УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).15-25

О. В. Колеснік

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
lxndr.kolesnik@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-8243-6831

ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ТА ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМУ ДЛЯ РЕКОРДІВ У $\mathbf{F}^\alpha$ СХЕМІ

У статті вивчається асимптотична поведінка кількості рекордів у так званій F^α-схемі, яка узагальнює класичну постановку для незалежних однаково розподілених випадкових величин. Знайдені умови за яких асимптотичні теореми можна записати через накопичену інтенсивність. Показано структуру точної асимптотики. Розглянуто приклади, що підтверджують оптимальність результатів.

Ключові слова: незалежні випадкові величини, F^α-схема, рекорди, кількість рекордів, центральна гранична теорема, закон повторного логарифму.

1. Вступ. Розглянемо послідовність $\{X_k, k \geq 1\}$ незалежних випадкових величин, функції розподілу яких є неперервними. Тоді події типу $\{X_i = X_j\}$ мають ймовірність 0, якщо $i \neq j$. Нехай $L(1) = 1$. Для $n \geq 2$ означимо рекурентно випадкові величини

$$L(n) = \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}$$

вважаючи, що $\inf \emptyset := +\infty$. Члени послідовності $L = \{L(n), n \geq 1\}$ називаються *моментами рекордів*, побудованими за $\{X_k, k \geq 1\}$. Означимо послідовність випадкових величин $\mu = \{\mu(n), n \geq 1\}$, задану співвідношенням

$$\mu(n) = \#\{k \geq 1 : L(k) \leq n\}, \qquad n \geq 1. \tag{1}$$

Видно, що $\mu(n)$ – це *кількість рекордів*, що трапились до моменту n включно.

В роботі [10] вперше було розглянуто так звану F^α*-схему*, яка будується за заданої функції розподілу F та послідовності додатних чисел $\{\alpha_k\}$. Зрозуміло, що $(F)^{\alpha_n}$ є функцією розподілу для кожного $n \geq 1$. Сукупність незалежних величин $\{X_n\}$ називається F^α-схемою, якщо $\mathbf{P}(X_n < x) = (F(x))^{\alpha_n}$. Якщо всі α_n є рівними між собою, то F^α-схема – це сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо ж не всі α_n є рівними між собою, то F^α-схема – це узагальнення класичного випадку.

При вивченні F^α-схеми корисними є індикаторні випадкові величини

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_k \text{ є рекордом}, \\ 0, & \text{у іншому випадку}. \end{cases}$$

У роботі [7] доведено, що $\{I_k, k \geq 1\}$ є незалежними випадковими величинами (див. також [1]), що дозволить застосовувати класичні граничні теореми.

Також відомі ймовірності, що рекорд відбувся. Вони мають значення

$$\mathbf{P}(I_k = 1) = p_k = \frac{\alpha_k}{A_k} = 1 - \frac{A_{k-1}}{A_k}, \tag{2}$$

де $A_0 = 0$, $A_1 = \alpha_1$, $A_k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, $k \geq 2$. A_n називається накопиченою інтенсивністю до моменту n. Саме через неї часто можна виразити необхідні асимптотики, або й зовсім, задавати схему через поведінку або формулу A_n.

Оскільки I_k – випадкова величина Бернуллі, то

$$\mathbf{E}I_k = p_k, \qquad \mathbf{D}I_k = p_k(1-p_k).$$

Звідси, згідно з (1), випливає

$$\mu(n) = \sum_{k=1}^{n} I_k, \qquad \mathbf{E}\mu(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k, \qquad \mathbf{D}\mu(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k). \tag{3}$$

Зауваження 1. *Якщо $\boldsymbol{E}\mu(n)$ – обмежене, то за лемою Бореля-Кантеллі для подій $\{I_k = 1\}$ будемо мати майже напевно скінчену кількість рекордів, і тоді не зможемо говорити про асимптотики. Тому надалі $\boldsymbol{E}\mu(n) \to \infty$. Окрім того, найбільше інтересу має випадок, коли $p_n \to 0$. Саме він надалі буде розглядатися, хоча деякі результати цієї умови не вимагатимуть.*

2. Асимптотики $\mathbf{E}\mu(n)$ та $\mathbf{D}\mu(n)$.

