* \in \{\dashv, \perp\}$. Найменше таке n називається індексом лівої тринільпотентності тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий тринільпотентний тріоїд з індексом лівої тринільпотентності $\leq k$ називається лівим k-тринільпотентим. Праві k-тринільпотентні тріоїди визначаються двоїстим чином [20]. Зрозуміло, що операції будь-якого лівого (правого) 1-тринільпотентного тріоїда збігаються та він є напівгрупою лівих (правих) нулів.

Клас всіх лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів утворює підмноговид многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, називається вільним лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом.

Нагадаємо конструкцію вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда [20].

Нехай $n, k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Будемо вважати $L + k = \{m + k \mid m \in L\}$. Зрозуміло, що $\varnothing + k = \varnothing$. Для $L \neq \varnothing$ покладемо $L^{k,n} = \{m \in L \mid k + m \leq n\}$ та позначимо найменше число множини L через L_{min}. Очевидно, $L^{k,n} = \varnothing$, якщо $k + m > n$ для всіх $m \in L$.

Нехай X — довільна непорожня множина, $F[X]$ — вільна напівгрупа на X та $w \in F[X]$. Довжина слова w позначається через l_w. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Якщо

$l_w \geq n$, то $\overset{n}{\overrightarrow{w}}$ позначає початкове підслово довжини n слова w, та якщо $l_w < n$, то $\overset{n}{\overrightarrow{w}} = w$. Визначимо операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ на

$$V_n = \{(w, L) \mid w \in F[X],\ l_w \leq n,\ L \subseteq \{1, 2, \ldots, l_w\},\ L \neq \varnothing\}$$

за правилами:

$$(w, L) \dashv (u, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L),$$

$$(w, L) \vdash (u, R) = \begin{cases} (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, \{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, R^{l_w, n} + l_w) & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(w, L) \perp (u, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L \cup (R^{l_w, n} + l_w))$$

для всіх $(w, L), (u, R) \in V_n$. Алгебра $(V_n, \dashv, \vdash, \perp)$ позначається через $FT_n^l(X)$.

Теорема 1. *([20, Теорема 3.1]) $FT_n^l(X)$ є вільним лівим n-тринільпотентним тріоїдом.*

Наслідок 1. *([21, Твердження 2.5]) Вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд $FT_n^l(X)$, породжений скінченною множиною $X \times \{1\}$, є скінченним. Більш того, $|FT_n^l(X)| = \sum_{i=1}^{n} (2^i - 1) \cdot |X|^i$.*

3. Деякі підтріоїди вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда. Опишемо спочатку всі максимальні підтріоїди тріоїда $FT_n^l(X)$.

Підтріоїд тріоїда G є власним, якщо він не дорівнює G. Підтріоїд тріоїда G є максимальним, якщо він є власним підтріоїдом тріоїда G, який не міститься в будь-якому іншому власному підтріоїді тріоїда G.

Теорема 2. *Нехай F — підтріоїд вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$, $n > 1$. Тоді F є максимальним тоді й лише тоді, коли існує $x \in X$ такий, що $F = V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$.*

Доведення. Зауважимо що, якщо $n = 1$, то операції тріоїда $FT_n^l(X)$ збігаються та він є напівгрупою лівих нулів. Тому припустимо, що $n > 1$.

Нехай $x \in X$ та $(w, L), (u, R) \in V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$. Неважко пересвідчитись, що $(w, L) * (u, R) \in V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$ для будь-якої операції $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Дійсно, оскільки $n > 1$, то довжина слова $\overset{n}{\overrightarrow{wu}}$ буде більше ніж 1, і отже, $\overset{n}{\overrightarrow{wu}} \neq x$. Це означає, що $V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$ є підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$. Очевидно, що він є максимальним.

Навпаки, нахай F — максимальний підтріоїд тріоїда $FT_n^l(X)$. Оскільки $X \times \{1\}$ є найменшою породжуючою множиною тріоїда $FT_n^l(X)$, то $\{(x, \{1\}) \mid x \in X\} \nsubseteq F$, тобто існує $x \in X$ такий, що $(x, \{1\}) \notin F$. Таким чином, $F \subseteq V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$. Оскільки F є максимальним підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$, то отримуємо, що $F = V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$.

