УДК 51-7:368.025(045)
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).114-119

Л. М. Іллічева[1], Т. В. Авдєєва[2]

[1] Національний авіаційний університет,
факультет комп'ютерних наук та технологій (ФКНТ), доцент кафедри прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
m_ilicheva@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-5209-6823

[2] Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь
avdeeva.tetyana@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7775-8512

ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСУ ТА ПЕРІОДІВ ОЧІКУВАННЯ СТРАХОВИХ ВИПАДКІВ

У роботі розглядаються закономірності визначення середнього часу до появи першого страхового випадку, першого із деякої кількості страхових випадків; закономірності розподілу «рекордних» по тривалості періодів між страховими випадками.

Ключові слова: математичне сподівання часу очікування страхового випадку, експоненціальний розподіл, «рекордні» значення серед найбільших періодів очікування страхових випадків.

1. Вступ. Вивчення різних аспектів ризиків, які пов'язані з невизначеністю можливих втрат, відноситься до тематики актуарної математики. Коли мова йде про страхову справу, перш за все мають на увазі принципи формування тарифних ставок. Тарифна ставка — ціна страхового ризику й інших витрат, адекватне грошове вираження зобов'язань страховика за укладеним договором страхування. Тарифна ставка, по якій укладається договір страхування, називається брутто-ставкою. У свою чергу, брутто-ставка складається з двох частин: нетто-ставки і навантаження. Нетто-ставка виражає ціну страхового ризику. В основі формування нетто-ставки за будь-яким видом страхування лежить ймовірність настання страхового випадку [8: 102]. До підписання контракту й придбання страхового полісу клієнт наражається на деякий ризик, що може привести до збитків. Придбавши страховий поліс і заплативши за нього детерміновану суму (страхову премію), клієнт позбавляється ризику, але сам ризик приймає на себе страхова компанія. Тобто, подія, яка може привести до фінансових втрат клієнта, стає страховим випадком [7]. Величина страхової виплати є випадковою величиною, причому у окремому інтервалі часу може відбутися кілька страхових випадків. Так, страхування на випадок хвороби, страхування автомобілів та інших видів власності є прикладами подібних ситуацій.

2. Постановка завдання. Дослідити величину середнього часу очікування першого страхового випадку; першого із можливих кількох страхових випадків; закономірностей формування найдовших проміжків між кількома страховими випадками.

3. Огляд літератури. Прогнозування середнього часу очікування першого страхового випадку та середнього часу очікування одного із кількох страхових випадків, номерів «рекордів» серед послідовності страхових випадків мають важливе значення при розробці тонтин-продуктів. Тонтин — інвестиція, пов'язана із життям особи, причому дохід забезпечується доти, доки особа жива. Зазвичай, у загальний фонд вноситься деяка сума, відсотки розподіляються в середині групи застрахованих осіб між тими, хто дожив до розподілу. Огляд розвитку подібних продуктів міститься у роботі [3]. При розгляді питань, пов'язаних із формуванням пенсійних фондів, важливу роль відіграють випадкові фактори, які в свою чергу, впливають на величини внесків. Внески можна оптимізувати із врахуванням ризику платоспроможності та формувати різні моделі контролю. Огляд подібних моделей міститься у роботі [9]. Сучасний підхід до методів оцінювання міститься у книзі [5, 10].

У роботі [5: 44] вводиться випадкова величина $X = IB$, яка описує страхові виплати за виділений інтервал часу:

- випадкова величина B — загальна величина виплат у вказаному інтервалі;
- I — індикатор для події (чи відбувся хоча б один страховий випадок у даному інтервалі).

Величина I фіксує існування ($I = 1$) або відсутність ($I = 0$) страхових випадків в інтервалі, але не кількість страхових випадків у ньому. Далі розглядаються різні випадки і оцінюється розподіл випадкових величин B, I для конкретних моделей (страхування на 1 рік на випадок смерті від нещасного випадку, страхування автомобілів та ін.). Кожного разу проводиться оцінювання конкретних умовних розподілів випадкової величини X. Схожим чином, у роботі [4: 149] при аналізі тактики страхової компанії вводиться поняття індексу страхового випадку клієнта, тобто, випадкової величини, яка дорівнює 1, якщо страховий випадок має місце та 0 — у протилежному випадку. Надалі ж розглядається прибуток страхової компанії. У роботі [8: 119] наведена методика актуарної оцінки ступеня страхових ризиків та розрахунок страхових тарифів із страхування від окремих ризиків. Але не приділяється увага оцінкам часу настання страхових випадків. У роботі [6: 146] розглядаються методологічні засади та інструментарій кількісної оцінки ризику, різні підходи до моделювання та врахування ризиків. Тобто, ризик розглядається як поняття, яке не можна оминути у менеджменті. Тим важливіше оцінювати час, коли ще можна його ігнорувати. У [5: 361] розглядається моделювання процесу сумарних страхових виплат при деяких умовах на процес $N(t)$, який відображає кількість страхових випадків ($N(t)$ представлений біноміальним або пуассонівскім процесами). У відповідності до класу $N(t)$ аналізується процес сумарних страхових виплат. Можна розглянути це питання при більш загальних умовах на процес $N(t)$, виділяючи саме «рекордні» значення у цьому процесі.

