УДК 517.5
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).26-36

В. З. Онисько[1], І. Б. Шепарович[2]

[1] Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка,
аспірант кафедри математики та економіки
vitalii.onysko@dspu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-8695-7242

[2] Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка,
доцент кафедри математики та економіки,
кандидат фізико-математичних наук
i.sheparovych@dspu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0110-3864

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ЗАДАЧА НЬЮТОНА В КЛАСІ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ШВИДКОЗРОСТАЮЧИМИ ВУЗЛАМИ

Нехай (λ_k) — послідовність різних комплексних чисел така, що $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = \infty$ і $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right| \le \frac{1}{\Delta}$, $\Delta > 1$. У роботі отримано асимптотичну оцінку мероморфної функції, поданої у вигляді ряду раціональних дробів:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}$$

де (a_k) — послідовність комплексних чисел така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{u^n} \le C_1$, $u \in (1,\Delta)$. Також доведено, що мероморфну функцію, що має нулі в точках $\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ та полюси в точках $\{u\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, для якої зовні кругів $U(u\lambda_k,\sigma) := \{|z-u\lambda_k|\le\sigma\}$ $(\sigma>0)$ виконується:

$$|F(z)| < C_1\left(\frac{\Delta}{(\Delta-u)} + \frac{u-1}{\Delta(u\Delta-1)r}\right)\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right),\ r=|z|>1\ (C_1>0)$$

можна зобразити у вигляді вказаного функціонального ряду, де

$$a_k = \frac{\lambda_k(u-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} F(\zeta)\frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)}d\zeta,\quad \Gamma_k = \partial U(\zeta;R_k),\quad |\lambda_k| < R_k < |\lambda_{k+1}|.$$

Ключові слова: мероморфна функція, раціональні дроби, нулі, полюси.

1. Вступ. Інтерполяційна задача полягає в знаходженні умов, за яких у заданому класі існує функція f, яка в точках λ_k приймає значення d_k: $f(\lambda_k) = d_k$. Ця інтерполяційна задача з різних боків вивчалась в працях багатьох математиків (див. [1–11]). Одним з аспектів згаданої проблеми є питання про відновлення функції f за числами d_k. У деяких випадках таке відновлення можна здійснити за допомогою ряду Ньютона

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k P_k(z), \qquad P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k).$$

Питання про розвинення цілих функцій в ряд Ньютона досліджувалось в працях А. Гельфонда [3–5], І. Ібрагімова [10], С. Абдрашітової [2], Б. Винницького [7] та інших. Добре відомим [5: 193] є таке твердження.

Теорема А. *Якщо q — деяке число, $|q|>1$, $\lambda_k=q^{k-1}$, то кожна ціла функція f, яка задовольняє умову*

$$\lim_{r\to\infty}\left(\ln M_f(r)-\frac{\ln^2 r}{2\ln|q|}-\frac{\ln r}{2}\right)=-\infty,$$

розвивається в рівномірно збіжний в кожному крузі $\{z:|z|\le r\}$, $0<r<+\infty$, ряд Ньютона

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k P_k(z),\qquad P_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k),$$

де $\alpha_k:=\alpha_k(f):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=r}\frac{f(t)}{P_{k+1}(t)}dt$, $r>\max\left\{|\lambda_i|: i\in\overline{1;k+1}\right\}$.

А також такі твердження [3].

Теорема Б. *Якщо для цілої функції $g(z)$ справедлива нерівність:*

$$|g(z)|<Ae^{\omega\ln^2|z|},\qquad \omega<\frac{1}{2\ln\beta},\qquad \beta>1,$$

то вона розвивається в нескінченний ряд:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-\beta)\left(z-\beta^2\right)\dots(z-\beta^n),$$

який збіжний у всій площині $\mathbb{C}$.

Теорема В. *Якщо $g(\beta^n)$ — цілі числа $(n=1,2,\dots,\infty)$ і ціла функція задовольняє нерівність*

$$g(z)<e^{\frac{\ln^2|z|}{4\ln\beta}}|z|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(|z|),\qquad \lim_{|z|\to\infty}\varepsilon(|z|)=0,$$

то $g(z)$ — поліном.