Лема 1. *Нехай $1 \leq s < n$. Тоді:*

$$\ln \frac{A_n}{A_s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m$$

Доведення. Скориставшись рівностями (2) та рядом Меркатора для логарифма отримуємо

$$\ln \frac{A_n}{A_s} = \ln \prod_{k=s+1}^{n} \frac{A_k}{A_{k-1}} = \ln \prod_{k=s+1}^{n} \frac{1}{1-p_k} = \sum_{k=s+1}^{n} -\ln(1-p_k) =$$
$$= \sum_{k=s+1}^{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(p_k)^m}{m} = |\text{всі члени ряду додатні}| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m$$

□

Лема 2. *Нехай $t \geq 0, 1 \leq s < n$. Тоді $\left(\sum\limits_{m=1}^{0} := 0\right)$:*

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^{t+1} < \ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m < \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^{n} \frac{(p_k)^{t+1}}{1-p_k}.$$

Доведення. Із леми (1) випливає рівність

$$\ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m = \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m.$$

Тоді нижня оцінка є просто першим доданком суми праворуч.

$$\frac{1}{t+1}\sum_{k=s+1}^{n}(p_k)^{t+1} = \sum_{m=t+1}^{t+1}\frac{1}{m}\sum_{k=s+1}^{n}(p_k)^m < \sum_{m=t+1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=s+1}^{n}(p_k)^m$$

А верхня є заміною знаменника на мінімальний за m та сумуванням прогресії.

$$\sum_{m=t+1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=s+1}^{n}(p_k)^m < \sum_{m=t+1}^{\infty}\frac{1}{t+1}\sum_{k=s+1}^{n}(p_k)^m = \frac{1}{t+1}\sum_{k=s+1}^{n}\frac{(p_k)^{t+1}}{1-p_k}$$

□

Лема 3. *Нехай* $p_n \to 0, \boldsymbol{E}\mu(n) \to \infty, n \to \infty$. *Тоді:*

$$\boldsymbol{D}\mu(n) \sim \boldsymbol{E}\mu(n).$$

Доведення. Для $s < k \le n$ маємо оцінки відношення сум $(p_k)^2$ до сум p_k:

$$0 < \frac{\sum\limits_{k=s+1}^{n}(p_k)^2}{\sum\limits_{k=s+1}^{n}p_k} \le \frac{\sup\limits_{s<k\le n} p_k \sum\limits_{k=s+1}^{n}p_k}{\sum\limits_{k=s+1}^{n}p_k} \le \sup_{s<k} p_k;$$

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=s+1}^{n}(p_k)^2}{\sum\limits_{k=s+1}^{n}p_k} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=s+1}^{n}(p_k)^2}{\sum\limits_{k=s+1}^{n}p_k} \le \sup_{s<k} p_k;$$

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2 - \sum\limits_{k=1}^{s}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n) - \sum\limits_{k=1}^{s}p_k} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2 - \sum\limits_{k=1}^{s}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n) - \sum\limits_{k=1}^{s}p_k} \le \sup_{s<k} p_k.$$

Поділимо чисельник і знаменник на $\mathbf{E}\mu(n)$, обрахуємо частково границі за n, де це можливо, у доданках під нижньою та верхньою границями. Оскільки $\mathbf{E}\mu(n) \to \infty$, ми позбавились суми з межею s. Оцінкою для будь-якого s буде

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \le \sup_{s<k} p_k.$$

За означенням верхньої границі, та враховуючи $p_k \to 0$, отримуємо при $s \to \infty$

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \le \limsup_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} p_k = 0.$$

Тому відношення має нульову границю. Згідно з рівностями (3) отримаємо

$$\frac{\mathbf{D}\mu(n)}{\mathbf{E}\mu(n)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(1-p_k)}{\mathbf{E}\mu(n)} = 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \to 1, n \to \infty.$$

□

Теорема 1. *Нехай* $t \geq 0, p_n \to 0, n \to \infty$. *Тоді:*
Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (p_k)^{t+1} < \infty$, *то:*