Теорему доведено.

Нагадаємо, що дімоноїд [6] — це непорожня множина, наділена двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1) - (T3)$. Діcполука або дімоноїд ідемпотентів [12] — це дімоноїд, у якого обидві операції ідемпотентні. У [12] було введено поняття діcполуки піддімоноїдів. Наведемо його визначення.

Якщо $\psi : D_1 \to D_2$ — гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_ψ позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді D_1.

Нехай D – довільний дімоноїд, J — деякий дімоноїд ідемпотентів. Якщо існує гомоморфізм

$$\beta : D \to J : x \mapsto x\beta,$$

то кожний клас конгруенції Δ_β є піддімоноїдом дімоноїду D, а сам дімоноїд D є об'єднанням таких дімоноїдів D_ξ, $\xi \in J$, що

$$x\beta = \xi \Leftrightarrow x \in D_\xi = \Delta_\beta^x = \{t \in D \,|(x;t) \in \Delta_\beta\},$$

$$D_\xi \dashv D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad D_\xi \vdash D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow D_\xi \cap D_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку кажуть, що D розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або D є дісполукою J піддімоноїдів D_ξ, $\xi \in J$). Якщо ж J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то кажуть, що D є сполукою J піддімоноїдів D_ξ, $\xi \in J$. Якщо ж J є напівгрупою лівих (правих) нулів, то кажуть, що D є лівою (правою) сполукою J піддімоноїдів D_ξ, $\xi \in J$.

Застосовуючи поняття дісполуки піддімоноїдів, охарактеризуємо один важливий підтріоїд тріоїду $FT_n^l(X)$.

Теорема 3. *Нехай $n > 1$. Множина $R_n = \{(w, L) \in FT_n^l(X) \,|\, l_w = n\}$ є підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$. Крім того, операції $\dashv$ та $\perp$ на R_n збігаються та R_n є лівою сполукою піддімоноїдів, кожен із яких утворюється з напівгрупи лівих нулів та напівгрупи з нульовим множенням.*

Доведення. У випадку $n = 1$ операції тріоїда $FT_n^l(X)$ збігаються та $R_n = FT_n^l(X)$ є напівгрупою лівих нулів. Тому розглядаємо випадок $n > 1$.

Нехай $(w, L), (u, R) \in R_n$. Тоді $(w, L) * (u, R) \in R_n$ для будь-якої операції $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$, оскільки $\overset{n}{\overrightarrow{wu}} = w$. Звідси випливає, що R_n є підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$. Враховуючи, що $l_w = l_u = n$, маємо

$$(w, L) \dashv (u, R) = (w, L) \perp (u, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L) = (w, L),$$

$$(w, L) \vdash (u, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, \{n\}) = (w, \{n\}).$$

Отже, операції $\dashv$ та $\perp$ на R_n збігаються і R_n є дімоноїдом.

Покажемо, що R_n є лівою сполукою піддімоноїдів. Для цього розглянемо множину

$$K = \{w \in F[X] \,|\, l_w = n\}.$$

Визначивши на множині K операцію за правилом: $wu = w$ для всіх $w, u \in F[X]$, отримаємо напівгрупу лівих нулів. Позначимо її через K_l. Визначимо далі відображення

$$f : R_n \to K_l : (w, L) \mapsto w.$$

Безпосередньо перевіряється, що f є сюр'єктивним гомоморфізмом. Зрозуміло, що класами конгруенції Δ_f є піддімоноїди

$$\{(w, L) | L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\},\ L \neq \varnothing\},\ w \in K_l.$$

Покладемо

$$B_w = \{(w, L) | L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, L \neq \varnothing\}, w \in K_l.$$

Звідси R_n є лівою сполукою K_l піддімоноїдів $B_w, w \in K_l$. Очевидно, що кожний дімоноїд $B_w, w \in K_l$, є ізоморфним дімоноїду

$$(\{L | L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, L \neq \varnothing\}, \prec, \succ)$$

з операціями, визначеними за правилами:

$$L \prec R = L, \quad L \succ R = \{n\}.$$

Теорему доведено.