Відомо (див. [12–14]), що мероморфну функцію можна наблизити раціональними функціями. І, навпаки, маючи послідовність точок, можна побудувати мероморфну функцію, що має полюси в цих точках. У 1935 році Рене Лагранж [1] описав властивості мероморфної функції, зображеної рядом раціональних функцій. Ряд, описаний в його роботі, має такий вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_n)},$$

де a_n,α_n,β_n — комплексні числа, $(n=1,2,\dots)$, $(\alpha_n=\alpha+nu;\ \beta_n=\beta+nv)$.

Використавши описані в [1] методи, А. О. Гельфонд і Д. М. Тоідзе [4] побудували мероморфну у півплощині функцію F, з простими полюсами $\{ku,\ k\in\mathbb{N}\}$ і нулями $\{k,\ k\in\mathbb{N}\}$, яка задовольняє певні умови росту. Були доведені [3] такі теореми.

Теорема Г. *Мероморфна функція $F(z)$, яка зображена у вигляді ряду*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-(n-1))}{(z-u)(z-2u)\ldots(z-nu)},$$

що збігається у півплощині $\Re(z) > \lambda = \frac{\acute{\lambda}}{1-\frac{1}{u}}$, де

$$\acute{\lambda} = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u^{-k}\frac{a_k}{k}\right|}{\ln n}, & \text{якщо } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} u^{-k} - \text{розбіжний}, \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u^{-k}\frac{a_k}{k}\right|}{\ln n}, & \text{якщо } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} u^{-k} - \text{збіжний}, \end{cases}$$

задовольняє умову

$$\left|F(\alpha + re^{i\theta})\right| < Cr^{1+\acute{\lambda}+2\varepsilon}\left(\frac{1+r\cos\theta}{r}\right)^{\alpha\left(1-\frac{1}{u}\right)-\acute{\lambda}} e^{\varphi(\theta)r}.$$

Тут $z = \alpha + re^{i\theta}$, $\varepsilon = \varepsilon(r)$ рівномірно прямує до нуля, коли $r \to \infty$, при $\alpha > \lambda$, $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$ і $|z - ku| \ge \delta$, $k \in \mathbb{N}$, a_n — довільні комплексні числа, u — ірраціональне число, і

$$\varphi(\theta) = \left(1 - \frac{1}{u}\right)\cos\theta \ln\left(\frac{2u\cos\theta}{\sqrt{u^2 - 2u\cos 2\theta + 1}}\right) + \cos\theta\frac{\ln u}{u} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{u}\right)\sin\theta \operatorname{arctg}\left(\frac{u+1}{u-1}\operatorname{tg}\theta\right) - \frac{\pi}{2}\left|\sin\theta\right|.$$

Теорема Д.[3] *Мероморфну функцію $F(z)$ з простими нулями $\{k,\ k \in \mathbb{N}\}$ та простими полюсами $\{ku,\ k \in \mathbb{N}\}$, яка задовольняє умову*

$$\left|F\left(\alpha + re^{i\theta}\right)\right| < C(1+r)^{1+\acute{\lambda}+2\varepsilon}\left(\frac{1+rcos\theta}{1+r}\right)^{\alpha\left(1-\frac{1}{u}\right)-l} e^{\varphi(\theta)r},$$

де $u > 1$, $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$, $|z - ku| \ge \delta > 0$, C — стала, ε рівномірно прямує до нуля, коли $r \to \infty$, можна розвинути в ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-(n-1))}{(z-u)(z-2u)\ldots(z-nu)},$$

який рівномірно збіжний, якщо $\Re(z) > L > \frac{1+l}{1-\frac{1}{u}}$, $\Re(z) > \alpha$, $|z| < R$, $|z - ku| \ge$ $\ge \delta$, $k = \overline{0;n}$, для будь-яких додатних R і δ.

Ми узагальнюємо ці результати на випадок вузлів, що швидко зростають.