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{n} (p_k)^m \to \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} (p_k)^m \in (0, \infty), n \to \infty,$$

інакше:

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{n} (p_k)^m \sim \frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^{n} (p_k)^{t+1}, n \to \infty.$$

Доведення. З леми (2) для будь-якого $s \geq 1$ маємо нерівності

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^{t+1} < \ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m < \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^{n} \frac{(p_k)^{t+1}}{1-p_k}.$$

Оскільки $p_n \to 0$ оцінивши верхню суму замінивши знаменник на мінімальний, подібно до доведення леми (3) отримуємо

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^{t+1} < \ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^m < \frac{1}{1 - \sup\limits_{s<k} p_k} \cdot \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^{n} (p_k)^{t+1}.$$

Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (p_k)^{t+1} < \infty$, то різниця логарифму та сум обмежена зверху границею цього ряду на деяку константу, а враховуючи, що за лемою (1)

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{n} (p_k)^m = \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{n} (p_k)^m,$$

то видно монотонне зростання послідовності за n. Отже, вона існує та дорівнює нескінченій сумі, при тому додатній, що доводить першу частину теореми. Надалі $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (p_k)^{t+1} \to \infty$. Поділивши, будемо мати

$$1 < \frac{\ln \frac{A_n}{A_s} - \sum\limits_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum\limits_{k=s+1}^{n} (p_k)^m}{\frac{1}{t+1} \sum\limits_{k=s+1}^{n} (p_k)^{t+1}} < \frac{1}{1 - \sup\limits_{s<k} p_k};$$

$$1 < \frac{\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum\limits_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum\limits_{k=2}^{n} (p_k)^m - \left(\ln \frac{A_s}{A_1} - \sum\limits_{m=1}^{t} \frac{1}{m} \sum\limits_{k=2}^{s} (p_k)^m \right)}{\frac{1}{t+1} \sum\limits_{k=2}^{n} (p_k)^{t+1} - \left(\frac{1}{t+1} \sum\limits_{k=2}^{s} (p_k)^{t+1} \right)} < \frac{1}{1 - \sup\limits_{s<k} p_k}.$$

Поділивши чисельник та знаменник на $\frac{1}{t+1}\sum\limits_{k=2}^{n}(p_k)^{t+1}\to\infty$, розглянемо нижню та верхню границі послідовності за n. Тоді, оскільки вирази в дужках від n не залежать, вони зникнуть і будемо мати

$$1\le\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{A_n}{A_1}-\sum\limits_{m=1}^{t}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=2}^{n}(p_k)^m}{\frac{1}{t+1}\sum\limits_{k=2}^{n}(p_k)^{t+1}}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{A_n}{A_1}-\sum\limits_{m=1}^{t}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=2}^{n}(p_k)^m}{\frac{1}{t+1}\sum\limits_{k=2}^{n}(p_k)^{t+1}}\le\frac{1}{1-\sup\limits_{s<k}p_k}$$

Тепер середня частина від s не залежить, і в силу довільності s, коли $s\to\infty$

$$\frac{1}{1-\sup\limits_{s<k}p_k}\to\frac{1}{1-\limsup\limits_{k\to\infty}p_k}=\frac{1}{1-\lim\limits_{k\to\infty}p_k}=|p_k\to 0|=1.$$

Отже, маємо рівність нижньої та верхньої границь одиниці, тому

$$\ln\frac{A_n}{A_1}-\sum_{m=1}^{t}\frac{1}{m}\sum_{k=2}^{n}(p_k)^m\sim\frac{1}{t+1}\sum_{k=2}^{n}(p_k)^{t+1},n\to\infty$$

$\square$

Наслідок 1. *Нехай $p_n\to 0, A_n\to\infty, n\to\infty$. Тоді:*

$$\boldsymbol{D}\mu(n)\sim\boldsymbol{E}\mu(n)\sim\ln A_n.$$

Доведення. Візьмемо у теоремі (1) $t=0$. Якби було $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=\mathbf{E}\mu(n)<\infty$, то за першою частиною теореми $\ln A_n\to const$, але це не так, тому маємо виконання другої частини та еквівалентність

$$\ln\frac{A_n}{A_1}\sim\sum_{k=2}^{n}p_k\Rightarrow\mathbf{E}\mu(n)\sim\ln A_n \text{ і за лемою (3) }\Rightarrow\mathbf{D}\mu(n)\sim\mathbf{E}\mu(n)\sim\ln A_n.$$