4. Основний результат. Покажемо, яким чином можна визначити середній час очікування першого страхового випадку.

Для опису середнього часу очікування цієї події введемо дискретну модель, тобто, час розглядається дискретно, зміни можуть проходити тільки у моменти часу: ∂, 2∂, 3∂, … Тобто, випробування відбуваються саме у ці проміжки часу. Поява страхового випадку може бути ототожнена з першим успіхом у послідовності випробувань за схемою Бернуллі [2: 13].

Нехай T — час очікування першого успіху у послідовності випробувань Бернуллі із ймовірністю успіху p. Тоді $P\left\{T > n\partial\right\} = (1-p)^n$, середній час очікування $E(T)$ — обчислюється наступним чином. Подія $T = n\partial$ може бути описана як різниця подій: $\{T > (n-1)\partial\} \setminus \{T > n\partial\}$. Тоді її ймовірність:

$$P\left\{T = n\partial\right\} = P\left\{T > (n-1)\,\partial\right\} - P\left\{T > n\partial\right\} = (1-p)^{n-1} - (1-p)^{n} =$$

$$= (1-p)^{n-1}\left(1 - (1-p)\right) = (1-p)^{n-1}p.$$

Час очікування можна представити як геометрично розподілену дискретну випадкову величину:

$$E\left(T\right) = \sum_{1}^{\infty} k\partial(1-p)^{k-1}p = \partial p\left(1 + 2\left(1-p\right) + 3(1-p)^{2} + \ldots\right) = \frac{\partial p}{p^{2}} = \frac{\partial}{p}.$$

При обчисленні суми ряду використана властивість похідної для суми геометричної прогресії із знаменником $q = 1 - p$, а саме:

$$1 + q + q^{2} + \cdots = \frac{1}{1-q}; \quad 1 + 2q + 3q^{2} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^{2}}.$$

Користуючись відомою ймовірністю p, можна прогнозувати час очікування першого страхового випадку, який приводить до фінансових збитків.

Якщо величина ∂ спадає, але так, що $\frac{\partial}{p} = a$ — фіксоване, тоді можна розглянути період часу t, протягом якого може відбутися вже $n \approx \frac{t}{\partial}$ випробувань і тоді:

$$P\left(T > t\right) \approx \left(1 - \frac{\partial}{a}\right)^{\frac{t}{\partial}} = \left(\left(1 + \frac{1}{-\frac{a}{\partial}}\right)^{-\frac{a}{\partial}}\right)^{-\frac{\partial t}{a\partial}} \approx e^{\frac{-t}{a}}.$$

Для часу очікування першого успіху T одержали формулу відомого експоненціального розподілу.

Випадкова величина X має експоненціальний (показниковий) розподіл з параметром α ($\alpha > 0$), якщо її функція розподілу: $F\left(x\right) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x > 0$. Введемо позначення $X \sim \exp\left(\alpha\right)$. Тоді $E\left(X\right) = \frac{1}{\alpha}$, як показано вище.

Тобто, середній час очікування першого страхового випадку оцінюється як математичне сподівання для першого успіху у схемі Бернуллі і дорівнює $\frac{\partial}{p}$, де p — ймовірність реалізації страхового випадку; ∂ — тривалість проміжку, протягом якого не відбувається страхова подія (страхова подія може відбутися тільки у моменти часу ∂, 2∂, 3∂, $\ldots$). У загальному випадку час очікування першого страхового випадку описується експоненціальним розподілом.

Розглянемо випадок, коли страхову компанію однаково турбує настання хоч якогось із кількох страхових випадків, припустимо, із n випадків. Тоді, час очікування кожної із цих подій — T_i, $i = 1, \ldots, n$. [3: 170]

Якщо страхові випадки незалежні, цікавить саме $\eta = \min\left(T_1, T_2, \ldots, T_n\right)$. При цьому $P\left(T_i > x\right) = e^{-a_i x}$, тоді:

$$P\left(\eta > x\right) = P\left(\bigcap_{1}^{n}\{T_i > x\}\right) = \prod_{1}^{n} P\left(T_i > x\right) = e^{-x\sum_{1}^{n} a_i}.$$

Час очікування η знову має експоненціальний розподіл. Оскільки

$$E\left(T_i\right) = \frac{1}{a_i}, \quad a_i = \frac{1}{E\left(T_i\right)},$$

тоді середній час очікування якогось із n страхових випадків:

$$E\eta = \left(\sum_{1}^{n} a_i\right)^{-1} = \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{E\left(T_i\right)}\right)^{-1}.$$

Наведена формула характеризує середній час очікування хоча б одного із кількох страхових випадків.

