УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).51-57

В. К. Юськович

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»,
аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
v.yuskovych@kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-3759-3587

ПРО ТРАНЗІЄНТНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТРИБКАМИ

У статті розглянуто стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками та наведено деякі достатні умови, що гарантують прямування його розв'язку до нескінченності (транзієнтність) майже напевно. Спочатку доводиться допоміжний результат про апріорну оцінку другого моменту розв'язку за умов обмеженості зносу та степеневої обмеженості шуму. Далі доводиться теорема про транзієнтність розв'язку за додаткової умови відокремленості зносу від нуля. Основний результат статті встановлює транзієнтність розв'язку за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля поза межами деякого відрізка, степеневої обмеженості шуму та його невиродженості у деякому відрізку.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, стрибки, транзієнтність, прямування до нескінченності, асимптотична поведінка.

1. Вступ та огляд літератури. Першими асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з вінерівським шумом почали досліджувати Гіхман Й. Г. та Скороход А. В. У праці [1] вони досліджували умови прямування розв'язку до нескінченності (транзієнтності) та рекурентності. Їхній підхід полягає у використанні гармонічних функцій. У випадку стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками, що ми розглядаємо в цій статті, використання гармонічних функцій призводить до складнощів.

Питання транзієнтності розв'язків стохастичних рівнянь є важливим при дослідженні їх асимптотичної поведінки. У праці [2] Булдигіна В. В., Клесова О. І., що досліджували питання асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних та звичайних диференціальних рівнянь, умова транзієнтності розв'язку висувалася як припущення.

У попередніх працях автора досліджено деякі задачі щодо асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних рівнянь: у статті [4] розглянуто багатовимірні стохастичні диференціальні рівняння, а в статті [5] – стохастичні диференціальні рівняння зі стрибками. У статті [5] основна увага приділяється дослідженню асимптотики розв'язку, а його транзієнтність припускається.

Пилипенко А. Ю., Проске Ф. Н., Павлюкевич І. Є., Кулик О. М. у своїх працях [6], [7], [8], [9] досліджують задачу регуляризації звичайних диференціальних рівнянь шляхом додавання малого шуму. Задача про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема і задача про транзієнтність, є важливою для розв'язання згаданої вище задачі регуляризації.

2. Постановка задачі. Нехай W – вінерівський процес, N – пуассонівська випадкова міра на множині $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ з мірою інтенсивності $\nu(\mathrm{d}u) \cdot \mathrm{d}t$, причому процес W та випадкова міра N незалежні. Позначимо через $\widetilde{N}$ компенсовану пуассонівську випадкову міру, що відповідає пуассонівській випадковій мірі N, тобто $\tilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}t) = N(\mathrm{d}u,\mathrm{d}t) - \nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t$.

Нехай X – розв'язок *стохастичного диференціального рівняння зі стрибками* вигляду

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + b(X(t))\mathrm{d}W(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-),u)\tilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}t), \tag{1}$$

$$X(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Під *транзієнтністю* процесу X ми розуміємо те, що цей процес за модулем прямує до нескінченності майже напевно, коли час прямує до нескінченності, тобто $|X(t)| \to \infty,\ t \to \infty$, м.н. У цій статті ми вивчатимемо достатні умови того, що $X(t) \to +\infty,\ t \to \infty$, м.н.

3. Основна частина. Одержимо апріорну оцінку для другого моменту розв'язку рівняння (1) у випадку, коли знос обмежений, а шум степенево обмежений.