$\square$

Наслідок 2. *Нехай $p_n\to 0, A_n\to\infty, n\to\infty$. Тоді:*
Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(p_k)^2<\infty$, то:

$$1+\ln\frac{A_n}{A_1}-\boldsymbol{E}\mu(n)\to const\in(0,\infty),$$

інакше:

$$1+\ln\frac{A_n}{A_1}-\boldsymbol{E}\mu(n)\sim\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(p_k)^2.$$

Доведення. Беремо у теоремі (1) $t=1$, помітимо математичне сподівання.
$\square$

Оскільки математичне сподівання та дисперсія приймають участь у граничних теоремах, то природно виникає питання, коли можна їх замінити на еквівалентності, а коли доведеться уточнювати асимптотику. Окрім того, маємо на меті використовувати саме накопичену інтенсивність A_n для асимптотичних виразів. Дисперсія найчастіше стоїть у знаменнику, тому для неї достатньо еквівалентності, то ж насправді залишається з'ясовувати точну асимптотику для математичного сподівання.

Перед тим як перейти до граничних теорем, розглянемо декілька прикладів, які покажуть точні асимптотики.

Приклад 1. *Нехай* $A_n = 1 + \lambda \ln n, \lambda > 0$, *тоді*

$$p_n = 1 - \frac{1 + \lambda \ln(n-1)}{1 + \lambda \ln n} = \frac{-\lambda \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + \lambda \ln n} = \frac{\lambda}{n(1 + \lambda \ln n)} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right).$$

Помітимо, що ряд з p_n^2 *є збіжним. Тому за наслідком* (2) *маємо*

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const \in (0, \infty).$$

Тут $\ln A_n = \ln(1 + \lambda \ln n)$. *Після спрощень та об'єднання констант буде*

$$\ln \ln n - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const.$$

Приклад 2. *Нехай* $A_n = n^\tau, \tau > 0$, *тоді*

$$p_n = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^\tau = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau = \frac{\tau}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Знову, ряд з p_n^2 *є збіжним. Тому за наслідком* (2) *маємо*

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const \in (0, \infty).$$

Тут $\ln A_n = \tau \ln n$. *Після спрощень та об'єднання констант буде*

$$\tau \ln n - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const.$$

Приклад 3. *Нехай* $A_n = e^{n^\beta}, 0 < \beta < 1$, *тоді зробивши деякі технічні дії над рядами експоненти та біноміальним рядом можна отримати*

$$p_n = \sum_{s=1}^{[1/(1-\beta)]} \frac{(-1)^{s-1}\beta^s}{s!} \frac{1}{n^{s(1-\beta)}} + O\left(\frac{1}{n^{([1/(1-\beta)]+1)(1-\beta)}}\right)$$

У сумі саме такі доданки,що ряд з залишкових членів збігаєтъся.Помітимо, що ряд з p_n^2 *є збіжним при* $0 < \beta < 1/2$ *і за наслідком* (2) *у термінах* $\ln A_n$

$$0 < \beta < 1/2: \qquad \ln A_n - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const.$$

Якщо для $\beta \geq 1/2$ *хочемо асимптотику збіжності саме до константи, доведеться окрім суми перших степенів віднімати наступні до степені* t, *поки не отримаємо збіжний ряд, що відбудеться при* $t = \left[\frac{1}{1-\beta}\right]$.