Перейдемо до визначення номерів «рекордів» серед найбільших періодів очікування або серед найбільших фінансових втрат при деякій кількості страхових випадків.

Коли клієнт застрахований від фінансових збитків, для їх покриття має значення як час очікування страхового випадку, так і розміри цих фінансових збитків. Позначимо X_i, $i = 1, \ldots$ — часи очікування відповідних страхових випадків або розміри кожного із фінансових збитків (для зручності розглянемо нескінченну їх кількість). Припустимо також, що X_1, X_2, $\ldots$ — незалежні випадкові величини з однаковим розподілом F [2: 29].

Якщо ввести випадкову величину N (яка характеризує «рекордні» номери для введеної вище послідовності) — значення першого індексу k ($k = 2, \ldots$), для якого $X_k > X_1$, то подія $\{N > n\}$ відбудеться тоді і тільки тоді, коли максимальний елемент вже скінченної послідовності X_1, X_2, …, X_n є початковим. Ймовірність цієї події дорівнює n^{-1}, оскільки початковий елемент вибирається випадковим чином із n можливих. Подія $\{N = n+1\}$ може розглядатися як різниця подій $\{N > n\} \setminus \{N > n+1\}$, що дозволяє отримати ймовірність цієї події:

$$P\left\{N = n+1\right\} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\left(n+1\right)}.$$

Формула виведена тільки при умові, що X_i, $i = 1, \ldots$ незалежні і мають одну й ту саму неперервну функцію розподілу F. Якщо вважати, що $N\left(1\right) = 1$, а для $n \geq 2$:

$$N\left(n\right) = min\left\{j : j > N\left(n-1\right),\ X_j > X_{N(n-1)}\right\},$$

тоді $P\left\{N\left(n\right) < \infty\right\} = 1$, оскільки $P\left\{N\left(2\right) = j\right\} = \frac{1}{j(j-1)}$ одержимо:

$$EN\left(n\right) = 1 + \sum_{2}^{\infty} i \frac{1}{i\left(i-1\right)} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,\ n \geq 2.$$

Випадкова величина N має скінченну ймовірність, але нескінченне математичне сподівання.

Відомо, що послідовність $N(n)$ утворює ланцюг Маркова, тобто для усіх векторів $\left(j_2,\ \ldots, j_{n-1}\right)$, котрим відповідає додатня ймовірність умови у лівій частині наступної рівності [1: 259]:

$$P\left\{N\left(n\right) = k | N\left(t\right) = j_t,\ 2 \leq t \leq n\right\} = P\left\{N\left(n\right) = k | N\left(n-1\right) = j_{n-1}\right\},$$

причому умовні ймовірності $P\left\{N\left(n\right) = k | N\left(n-1\right) = j\right\}$ дорівнюють $\frac{j}{k(k-1)}$, якщо $k > j \geq n-1 \geq 2$ і дорівнюють 0 при інших значеннях j та k.

Тоді можна знайти розподіл випадкових величин $N(n)$ при різних значеннях n. Наприклад, при $n = 3$ отимаємо:

$$P\{N(3) = k\} = \sum_{j=2}^{\infty} P(N(3) = k | N(2) = j) \cdot P(N(2) = j) =$$

$$= \sum_{j=2}^{k-1} \frac{j}{k(k-1)} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j}.$$

Тобто, можна визначати ймовірність настання третього (і, відповідно, усіх наступних) «рекордів» для послідовністі страхових випадків. Послідовність випадкових величин $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ може відображати як час очікування чергового страхового випадку, так і характеризувати фінансові збитки, які пов'язані з i-тим страховим випадком.

Звернемося до характеристики приростів «рекордних» значень для часів очікування незалежних страхових випадків.

Вважаємо, що випадкові величини X_i, $i = 1, \ldots$ мають експоненціальний розподіл (можна трактувати їх як часи очікування настання відповідних страхових випадків). Позначимо через $\{X_{N(n)},\ n > 1\}$ — послідовність «рекордних» значень. Можна зробити висновок, що відповідні їм прирости послідовних «рекордних» значень характеризуються як незалежні випадкові величини, які теж мають експоненціальний розподіл.

Тобто, має місце наступне твердження [1: 265]:

Нехай випадкові величини $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ мають функцію розподілу $F(x) = 1 - e^{-x}$, $(x > 0)$; $X_{N(n)}$, $(n > 1)$ — послідовність «рекордів» для $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$.