2. Основні результати. Нехай $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — послідовність різних комплексних чисел з точкою згущення на ∞, така що $|\lambda_k/\lambda_{k+1}| \le \delta < 1$. Отримаємо в деякій мірі аналоги Теорем Г і Д для функції F, яка має нулі в точках

$\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ та полюси в точках $\{u\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, де $1<u<\Delta:=1/\delta$. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}, \tag{1}$$

де a_n — комплексні числа такі, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{u^n}$ є збіжним.

Теорема 1. *Якщо* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{u^n}\le C_1$, $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right|\le\delta<1$, $1<u<\Delta:=1/\delta$, *то ряд* (1) *рівномірно збігається на кожному компакті з* $\mathbb{C}\backslash\{u\lambda_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *до функції* F *і справедлива оцінка*

$$|F(z)|<\left(\frac{\ln r}{\left(1-\frac{u}{\Delta}\right)\ln\Delta}+\frac{C_1(u-1)}{\Delta(u\Delta-1)r}\right)\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)$$

для $|z-u\lambda_k|\ge\sigma>0$, $r=|z|>1$.

Доведення. Виберемо фіксоване значення $|z|=r$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $r>1$. Тоді, знайдеться таке натуральне число m, що $u|\lambda_m|<\Delta|\lambda_m|\le r<\Delta|\lambda_{m+1}|$. Нехай

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}=\sum_{n=1}^{m+1}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}+\sum_{n=m+2}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}=:I_1+I_2.$$

Тоді $|F(z)|\le|I_1|+|I_2|$. Знайдемо оцінку для $I_1=\sum\limits_{n=1}^{m+1}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}$. Оскільки для $\left|\frac{z}{l}\right|<1$ справедливе розвинення $\ln\left(1-\frac{z}{l}\right)=-\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{l}\right)^j$, то

$$|I_1|\le\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_k|}\exp\left|\ln\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-u\lambda_k)}\right|=$$

$$=\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_k|}\exp\left|\sum_{k=1}^{n-1}\ln(z-\lambda_k)-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(z-u\lambda_k)\right|=$$

$$=\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_k|}\exp\left|\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{\lambda_k}{z}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{u\lambda_k}{z}\right)\right|=$$

$$=\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_k|}\exp\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{z}\right)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{u\lambda_k}{z}\right)^j\right)\right|.$$

Окрім цього, якщо $\Delta > u$, то збіжним до деякого числа є ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{j(\varDelta^j - 1)} \le \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}.$$

Тому, враховуючи, що

$$u|\lambda_m| < \Delta|\lambda_m| \le r < \Delta|\lambda_{m+1}|,$$

$$\left|\frac{\lambda_k}{z}\right| \le \frac{1}{\Delta}\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right|\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+2}}\right|\ldots\left|\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right|\left|\frac{\Delta\lambda_m}{r}\right| \le \frac{1}{\Delta^{m-k+1}},$$

маємо

$$|I_1| \le \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z-u\lambda_n|}\exp\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j-1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{z}\right)^j\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z-u\lambda_n|}\exp\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j-1}{j}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\Delta^{m-k+1}}\right)^j\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|r-u\lambda_n|}\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j-1}{j\Delta^j}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\Delta^j}\right)^{m-k}\right) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|r-u\lambda_n|}\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j-1}{j(\Delta^j-1)}\right) \le \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|r-u\lambda_n|}\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right) \le$$

$$\le \exp\left(\frac{u\,(u-1)}{(\Delta-1)\,(\Delta-u)}\right)\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{r\left(1-\frac{u|\lambda_m|}{\Delta|\lambda_m|}\right)} \le$$

$$\le \frac{\Delta/\left|\lambda_1\right|}{(\Delta-u)}\exp\left(\frac{u\,(u-1)}{(\Delta-1)\,(\Delta-u)}\right)\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{\Delta^m\left|\lambda_1\right|} \le$$

$$\le \frac{\Delta/\left|\lambda_1\right|}{(\Delta-u)}\exp\left(\frac{u\,(u-1)}{(\Delta-1)\,(\Delta-u)}\right)\sum_{n=1}^{m+1}\frac{|a_n|}{u^n} \le \frac{\Delta C_1}{(\Delta-u)}\exp\left(\frac{u\,(u-1)}{(\Delta-1)\,(\Delta-u)}\right),$$

бо $r \ge \Delta\left|\lambda_m\right| \ge \Delta^m\left|\lambda_1\right|$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{u^n} \le \mathrm{C}_1$.