Лема 1. *Припустимо, що:*
(А) функція a обмежена;
(Б) функції b та c задовольняють умову степеневого зростання

$$\exists C \ge 0\ \exists \beta \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x,u)\nu(\mathrm{d}u) \le C\left(1 + \left(x^2\right)^{\beta}\right). \tag{2}$$

Тоді

$$\exists \tilde{C} \ge 0 \quad \forall t \ge 0 \quad \mathbb{E}X^2(t) \le \tilde{C}\left(1 + t^2\right).$$

Доведення. Перепишемо рівняння (1) в інтегральному вигляді:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t b(X(s))\mathrm{d}W(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-),u)\tilde{N}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}t). \tag{3}$$

Добре відомо, що другий момент процесу X локально обмежений, тобто

$$\forall T \ge 0 \quad \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}X^2(t) < \infty.$$

За нерівністю Коші–Буняковського:

$$\mathbb{E}X^2(t) \le 4\Bigg(x_0^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right)^2$$

$$+\mathbb{E}\left(\int_0^t b(s)\mathrm{d}W(s)\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s,u)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right)^2\Bigg)$$

$$= 4\left(x_0^2 + E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)\right),$$

де через E_1, E_2, E_3 позначено відповідні математичні сподівання.

Враховуючи умову (А),

$$\exists A \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |a(x)| \le A. \tag{4}$$

Оцінимо доданок E_1. За нерівністю Коші–Буняковського

$$E_1(t) = \mathbb{E}\left(\int_0^t a(X(s))\mathrm{d}s\right)^2 \le t\mathbb{E}\int_0^t a^2(X(s))\mathrm{d}s$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad = t\int_0^t \mathbb{E}a^2(X(s))\mathrm{d}s$$

$$\text{(за формулою (4))} \quad \le t\int_0^t A^2\mathrm{d}s = A^2t^2.$$

Зауважимо, що інтеграли у доданках E_2, E_3 є мартингалами. Оцінимо ці доданки:

$$E_2(t) + E_3(t) = \mathbb{E}\left(\int_0^t b(X(s))\mathrm{d}W(s)\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-),u)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right)^2$$

$$\text{(за ізометрією Іто)} \quad = \mathbb{E}\int_0^t b^2(X(s))\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-),u)\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s$$

$$= \mathbb{E}\int_0^t\left(b^2(X(s-)) + \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-),u)\nu(\mathrm{d}u)\right)\mathrm{d}s$$

$$\text{(за умовою (Б))} \quad \le C\mathbb{E}\int_0^t\left(1 + X^2(s-)^{\beta}\right)\mathrm{d}s$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad = C\int_0^t\left(1 + \mathbb{E}X^2(s-)^{\beta}\right)\mathrm{d}s$$

$$\text{(за нерівністю Єнсена)} \quad \le C\left(t + \int_0^t\left(\mathbb{E}X^2(s-)\right)^{\beta}\mathrm{d}s\right).$$

Таким чином, отримали нерівність

$$\mathbb{E}X^2(t) \le 4\left(x_0^2 + A^2t^2 + C\left(t + \int_0^t\left(\mathbb{E}X^2(s-)\right)^{\beta}\mathrm{d}s\right)\right),$$

з якої неважко отримати нерівність

$$\mathbb{E}X^2(t) \le C_1\left(1 + t^2 + \int_0^t\left(\mathbb{E}X^2(s-)\right)^{\beta}\mathrm{d}s\right),$$

де позначили $C_1 = 8\max(x_0^2, A^2, C)$.

Використовуючи узагальнену лему Гронуолла–Беллмана (див. Corollary 7.5 з книги [3]), отримуємо оцінку

$$\mathbb{E}X^2(t) \le \left(C_1^{1-\beta}\left(1+t^2\right)^{1-\beta} + C_1(1-\beta)t\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Поділивши останню нерівність на $t^2 > 0$, отримаємо, що

$$\frac{\mathbb{E}X^2(t)}{t^2} \le \left(C_1^{1-\beta}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{1-\beta} + \frac{C_1(1-\beta)}{t^{1-2\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \to C_1,\ t\to\infty,$$

з чого неважко вивести, що

$$\exists\tilde{C} \ge 0 \quad \forall t \ge 0 \quad \mathbb{E}X^2(t) \le \tilde{C}(1+t^2),$$

що й треба було довести.