Нехай $Y_1 = X_{N(1)} = X_1$, $Y_j = X_{N(j)} - X_{N(j-1)}$, $(j \geq 2)$. Тоді величини Y_1, Y_2, $\ldots$ незалежні, їх загальна функція розподілу — $F(x)$.

Встановимо зв'язок між послідовністю «рекордних» значень для часів очікування страхових випадків і номерами «рекордів».

Нехай випадкові величини $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ мають функцію розподілу $F(x) = 1 - e^{-x}$, $(x > 0)$; $X_{N(n)}$, $(n > 1)$ — послідовність «рекордів» для $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$.

Тоді з ймовірністю 1 виконується співвідношення [1: 264]:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\log N(n) - X_{N(n)}|}{\log(n)} = 1.$$

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розглянуті визначення: середнього часу очікування першого страхового випадку; середнього часу очікування першого із кількох страхових випадків; номерів «рекордів» серед найбільших періодів очікування або серед найбільших фінансових збитків при можливій великій кількості страхових випадків. Також наведені характеристики: приростів «рекордних» значень для часів очікування незалежних страхових випадків; зв'язку між послідовністю «рекордних» значень для часів очікування страхових випадків і номерами «рекордів». Надалі можна досліджувати співвідношення між послідовністю «рекордних» значень для часів очікування страхових випадків і номерами «рекордів» вже для конкретних законів для розподілів цих величин.

Список використаної літератури

1. Galambos J. The asymptotic theory of extreme order statistics. New York : Wiley, 1978. 352 p.
2. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. *New York-London-Sydney.* 1971. Vol. 2. 669 p.
3. Chen A, Thai N. and Thorsten S. (2022). Unit-Linked Tontine: Utility-Based Design, Pricing and Performance. *Risks.* Vol. 10, No. 4. 78. DOI: https://doi.org/10.3390/risks10040078
4. Ястремський О. Основи теорій економічного ризику. Київ : Артек, 1997. 248 с.
5. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A. and Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries : Schaumburg, 1997. https://dx.doi.org/10.1080/03610928908830089
6. Вітлинський В. В., Великоіваненко Г. І. Ризикологія в економіці та підприємництві: Монографія. Київ : КНЕУ, 2004. 480 с.
7. Зинченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику: навч. посібн. Київ : Видавн.-поліграф. центр «Київський університет», 2008. 224 с.
8. Ковтун І. О., Денисенко М. П., Кабанов В. Г. Основи актуарних розрахунків. Навч. посібник. Київ : «ВД Професіонал», 2008. 480 с.
9. Chang S. C. Realistic Pension Funding: A Stochastic Approach. *Journal of Actuarial Practice.* 2000. Vol. 8. P. 5–42.
10. Wüthrich M. V., Merz M. Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications. Springer Actuarial, 2023. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-12409-9

Illicheva L. M., Avdeeva T. V. Prediction of time and periods of waiting for insurance cases.

The work examines the regularities of determining the average time until the appearance of the first insurance event, the first of a certain number of insurance events; regularities of the distribution of "record" duration periods between insurance cases.

Keywords: mathematical expectation of waiting time for an insurance event, exponential distribution, "record" values among the longest waiting periods for insurance events.

References

1. Galambos, J. (1978). *The asymptotic theory of extreme order statistics.* New York: Wiley.
2. Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. *New York-London-Sydney,* 2, 669 p.
3. Chen, A, Thai, N., & Thorsten, S. (2022). Unit-Linked Tontine: Utility-Based Design, Pricing and Performance. *Risks,* 10(4), 78. https://doi.org/10.3390/risks10040078
4. Yastremskyi, O. (1997). *Basics of theories of economic risk.* Kyiv: Artek [in Ukrainian].
5. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries: Schaumburg. https://dx.doi.org/10.1080/03610928908830089
6. Vitlynsky, V. V., & Velikoivanenko, G. I. (2004). *Riskology in economics and entrepreneurship: Monograph.* Kyiv: KNEU [in Ukrainian].
7. Zinchenko, N. M. (2008). *Mathematical methods in the theory of risk: Education manual.* Kyiv: Kyiv University [in Ukrainian].
8. Kovtun, I. O., Denysenko, M. P., & Kabanov, V. G. (2008). *Basics of actuarial calculations. Education manual.* Kyiv: VD Professional [in Ukrainian].
9. Chang, S C. (2000). Realistic Pension Funding: A Stochastic Approach. *Journal of Actuarial Practice,* 8, 5–42.
10. Wüthrich, M. V., & Merz, M. (2023). *Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications.* Springer Actuarial. https://doi.org/10.1007/978-3-031-12409-9

Одержано 10.01.2024