Знайдемо оцінку для I_2,

$$|I_2| \le \sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_k|}\left|\exp\left(\ln\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-u\lambda_k)}\right)\right| =$$

$$= \sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_k|}\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\ln(z-\lambda_k) - \sum_{k=1}^{m}\ln(z-u\lambda_k) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=m+1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) - \sum_{k=m+1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{u\lambda_k}\right)\right)\right| \le$$

$$\leq \exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{|z-u\lambda_n|\,u^{n-1}}\left|\exp\left(\sum_{k=m+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^j}\left(\frac{z}{\lambda_k}\right)^j\right)\right|\leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{u^n\,|\lambda_n|\left|1-\frac{z}{u\lambda_n}\right|}\times$$

$$\times\exp\left(\sum_{k=m+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^j}\left(\frac{r}{|\lambda_k|}\right)^j(\cos\varphi)^j\right)\leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{u^n\,|\lambda_n|\left|1-\frac{z}{u\lambda_n}\right|}\times$$

$$\times\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^{2j}}\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{r}{|\lambda_k|}\right)^{2j}\right)\leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{u^n\,|\lambda_{m+2}|\left(1-\frac{\Delta|\lambda_{m+1}|}{u|\lambda_n|}\right)}\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^{2j}}\frac{\Delta^{2j}}{\Delta^{2j}-1}\right)\leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{u^n\Delta\,|\lambda_{m+1}|\left(1-\frac{1}{u}\right)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j}{ju^{2j}}\right)\leq$$

$$\leq\frac{\Delta\left(u-1\right)}{\left(u\Delta-1\right)}\exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{u^n\Delta^2\,|\lambda_m|}\leq$$

$$\leq\frac{\mathrm{C}_1\left(u-1\right)}{\Delta\left(u\Delta-1\right)r}\exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right).$$

бо $\cos\varphi=\frac{r}{u|\lambda_k|}$, де $\varphi=\arg z-\arg\left(u\lambda_k\right)$ (див. рис. 1).

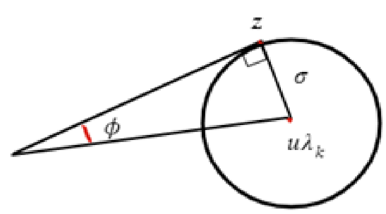

Рис. 1

Об'єднавши оцінки для I_1 і I_2, отримаємо

$$|F\left(z\right)|\leq\frac{\Delta C_1}{\left(\Delta-u\right)}\exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)+\frac{\mathrm{C}_1\left(u-1\right)}{\Delta\left(u\Delta-1\right)r}\exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right)\leq$$

$$\leq C_1\left(\frac{\Delta}{\left(\Delta-u\right)}+\frac{u-1}{\Delta\left(u\Delta-1\right)r}\right)\exp\left(\frac{u\left(u-1\right)}{\left(\Delta-1\right)\left(\Delta-u\right)}\right).$$

Звідки на основі ознаки Веєрштрасса робимо висновок про справедливість теореми 1. ■

Теорема 2. *Якщо* $1 < u < \Delta$, $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right| \le 1/\Delta$, *і функція* $F(z)$, *маючи прості нулі в точках* $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *та полюси в точках* $\{u\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *задовольняє умову*

$$|F(z)| < C_1\left(\frac{\Delta}{(\Delta-u)}+\frac{u-1}{\Delta(u\Delta-1)r}\right)\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right),\ r=|z|>1, \quad (2)$$

зовні кругів $U(u\lambda_k,\sigma)$ (C_1 *— деяка додатна стала), то* $F(z)$ *можна зобразити у вигляді ряду* (1), *де*

$$a_k = \frac{\lambda_k(u-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} F(\zeta)\,\frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)}d\zeta.$$