У роботі [20] показано, що група автоморфізмів вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$ є ізоморфною симетричній групі на множині X. Природньо розглянути ендоморфізми вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$. Через $End(FT_n^l(X))$ позначимо напівгрупу всіх ендоморфізмів тріоїда $FT_n^l(X)$.

Твердження 1. *Нехай X — непорожня скінченна множина. Тоді*

$$\left|End(FT_n^l(X))\right| = \Big(\sum_{i=1}^{n} (2^i - 1) \cdot |X|^i\Big)^{|X|}.$$

Доведення. Оскільки $X \times \{1\}$ є найменшою породжуючою множиною тріоїда $FT_n^l(X)$, то кожне відображення $\varphi : X \times \{1\} \to V_n$ індукує ендоморфізм тріоїда $FT_n^l(X)$. Навпаки, кожний ендоморфізм тріоїда $FT_n^l(X)$ однозначно визначається відображенням із множини $X \times \{1\}$ в тріоїд $FT_n^l(X)$. Добре відомо, що кількість всіх відображень із множини з k елементів у множину з m елементів дорівнює m^k. Отже, попередні міркування приводять нас до такої формули:

$$\left|End(FT_n^l(X))\right| = |V_n|^{|X|}.$$

Далі, застосовуючи наслідок 1, дійдемо висновку, що

$$\left|End(FT_n^l(X))\right| = \Big(\sum_{i=1}^{n} (2^i - 1) \cdot |X|^i\Big)^{|X|}.$$

Твердження доведено.

Зауваження 1. *Для того, щоб охарактеризувати відповідні властивості вільного правого n-тринільпотентного тріоїда, використвовуємо принцип двоїстості.*

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі продовжено вивчення вільних лівих n-тринільпотентних тріоїдів. Охарактеризовано всі максимальні підтріоїди вільних лівих n-тринільпотентних тріоїдів ($n > 1$) та показано, що вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда в скінченному випадку. Отримані результати можуть бути застосовані в теорії триалгебр.