Коли $\frac{1}{1-\beta}$ — ціле число, буде виникати логарифм з асимптотики гармонічного ряду. А у проміжках присутні степені, які теж можна точно оцінити. Без технічних подробиць наведемо результати у термінах $\ln A_n$:

$$\begin{aligned}
\beta = \frac{1}{2}: &\qquad \ln A_n - \frac{1}{4}\ln\ln A_n - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const;\\
\frac{1}{2} < \beta < \frac{2}{3}: &\qquad \ln A_n - \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2}{2\beta-1}\cdot(\ln A_n)^{\frac{2\beta-1}{\beta}} - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const;\\
\beta = \frac{2}{3}: &\qquad \ln A_n - \frac{2}{3}\sqrt{\ln A_n} + \frac{2}{27}\ln\ln A_n - \boldsymbol{E}\mu(n) \to const.
\end{aligned}$$

Дані приклади можна об'єднувати і написати асимптотику для

$$A_n = e^{n^\beta} n^\tau (1 + \lambda \ln n), \qquad 0 \le \beta < 1, \tau \ge 0, \lambda \ge 0.$$

Результатом у найбільш точній формі, який додатково стартує з однакового з математичним сподіванням значенням, вважаючи, що $\frac{n^0-1}{0} = \ln n, \sum\limits_{s=2}^{1} = 0$, коли таке виникає, буде

$$1 + \ln\frac{A_n}{A_1} - \sum_{s=2}^{[1/(1-\beta)]} \frac{(-1)^s\beta^s}{s!}\cdot\frac{n^{1-s(1-\beta)}-1}{1-s(1-\beta)} - \mathbf{E}\mu(n) \to const, n \to \infty.$$

Тобто τ, λ приховані всередині $\ln A_n$, окрім того навіть при $\beta = 1$ отримується розумна асимптотика, але тоді це вже не випадок $p_n \to 0$. Правомірною постає гіпотеза щодо такого ж вигляду асимптотики для деякого коефіцієнту β, який можна було б означити, наприклад, як $\beta := \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\ln A_n}{\ln n}$, але це питання ще потребує додаткових досліджень, і скоріше за все занурення у теорію монотонних правильно змінних функцій. Надалі сформулюємо результати для граничних теорем теорії ймовірностей, коли відсутня необхідність у доданках із суми та визначенні β.

3. Центральна гранична теорема. Покажемо спочатку доведення відомого результату для справжніх моментів суми незалежних випадкових величин, якими якраз є індикатори рекордів.

Теорема 2. *Нехай $\boldsymbol{D}\mu(n) \to \infty, n \to \infty$. Тоді:*

$$\frac{\mu(n) - \boldsymbol{E}\mu(n)}{\sqrt{\boldsymbol{D}\mu(n)}} \Rightarrow N(0,1)$$

Доведення. З'ясуємо виконання ЦГТ для $\mu(n)$, перевіривши достатні умови у формі Ляпунова.

$$\exists\delta > 0 : \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left|I_k - p_k\right|^{2+\delta}}{\left(\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}\right)^{2+\delta}} = 0$$

Візьмемо $\delta = 1$.

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left|I_k - p_k\right|^3}{\left(\mathbf{D}\mu(n)\right)^{3/2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^3(1-p_k) + (1-p_k)^3 p_k}{\left(\mathbf{D}\mu(n)\right)^{3/2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)(p_k^2 + (1-p_k)^2)}{\left(\mathbf{D}\mu(n)\right)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)}{\left(\mathbf{D}\mu(n)\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}} \to 0, \text{ оскільки } \mathbf{D}\mu(n) \to \infty, n \to \infty.$$

□

Теорема 3. *Нехай* $p_n \to 0, A_n \to \infty, n \to \infty$. *Тоді:*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 = o\left(\sqrt{\ln A_n}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n}} \Rightarrow N(0,1)$$

Доведення. Із загальних умов теореми та наслідку (1) маємо

$$\mathbf{D}\mu(n) \sim \mathbf{E}\mu(n) \sim \ln A_n \to \infty, n \to \infty.$$

Тому, із теореми (2) виконується ЦГТ у вигляді

$$\xi_n := \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}} \Rightarrow \xi \sim N(0,1)$$

Враховуючи еквівалентність $\mathbf{D}\mu(n) \sim \ln A_n$, за теоремою Слуцького

$$\eta_n := \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n}} = \xi_n \frac{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}}{\sqrt{\ln A_n}} \Rightarrow \xi \cdot 1 \sim N(0,1)$$