Доведення. Деякі міркування повторимо з [1]. Нехай мероморфна функція $F(z)$ з простими нулями в точках $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ та полюсами в точках $\{u\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ задовольняює умову (2). Очевидною є рівність

$$R_0 - R_n = \sum_{k=1}^{n} R_{k-1} - R_k, \quad (3)$$

де

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}d\zeta, \quad (4)$$

Причому контур інтегрування Γ_n є колом радіусу $\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|$ з центром в точці $(0;0)$. Тоді

$$R_{k-1} - R_k = \frac{P_{k-1}(z)}{Q_{k-1}(z)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{k-1}}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\ \frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_{k-1}(\zeta)}d\zeta - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\ \frac{Q_k(\zeta)}{P_k(\zeta)}d\zeta. \quad (5)$$

Полюси функції F в точках $u\lambda_k$, $u\lambda_{k+1}$, $\ldots$ (не погашені нулями Q_{k-1}) лежать поза контуром Γ_k, бо $\frac{2u}{u+1}|\lambda_k| < u|\lambda_k|$. А полюси підінтегральної функції, що породжені нулями P_k, лежать в середині Γ_k (бо $\frac{2u}{u+1}|\lambda_k| > |\lambda_k|$). Тому в першому інтегралі (5), контур Γ_{k-1} можна замінити на Γ_k. Отже, мають місце співвідношення

$$R_n - R_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k\ \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)}, \qquad a_k = \frac{\lambda_k(u-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} F(\zeta)\,\frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)}d\zeta. \quad (6)$$

Ще розглянемо один інтеграл по невеликому колу Γ_s (у від'ємному напрямі), для одного із значень $k = s$, в залежності від положення полюса в підінтегральній функції в (4) в точці $\zeta = z$. Згідно інтегральної теореми Коші, такий інтеграл рівний $-F(z)$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_s}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\ \frac{Q_s(\zeta)}{P_s(\zeta)}\ \frac{P_s(z)}{Q_s(z)}d\zeta = -F(z). \quad (7)$$

Доведемо, що $R_n \to 0$, коли $n \to \infty$. Тут m — таке натуральне число, що $u|\lambda_m| < \Delta|\lambda_m| \le r < \Delta|\lambda_{m+1}|$, звідки $\left|\frac{\lambda_k}{z}\right| \le \frac{1}{\Delta^{m-k+1}}$.

$$\left|\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right| = \left|\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)}\right| \le \frac{1}{u^{n-m}}\exp\left|\sum_{k=1}^{m}\ln(z-\lambda_k) \;-\sum_{k=1}^{m}\ln(z-u\lambda_k)\;\right| \times$$

$$\times\exp\left|\sum_{k=m+1}^{n}\ln\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) \;-\sum_{k=m+1}^{n}\ln\left(1-\frac{z}{u\lambda_k}\right)\;\right| \le$$

$$\le \frac{1}{u^{n-m}}\exp\left|\sum_{k=1}^{m}\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{z}\right)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{u\lambda_k}{z}\right)^j\right)\right| \times$$

$$\times\left|\exp\left(\sum_{k=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^j}\left(\frac{z}{\lambda_k}\right)^j\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{u^{n-m}}\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^j-1}{ju^j}\frac{1}{\Delta^j-1}\right)\times\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^{2j}}\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{r}{|\lambda_k|}\right)^{2j}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{u^{n-m}}\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-u^j}{ju^{2j}}\frac{\Delta^{2j}}{\Delta^{2j}-1}\right) \le \frac{\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)}{u^{n-m}}.$$