Список використаної літератури

1. Bagherzadeha F., Bremnera M., Madariagab S. Jordan trialgebras and post-Jordan algebras. *J. Algebra.* 2017. Vol. 486. P. 360–395.
2. Casas J. M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 2006. Vol. 12, No. 2. P. 165–178.
3. Ebrahimi-Fard K. J. Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.* 2002. Vol. 61, No. 2 P. 139–147.
4. Huang J., Bai, Y., Chen Y. et al. Constructions of free dibands and tribands. *Semigroup Forum.* 2022. Vol. 104. P. 647–666. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-022-10270-w
5. Huang J., Chen Y. Gröbner–Shirshov bases theory for trialgebras. *Mathematics.* 2022. Vol. 9. 1207. DOI: https://doi.org/10.3390/math9111207
6. Loday J.-L. Dialgebras. In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. *Springer-Verlag, Berlin.* 2001. Vol. 1763. P. 7–66.
7. Loday J. L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes. *Contemp. Math.* 2004. Vol. 346. p. 369–398. DOI: https://doi.org/10.1090/conm/346/06296
8. Majumdar A., Mukherjee G. *Dialgebra cohomology as a G-algebra. Transaction of the American Math. Society.* 2003. Vol. 356, No. 6. P. 2443–2457.
9. Sanchez-Ortega J. On the definitions of nucleus for dialgebras. *J. Algebra.* 2013. Vol. 392, No. 15. P. 244–264.
10. Smith J. D. H. Cayley theorems for Loday algebras. *Results Math.* 2022. Vol. 77. P. 218. https://doi.org/10.1007/s00025-022-01748-8
11. Smith J. D. H. Directional algebras. *Houston J. Math.* 2016. Vol. 42. P. 1–22.
12. Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids. *Mat. Stud.* 2010. Vol. 33. P. 120–124.
13. Zhuchok A. V. Free commutative trioids. *Semigroup Forum.* 2019. Vol. 98, No. 2. P. 355–368. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-019-09995-y
14. Zhuchok A. V. Free left n-dinilpotent doppelsemigroups. *Commun. Algebra.* 2017. Vol. 45, No. 11. P. 4960–4970. DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1287274
15. Zhuchok A. V. Structure of free strong doppelsemigroups. *Commun. Algebra.* 2018. Vol. 46, No. 8. P. 3262–3279. DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1407422
16. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids. *Commun. Algebra.* 2017. Vol. 45, No. 4, P. 1639–1656. DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1222404
17. Zhuchok A. V. Structure of relatively free trioids. *Algebra Discrete Math.* 2021. Vol. 31, No. 1. P. 152–166. DOI: https://doi.org/10.12958/adm1732
18. Zhuchok A. V. Trioids. *Asian-Eur. J. Math.* 2015. Vol. 8, No. 4. 23 p. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793557115500898
19. Zhuchok A. V., Koppitz J. Free products of n-tuple semigroups. *Ukrainian Math. J.* 2019. Vol. 70, No. 11. P. 1710–1726. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01601-2
20. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. Free left n-trinilpotent trioids. *Commun. Algebra.* 2021. Vol. 49, No. 2. P. 467–481. DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1802472
21. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. The least left n-trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Univers.* 2022. Vol. 83, No. 4. DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-021-00758-x
22. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V. Free k-nilpotent n-tuple semigroups. *Commun. Algebra.* 2023. Vol. 51, No. 9. P. 3972–3980. DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2195000
23. Zhuchok Yul. V. Free n-nilpotent trioids. *Mat. Stud.* 2015. Vol. 43, No. 1. P. 3–11.
24. Zhuchok Yul. V. Free rectangular tribands. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.* 2015. Vol. 78, No. 2, P. 61–73.
25. Zhuchok Y. V. Free abelian trioids. *Algebra Discrete Math.* 2021. Vol. 32, No. 1. P. 147–160. DOI: https://doi.org/10.12958/adm1860
26. Zhuchok Y. V. New models for the free commutative monogenic trioid and its endomorphism monoid. *Semigroup Forum.* 2022. Vol. 105. P. 575–581. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-022-10313-2
27. Zhuchok Y. V. The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1. *Algebra Univers.* 2016. Vol. 76, No. 3. P. 355–366. DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-016-0392-1

Kryklia Y. A. On some properties of free left n-trinilpotent trioids.

The concepts of a trioid and a trialalgebra appeared in the work of J.-L. Loday and M. O. Ronco who constructed these algebras using operads associated with chain modules of simplices and Stasheff polytopes. It is well-known that trialgebras are linear analogues of trioids. Among the first results about trioids is the construction of J.-L. Loday and M. O. Ronko of a free object of rank 1 in a trioid variety. Trioids and semigroups are naturally related: if operations of a trioid coincide, it turns into a semigroup. Recently, the number of works on the theory of trioids and trialgebras is growing rapidly, at the same time, considerable attention is paid to the construction of relatively free objects. This work continues the study of free left n-trinilpotent trioids. All maximal subtrioids of the free left n-trinilpotent trioid ($n > 1$) are characterized, and it is shown that the free left n-trinilpotent trioid contains a subtrioid which can be represented as a left band of subdimonoids. The cardinality of the endomorphism semigroup of the free left n-trinilpotent trioid for the finite case is also calculated. The obtained results can be applied to trialgebra theory.

Keywords: trioid, subtrioid, free left n-trinilpotent trioid, semigroup.