Достатність. Згідно наслідку (2) після спрощення констант

$$\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \to const \qquad \text{або} \qquad \ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \sim \sum_{k=1}^{n} p_k^2$$

В будь-якому разі з умови теореми випливає $\Delta_n := \left(\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n)\right) / \sqrt{\ln A_n} \to 0$, звідки за теоремою Слуцького

$$\beta_n := \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n}} = \eta_n - \Delta_n \Rightarrow \xi \ - 0 \sim N(0,1).$$

Необхідність. Будемо доводити від супротивного. Нехай виконується ЦГТ у вигляді $\beta_n \Rightarrow N(0,1)$, але порушується перша умова, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \neq o\left(\sqrt{\ln A_n}\right), \text{ звідки необхідно } \sum_{k=1}^{n} p_k^2 \to \infty.$$

Оскільки у цьому випадку, згідно наслідку (2) та з леми (2)

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n) \sim \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(p_k)^2 \qquad \text{та} \qquad 1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n) > \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} p_k > 0,$$

то порушення першої умови означає існування додатної (можливо нескінченої) верхньої границі

$$C := \limsup_{n\to\infty} \frac{1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n}} = \limsup_{n\to\infty} \Delta_n \in (0, \infty]$$

Використаємо виконання ЦГТ у двох виглядах: $\beta_n \Rightarrow N(0,1), \eta_n \Rightarrow N(0,1)$, розглянувши їх на підпослідовності $\{n_k, k \geq 1\}$, де $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta_{n_k} = C$. Враховуючи $\beta_{n_k} + \Delta_{n_k} = \eta_{n_k}$, за теоремою Слуцького для $0 < C < \infty$ отримаємо суперечність з різними граничними розподілами

$$N(0,1) + C \Leftarrow \beta_{n_k} + \Delta_{n_k} = \eta_{n_k} \Rightarrow N(0,1).$$

Якщо $C = \infty$, поділимо рівність на Δ_{n_k} і отримаємо суперечність

$$1 \Leftarrow \frac{\beta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} + 1 = \frac{\eta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} \Rightarrow 0.$$

$\square$

Слід зауважити, що розглянуті раніше приклади показують граничні випадки для виконання теореми. Оскільки теорема є двосторонньою, то асимптотика $\ln A_n$ замість математичного сподівання вичерпується на таких випадках.

4. Закон повторного логарифму. Покажемо спочатку виконання ЗПЛ для справжніх моментів. Знову маємо випадок незалежних випадкових величин.

Теорема 4. *Нехай* $\boldsymbol{D}\mu(n) \to \infty, n \to \infty$. *Тоді:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \boldsymbol{E}\mu(n)}{\sqrt{\boldsymbol{D}\mu(n) \ln\ln \boldsymbol{D}\mu(n)}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \boldsymbol{E}\mu(n)}{\sqrt{\boldsymbol{D}\mu(n) \ln\ln \boldsymbol{D}\mu(n)}} = \sqrt{2} \text{ м.н.}$$

Доведення. З'ясуємо виконання ЗПЛ для $\mu(n)$, перевіривши умови теореми Колмогорова для центрованих індикаторів I_k.

$$\exists\{M_n > 0, n \geq 1\} : M_n = o\left(\sqrt{\frac{\mathbf{D}\mu(n)}{\ln\ln \mathbf{D}\mu(n)}}\right), |I_k - p_k| \leq M_n.$$

Візьмемо $M_n = 2$. Оскільки $\mathbf{D}\mu(n) \to \infty$, то всі умови явно виконуються. $\square$

Теорема 5. *Нехай* $p_n \to 0, A_n \to \infty, n \to \infty$. *Тоді:*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 = o\left(\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = \sqrt{2} \text{ м.н.}$$

Доведення. Доведення достатності, враховуючи знання асимптотики різниці $\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n)$, є прямим переходом до часткових границь під верхніми та нижніми границями, подібно до доведення ЦГТ, навіть без використання результатів по типу теореми Слуцького. Тому наведемо від супротивного доведення необхідності.