З іншого боку, якщо $\zeta = \frac{2u}{u+1}|\lambda_n|e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$, то

$$\left|\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right| = \left|\exp\left(\ln\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta-u\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta-\lambda_k)}\right)\right| = \left|\exp\left(\ln\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta-u\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta-\lambda_k)}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{u}\exp\left|\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{2u\lambda_n}{u+1}+\ln\left(1-\frac{(u+1)\lambda_k}{2\lambda_n}\right)-\ln\frac{2u\lambda_n}{u+1}\ln\left(1-\frac{(u+1)\lambda_k}{2u\lambda_n}\right)\;\right| =$$

$$= \frac{1}{u}\exp\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{(u+1)\lambda_k}{2\lambda_n}\right)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{(u+1)\lambda_k}{2u\lambda_n}\right)^j\;\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{u}\exp\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{u+1}{2\Delta}\right)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{u+1}{2u|\Delta|^{n-k}}\right)^j\;\right) \le$$

$$\le \frac{1}{u}\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1}\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(\Delta^j-1)}\left(\frac{u+1}{2u}\right)^j \le \frac{2}{u-1}\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1}.$$

Тому, використовуючи оцінку (2), отримуємо

$$|R_n(z)| \le \left|\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n}\left|\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\right|\left|\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right||d\zeta| \le$$

$$\leq \frac{2\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1}}{u^{n-m}(u-1)} \frac{\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|}{\left|\frac{2u|\lambda_n|}{u+1}-r\right|} M_F\left(\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|\right) \leq$$

$$\leq \frac{2\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)}{u^{n-m}} \frac{|\lambda_n| M_F\left(\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|\right)}{|\lambda_n|\left|\frac{r}{|\lambda_n|}-\frac{2u}{u+1}\right|}\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1} \leq$$

$$\leq 2C_1\exp\left(\frac{2u\,(u-1)}{(\Delta-1)\,(\Delta-u)}\right)\frac{r\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1}}{u^n\left|\frac{r}{|\lambda_n|}-\frac{2u}{u+1}\right|}\frac{u-1}{(u\Delta-1)\,\frac{2u(\Delta-u)}{u+1}|\lambda_n|},$$

Звідки випливає, що для кожного фіксованого $r \in \mathbb{R}$, $R_n \to 0$, якщо $n \to \infty$. Таким чином, врахувавши (3), (6) і (7) і спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо такий вигляд функції F

$$F\,(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\prod\limits_{m=1}^{k-1}(z-\lambda_m)}{\prod\limits_{m=1}^{k}(z-u\lambda_m)}.$$

Теорема 2 доведена. ■

Зауваження 1. Використовуючи (6), на основі теорії лишків, можна отримати вираз для a_k

$$a_k = \lambda_k\,(u-1)\sum_{m=1}^{k} F(\lambda_m)\frac{\prod\limits_{j=1}^{k-1}(\lambda_m-u\lambda_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq m}}^{k}(\lambda_m-\lambda_j)}.$$

3. Висновки. Отже, в роботі отримано оцінку ряду (1) на кожному компакті з $\mathbb{C}\backslash\{u\lambda_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{u^n} \leq \mathrm{C}_1$, $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right| \leq \frac{1}{\Delta} < 1$. З іншого боку показано, що мероморфну в $\mathbb{C}$ функцію F з простими полюсами $\{u\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ та нулями $\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ для якої справедлива оцінка (2), можна розвинути в ряд Ньютона (1). Окрім того, знайдено вигляд коефіцієнтів a_n цього ряду через λ_k.

Список використаної літератури

1. Lagrange R. Mémoire sur les séries d'interpolation. *Acta Math.* 1935. Vol. 64. P. 1–80.
2. Абдрашитова С. А. О классе сходимости интерполяционной задачи Ньютона для целых функций нулевого порядка. Деп. в ВИНИТИ. 1976. 18 с.
3. Гельфонд А. О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии. *Матем. сб.* 1933. Т. 40, № 1. С. 42–47.
4. Гельфонд А. О., Тоидзе Д. М. Разложение мероморфной функции в ряд рациональных дробей и ряд Тейлора. *Матем. сб.* 1937. Т. 44, № 5, С. 935–945.
5. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Москва : Гостехиздат, 1952. 400 с.
6. Гончаров В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции. *УМН.* 1937. № 3. С. 113–143.
7. Винницкий Б. В. О полноте системы $\{f(\lambda_n z)\}$. *Укр. мат. журн.* 1984. Т. 36, № 5, С. 655-658.

8. Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда. *Матем. сб.* 1973. Вип. 132, № 4, С. 521–543.
9. Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы. *Изв. АН СССР, сер.матем.* 1980. Т. 44, № 5. С. 1066–1114.
10. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций й некоторые их применения. Москва : Наука, 1971. 520 с.
11. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В., Целые и мероморфные функции: Итоги науки и техн. *Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.* 1991. Т. 85. С. 5–185.
12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Москва : Наука, 1968. 624 с.
13. John B. Conway, Functions of one complex variable. Springer-Verlag New York : Heidelberg — Berlin. 1978.
14. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1974. 320 с.

Onys'ko V. Z., Sheparovych I. B. Newton's interpolation problem in the class of meromorphic functions with the fast-growing nodes.

Let (λ_k) be a sequence of different complex numbers such that $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$ and $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right|\le\frac{1}{\Delta}$, $\Delta>1$. In the paper there obtain an asymptotic estimate for meromorphic function presented as series of rational fractions

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-\lambda_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-u\lambda_k)},$$

where (a_k) is a sequence of complex numbers such that $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{u^n}\le C_1$, $u\in(1,\Delta)$. Moreover, there proved that the meromorphic function having zeros at the points $\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ and poles at the points $\{u\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ holds outside the disks $U(u\lambda_k,\sigma):=\{|z-u\lambda_k|\le\sigma\}$ $(\sigma>0)$, for which condition

$$|F(z)|<C_1\left(\frac{\Delta}{(\Delta-u)}+\frac{u-1}{\Delta(u\Delta-1)r}\right)\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right),\ r=|z|>1\ (C_1>0)$$

can be represented in the form of the mentioned functional series, where

$$a_k=\frac{\lambda_k(u-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}F(\zeta)\frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)}d\zeta,\quad \Gamma_k=\partial U(\zeta;R_k),\quad |\lambda_k|<R_k<|\lambda_{k+1}|.$$

Keywords: meromorphic function, rational fractions, zeros, poles.

References

1. Lagrange, R. (1935). Mémoire sur les séries d'interpolation. *Acta Math.,* 64, 1–80.
2. Abdrashitova, S. A. (1976). *On the class of convergence of Newton's interpolation problem for entire functions of zero order.* Man. dep. in UISTR [in Russian].
3. Gelfond, A. (1933). On the functions that are integers at the points of a geometric progression. *Mat. sb.,* 40(1), 42–47.
4. Gelfond, A. O., & Toidze, D. M. (1937). Decomposition of a meromorphic function into a series of rational fractions and a Taylor series, *Mat. Sb.,* 44(5), 935–945 [in Russian].
5. Gel'fond, A. O. (1967). *Calculus of finite differences.* Nauka: Moscow [in Russian].
6. Goncharov, V. L. (1937). Interpolation processes and entire functions. *UMN,* (3), 113–143.
7. Vinnitskiy, B. V. (1984). Completeness of the system $\{f(\lambda_n z)\}$. *Ukr. Math. J.,* 36(5), 655–658 [in Russian].
8. Kaz'min, Yu. A. (1973). On some Gel'fond's problem. *Mat. sb.,* 132(4), 520–543 [in Russian].

9. Korobeynyk, Yu. F. (1980). Interpolation problems, non-trivial expansions of zero and representing systems. *Izv. Academy of Sciences of the USSR, ser. math.,* 44(5), 1066–1114 [in Russian].
10. Ibragimov, I. I. (1971). *The methods of functions interpolation and some of their applications.* Moscow: Nauka [in Russian].
11. Goldberg, A. A., Levin, B. Ya., & Ostrovsky, I. V. (1991). Integer and meromorphic functions: Results of science and technology. *Ser. Modern. problem math. Fund. directions,* 85, 5–185 [in Russian].
12. Markushevich, A. I. (1968). *Theory of analytical functions.* Moscow: Nauka [in Russian].
13. John, B. (1978). *Conway, Functions of one complex variable.* Springer-Verlag New York: Heidelberg — Berlin.
14. Sveshnikov, A. G., & Tikhonov, A. N. (1974). *Theory of functions of a complex variable.* Moscow: Nauka [in Russian].

Одержано 21.03.2024