References

1. Bagherzadeha, F., Bremnera, M., & Madariagab, S. (2017). Jordan trialgebras and post-Jordan algebras. *J. Algebra,* 486, 360–395.
2. Casas, J. M. (2006). Trialgebras and Leibniz 3-algebras. *Bol. Soc. Mat. Mex.,* 12(2), 165–178.
3. Ebrahimi-Fard, K. J. (2002). Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.,* 61(2), 139–147.
4. Huang, J., Bai, Y., & Chen, Y. et al. (2022). Constructions of free dibands and tribands. *Semigroup Forum,* 104, 647–666. https://doi.org/10.1007/s00233-022-10270-w
5. Huang, J., & Chen, Y. (2021). Gröbner–Shirshov bases theory for trialgebras. *Mathematics,* 9, 1207. https://doi.org/10.3390/math9111207
6. Loday, J.-L. (2001). Dialgebras. In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. *Springer-Verlag, Berlin,* 1763, 7–66.
7. Loday, J.-L.,& Ronco, M. O. (2004). Trialgebras and families of polytopes. *Contemp. Math.,* 346, 369–398. 10.1090/conm/346/06296
8. Majumdar, A., & Mukherjee, G. (2003). *Dialgebra cohomology as a G-algebra. Transaction of the American Math. Society,* 356(6), 2443–2457.
9. Sanchez-Ortega, J. (2013). On the definitions of nucleus for dialgebras. *J. Algebra,* 392(15), 244–264.
10. Smith, J. D. H. (2022). Cayley theorems for Loday algebras. *Results Math,* 77, 218. https://doi.org/10.1007/s00025-022-01748-8
11. Smith, J. D. H. (2016). Directional algebras. *Houston J. Math.,* 42, 1–22.
12. Zhuchok, A. V. (2010). Dibands of subdimonoids. *Mat. Stud.,* 33, 120–124.
13. Zhuchok, A. V. (2019). Free commutative trioids. *Semigroup Forum,* 98(2)), 355–368. https://doi.org/10.1007/s00233-019-09995-y
14. Zhuchok, A. V. (2017). Free left n-dinilpotent doppelsemigroups. *Commun. Algebra,* 45(11), 4960–4970. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1287274
15. Zhuchok, A. V. (2018). Structure of free strong doppelsemigroups. *Commun. Algebra,* 46(8), 3262–3279. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1407422
16. Zhuchok, A. V. (2017). Structure of relatively free dimonoids. *Commun. Algebra,* 45(4), 1639–1656. https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1222404
17. Zhuchok, A. V. (2021). Structure of relatively free trioids. *Algebra Discrete Math.,* 31(1), 152–166. https://doi.org/10.12958/adm1732.
18. Zhuchok, A. V. (2015). Trioids. *Asian-Eur. J. Math.,* 8(4), 23. https://doi.org/10.1142/S1793557115500898
19. Zhuchok, A. V., & Koppitz, J. (2019). Free products of n-tuple semigroups. *Ukrainian Math. J.,* 70(11), 1710–1726. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01601-2
20. Zhuchok, A. V., & Kryklia, Y. A. (2021). Free left n-trinilpotent trioids. *Commun. Algebra,* 49(2), 467–481. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1802472

21. Zhuchok, A. V., & Kryklia, Y. A. (2022). The least left n-trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Univers,* 83(4). https://doi.org/10.1007/s00012-021-00758-x
22. Zhuchok, A.V., Zhuchok, Yul.V. (2023). Free k-nilpotent n-tuple semigroups. *Commun. Algebra*, 51, no. 9, 3972–3980. https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2195000.
23. Zhuchok, Yul. V. (2015). Free n-nilpotent trioids. *Mat. Stud.,* 43(1), 3–11.
24. Zhuchok, Yul. V. (2015). Free rectangular tribands. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.,* 78(2), 61–73.
25. Zhuchok, Y. V. (2021). Free abelian trioids. *Algebra Discrete Math.,* 32(1), 147–160. https://doi.org/10.12958/adm1860
26. Zhuchok, Y. V. (2022). New models for the free commutative monogenic trioid and its endomorphism monoid. *Semigroup Forum,* 105, 575–581. https://doi.org/10.1007/s00233-022-10313-2
27. Zhuchok, Y. V. (2016). The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1. *Algebra Univers.,* 76(3), 355–366. https://doi.org/10.1007/s00012-016-0392-1

Одержано 15.10.2023