Використаємо вищенаведену лему для доведення наступного результату щодо лінійної оцінки нижньої асимптотики розв'язку майже напевно за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля та степеневої обмеженості шуму.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови леми 1. Тоді*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} \geq \underline{A} \quad \textit{м.н.},$$

де $\underline{A} = \inf_{x\in\mathbb{R}} a(x)$.

Доведення. Поділимо стохастичне рівняння (3) на $t > 0$:

$$\frac{X(t)}{t} = \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t a(X(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int_0^t b(X(s))\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-),u)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$
$$= \frac{x_0}{t} + T_1(t) + T_2(t) + T_3(t), \tag{5}$$

де через T_1, T_2, T_3 позначено відповідні доданки. Очевидно, що $\frac{x_0}{t} \to 0,\ t\to\infty$. Дослідимо збіжність доданків T_1, T_2, T_3.

Маємо, що $\liminf_{t\to\infty} T_1(t) \geq \underline{A},\ t\to\infty$. Дійсно,

$$\liminf_{t\to\infty} T_1(t) = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t a(X(s))\mathrm{d}s$$
$$\text{(за умовою (A))} \quad \geq \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \underline{A}\mathrm{d}s = \underline{A}.$$

Покажемо, що $T_2(t) \to 0,\ t\to\infty$, м.н. Оцінимо другий момент підінтегрального процесу у доданку T_2. За умовою (2)

$$\mathbb{E}b^2(t) \leq \mathbb{E}\left(C\left(1 + \left(X^2(t)\right)^{\beta}\right)\right) = C\left(1 + \mathbb{E}\left(X^2(t)\right)^{\beta}\right)$$
$$\text{(за нерівністю Єнсена)} \quad \leq C\left(1 + \left(\mathbb{E}X^2(t-)\right)^{\beta}\right)$$
$$\text{(за лемою 1)} \quad \leq C\left(1 + \left(\tilde{C}\left((1+t^2)\right)\right)^{\beta}\right) \leq C_1(1+t^{2\beta})$$

для деякої сталої $C_1 \geq 0$. Тоді, використовуючи наслідок 1 зі статті [5], отримуємо збіжність

$$T_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t b(s)\mathrm{d}W(s) \to 0,\ t\to\infty,\ \text{м.н.}$$

Покажемо, що $T_3(t) \to 0,\ t\to\infty$, м.н. Аналогічно оцінюванню другого моменту підінтегрального процесу у доданку T_2, можна отримати оцінку підінтегрального процесу у доданку T_3:

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} c^2(X(t-),u)\nu(\mathrm{d}u) \leq C(1+t^{2\beta}).$$

Тоді, використовуючи наслідок 2 зі статті [5], отримуємо збіжність

$$T_3(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-),u)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \to 0,\ t\to\infty,\ \text{м.н.}$$

Таким чином, використовуючи одержані вище збіжності, переходячи до нижньої границі при $t\to\infty$ у формулі (5), отримуємо твердження теореми.

З попередньої теореми неважко отримати наступний наслідок щодо прямування розв'язку до нескінченності майже напевно.

Наслідок 1. *Припустимо, що виконуються умови теореми 1, причому* $\underline{A} > 0$. *Тоді*

$$X(t) \to +\infty, \ t \to \infty, \quad \text{м.н.}$$

Останній наслідок надає деякі прості достатні умови того, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності майже напевно. Умову обмеженості для коефіцієнта зносу можна послабити, якщо не вимагати її виконання в деякому відрізку. Сформулюємо та доведемо наступну теорему, що є основним результатом цієї статті.