Нехай виконуються ЗПЛ для точних моментів за теоремою (4) та з асимптотичними замінами, але не виконується достатня умова. Тоді, будемо мати твердження

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = \sqrt{2} \text{ м.н.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln A_n - \mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = \sqrt{2} \text{ м.н.}$$

І через порушення умови теореми маємо суперечність

$$(0,\infty] \ni \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\ln A_n - \mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} + \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} \right) \leq$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln A_n - \mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln\ln A_n}} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \text{ м.н.}$$

□

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті наведено загальні оцінки на точну асимптотику математичного сподівання рекордів у F^α-схемі та критерій, коли асимптотика виражається максимально просто через накопичену інтенсивність у ЦГТ і ЗПЛ.

Із розглянутих прикладів видно, що можна означити деякий клас монотонних функцій, для яких можна знайти параметри для подальшого вдосконалення результатів, що й буде досліджуватися надалі.

Іншим напрямком може бути дослідження випадку $p_n \to p > 0$, але з попередніх досліджень ефекти випадку $p_n \to 0$ знову будуть мати вирішальний вплив, просто навколо точки $p > 0$.

Список використаної літератури

1. Borovkov K., Pfeifer D. On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 1995. Vol. 45, No. 1–2. P. 65–79.
2. Buldygin V. V., Indlekofer K.-H., Klesov O. I., Steinebach J. Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes. Berlin : Springer Verlag, 2018.
3. Doukhan P., Klesov O. I., Pakes A., Steinebach J. G. Limit theorems for record counts and times in the F^α-scheme *Extremes.* 2013. Vol. 16, No. 2. P. 147–171.
4. Doukhan P., Klesov O. I., Steinebach J. G. Strong laws of large numbers in an F^α-scheme Mathematical Statistics and Limit Theorems : *Festschrift in Honour of Paul Deheuvels.* Springer International Publishing : Switzerland, 2015. P. 287–303.
5. Gut A. Probability: A Graduate Course. Berlin : Springer-Verlag, 2005.
6. Klesov O. I. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. Berlin : Springer Verlag, 2014.
7. Nevzorov V. B. On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI.* 1985. Vol. 142. P. 109–118.
8. Nevzorov V. B. Records: Mathematical Theory. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.

9. Rényi A. A. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations *Combinatorial Methods in Probability Theory* : Math. Inst. Aarhus Univ. Aarhus: Denmark, 1962. P. 10–117.
10. Yang M. On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.* 1975. Vol. 12. P. 148–154.

Kolesnik O. V. Central limit theorem of records and law of the iterated logarithm in an F^α scheme.

The article studies the asymptotic behavior of the number of records in the so-called F^α-scheme, which generalizes the classical statement for the independent identically distributed random variables. Found conditions under which asymptotic theorems can be written in terms of accumulated intensity. The structure of exact asymptotics is shown. Examples that confirm optimality of the results are considered.

Keywords: independent random variables, F^α scheme, records, number of records, central limit theorem, law of the iterated logarithm.

References

1. Borovkov, K., & Pfeifer D. (1995). On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference,* 45(1–2), 65–79.
2. Buldygin, V. V., Indlekofer, K.-H., Klesov, O. I., & Steinebach, J. (2018). *Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes.* Berlin: Springer Verlag.
3. Doukhan, P., Klesov, O. I., Pakes, A., & Steinebach, J. G. (2013). Limit theorems for record counts and times in the F^α-scheme *Extremes,* 16(2), 147–171.
4. Doukhan, P., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2015). Strong laws of large numbers in an F^α-scheme, *Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels.* Springer International Publishing: Switzerland.
5. Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course.* Berlin: Springer-Verlag.
6. Klesov, O. I. (2014). *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables.* Berlin: Springer Verlag.
7. Nevzorov, V. B. (1985). On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI.* 142, 109–118.
8. Nevzorov, V. B. (2001). *Records: Mathematical Theory.* Providence, RI: American Mathematical Society.
9. Rényi, A. A. (1962). Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, *Combinatorial Methods in Probability Theory.* Math. Inst. Aarhus Univ. Aarhus: Denmark.
10. Yang, M. (1975). On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.* 12, 148–154.

Одержано 22.03.2024