Теорема 2. *Припустимо, що:*
(А) функції a, b, c *задовольняють локальну умову Ліпшиця:*

$$\forall R \geq 0 \quad \exists L \geq 0 \quad \forall \{x, y\} \subset [-R, R]$$

$$(a(x) - a(y))^2 + (b(x) - b(y))^2 + \int_{\mathbb{R}} (c(x,u) - c(y,u))^2 \, \mathrm{d}u \leq L(x-y)^2.$$

Крім того, припустимо, що для деякого числа $\delta > 0$ *виконуються умови:*
(Б) функція a *обмежена та, крім того, відокремлена від нуля поза відрізком:*

$$\exists \underline{A} > 0 \quad \forall x \notin [-\delta, \delta] \quad a(x) \geq \underline{A};$$

(В) функції b, c *задовольняють умову степеневого зростання (2), а також умову локальної невиродженості:*

$$\forall R \geq 2\delta \quad \exists \underline{C} > 0 \quad \left[\begin{array}{ll} \forall x \in [-2\delta, R] & |b(x)| \geq \underline{C}, \\ \forall x \in [-2\delta, R] & \int_{\mathbb{R}} c(x,u)\nu(\mathrm{d}u) \geq \underline{C}. \end{array} \right. \tag{6}$$

Тоді $X(t) \to +\infty, \ t \to \infty$, *м.н.*

Доведення. З умови (А) теореми випливає, що для будь-якого початкового значення $X(0)$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1), що є строго марковським процесом. Для $x \in \mathbb{R}$ позначимо через X_x розв'язок рівняння (1) з початковою умовою $X_x(0) = x$ та через

$$\tau_x(A) = \inf \{t \geq 0 \colon X_x(t) \in A\}$$

позначимо момент потрапляння розв'язку в множину A.

Крок 1. Покажемо, що розв'язок X виходить з інтервалу $(-\infty, -\delta)$ майже напевно. Позначимо через $\tilde{a}$ ліпшицеву функцію таку, що $\tilde{a}(x) = a(x), \ x \notin [-\delta, \delta]$, та $\tilde{a}(x) \geq \underline{A}, \ x \in [-\delta, \delta]$. Для $x \in \mathbb{R}$ позначимо через $\tilde{X}_x$ розв'язок стохастичного рівняння

$$\mathrm{d}\tilde{X}_x(t) = \tilde{a}(\tilde{X}_x(t))\mathrm{d}t + b(\tilde{X}_x(t))\mathrm{d}W(t) + \int_{\mathbb{R}} c(\tilde{X}_x(t), u)\tilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}t) \tag{7}$$

з початковою умовою $\tilde{X}_x(0) = x$. Стохастичне рівняння (7) задовольняє умови наслідку 1, тому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{X}_x(t) \to +\infty, \ t \to \infty, \quad \text{м.н.} \tag{8}$$

З властивості локальності стохастичних інтегралів та єдиності розв'язку випливає, що

$$\forall x \notin [-\delta, \delta] \quad \forall t \in [0, \tau_x[-\delta, \delta]) \quad X_x(t) = \tilde{X}_x(t) \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Таким чином, з формул (8) та (9) випливає, що $\tau_{x_0}[-\delta, +\infty) < \infty$ м.н.

Крок 2. Покажемо, що для довільного числа $R \geq 2\delta$ розв'язок X досягає множини $[R, +\infty)$ майже напевно. З умови (B) випливає, що розв'язок X майже напевно виходить з проміжку $[-2\delta, R]$. Більш того, для будь-якого числа $R \geq 2\delta$ існує таке число $p > 0$, що для будь-якої початкової умови $x \geq -\delta$ імовірність того, що розв'язок X_x вийде з проміжку $[-2\delta, R]$ через правий кінець, не менше, ніж p. Враховуючи крок 1, отримуємо, що з імовірністю 1 знайдеться момент часу t такий, що $X(t) > R$.

Крок 3. Покажемо нарешті, що розв'язок X прямує до нескінченності майже напевно. Виконуючи оцінки, як у теоремі 1, можна показати, що

$$\inf_{x \geq R} \mathbb{P}\left\{\inf_{t \geq 0} \tilde{X}_x(t) > \delta\right\} \to 1, \ R \to \infty.$$

Тоді, враховуючи формули (8) та (9), отримуємо, що

$$\inf_{x \geq R} \mathbb{P}\left\{X_x(t) \to +\infty\right\} \to 1, \ R \to \infty.$$

Враховуючи кроки 1, 2 та строго марковську властивість, з останньої збіжності отримуємо

$$\mathbb{P}\left\{X(t) \to +\infty\right\} = 1,$$

що й треба було довести.

4. Висновки. Ми розглянули стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками та навели деякі достатні умови, що гарантують прямування його розв'язку до нескінченності (транзієнтність) майже напевно. Спочатку ми довели допоміжний результат про апріорну оцінку другого моменту розв'язку за умов обмеженості зносу та степеневої обмеженості шуму. Далі ми довели теорему про транзієнтність розв'язку за додаткової умови відокремленості зносу від нуля. В основному результаті статті ми встановили транзієнтність розв'язку за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля поза межами деякого відрізка, степеневої обмеженості шуму та його невиродженості у деякому відрізку.

Список використаної літератури

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
2. Булдигін В. В., Клесов О. І., Тимошенко О. А. Асимптотична поведінка стохастичних диференціальних рівнянь. Вінниця: ФОП Кушнір Ю. В., 2018.
3. Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations. *Marcel Dekker*. 1994.
4. Yuskovych V. K. On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space. *Theory of Stochastic Processes*. 2023. Vol. 27, No. 1. P. 53–66.
5. Юськович В. К. Про асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками. *Український математичний журнал*. 2023. Вип. 75, № 11. С. 1570–1584.
6. Pilipenko A., Proske F. N. On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case. *Stochastics and Dynamics*. 2018. Vol. 18, No. 6.
7. Pilipenko A., Proske F. N. On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise. *Statistics & Probability Letters*. 2018. Vol. 132. P. 62–73.

8. Pavlyukevich I., Pilipenko A. Generalized Peano problem with Lévy noise. *Electronic Communications in Probability.* 2020. Vol. 25, No. 85. P. 1–14.
9. Kulik A., Pilipenko A. Yu. On regularization by a small noise of multidimensional ODEs with non-Lipschitz coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2021. Vol. 72. P. 1445–1481.

Yuskovych V. K. On transience of solutions of stochastic differential equations with jumps.

In the article, we consider a stochastic differential equation with jumps and state some sufficient conditions that guarantee transience (approaching to infinity) of its solution almost surely. First, we prove an auxiliary result about an a priori estimation of the second moment of the solution under the conditions of boundedness of the drift and power-law boundedness of the noise. Next, we prove a theorem on transience of the solution under the additional condition that the drift is separated from zero. The main result of the article establishes the transience of the solution under the conditions of boundedness of the drift, its separation from zero outside of some segment, power-law boundedness of the noise, and its non-degeneracy in some segment.

Keywords: stochastic differential equation, jumps, transience, approaching infinity, asymptotic behavior.

References

1. Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V. (1968) Stochastic differential equations. *Kiev: Naukova dumka* [In Russian].
2. Buldygin, V. V., Klesov O. I., Tymoshenko O. A. (2018) Asymptotic behavior of stochastic differential equations. *Vinnytsia: FOP Kushnir Yu. V.* [In Ukrainian].
3. Mao, X. (1994) Exponential stability of stochastic differential equations. *Marcel Dekker.*
4. Yuskovych, V. K. (2023) On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space. *Theory of Stochastic Processes, 27, 1*, 53–66.
5. Yuskovych, V. K. (2023) On asymptotics of solutions of stochastic differential equations with jumps. *Ukrainian Mathematical Journal, 75, 11*, 1570–1584 [In Ukrainian].
6. Pilipenko, A., Proske, F. N. (2018) On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case. *Stochastics and Dynamics, 18, 6.*
7. Pilipenko, A., Proske, F. N. (2018) On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise. *Statistics & Probability Letters, 132*, 62–73.
8. Pavlyukevich, I., Pilipenko, A. (2020) Generalized Peano problem with Lévy noise. *Electronic Communications in Probability, 25, 85*, 1–14.
9. Kulik, A., Pilipenko, A. Yu. (2021) On regularization by a small noise of multidimensional ODEs with non-Lipschitz coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal, 72*, 1445–1481.

Одержано 08.04.2024