УДК 512.544
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).37-45

**І. М. Порохнавець[1], І. В. Шапочка[2]**

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
ivan.porokhnavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3949-9155

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0904-7879

# КЛАСИФІКАЦІЯ НЕІЗОМОРФНИХ ГРУП ДЕЯКОГО КЛАСУ ЧЕРНІКОВСЬКИХ 3-ГРУП

В цій роботі описуються з точністю до ізоморфізму деякі чернікоські 3-групи, що є циклічними розширеннями повних абелевих 3-груп з умовою мінімальності.

Нехай $\mathbb{C}_{3^\infty}$ — адитивна квазіциклічна 3-група, а $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ — зовнішня пряма сума $n$ екземплярів квазіциклічної 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$ для деякого натурального числа $n$. Добре відомо, що група $\operatorname{Aut}\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ ізоморфна повній лінійній групі $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_3)$, де $\mathbb{Z}_3$ — кільце цілих 3-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_3)$ та довільного елемента $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$ через $A(c)$ позначатимемо образ елемента $c$ при автоморфізмі, що відповідає матриці $A$. Нехай $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ — множина всіх твірних елементів групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причому $3a_0 = 0$, $3a_r = a_{r-1}$ для довільного $r \in \mathbb{N}$.

Розглянемо циклічну адитивну групу $H$ порядку 27 з твірним елементом $h$ і деяке матричне зображення $\Gamma$ цієї групи степеня $n$ над кільцем $\mathbb{Z}_3$. Образ будь-якого елемента $h'$ групи $H$ позначатимемо через $\Gamma_{h'}$. Визначимо дію $\cdot$ групи $H$ на групі $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ за правилом $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ для довільних елементів $h' \in H$ і $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$. Підкреслимо, що ядро $\operatorname{Ker}\Gamma$ є підгрупою стабілізатора кожного елемента із $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$. Нескладно переконатися, що множина

$$A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

є підгрупою групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$. Для матричного зображення $\Gamma$ групи $H$ та деякого елемента $c \in A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma)$ побудуємо групу $G(\Gamma, c)$ наступним чином:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{3^\infty}^n,$$

а бінарна операція $+$ задається так

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h,\ \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

де $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, 26\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i + j < 27, \\ 1, & \text{якщо } i + j \geq 27. \end{cases}$$

Відомо, що таким чином побудована група є циклічним розширенням групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ за допомогою групи $H$, а як наслідок, є черніковською 3-групою.

В роботі описані з точністю до ізоморфізму всі черніковські 3-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку 27 і які визначаються матричним $\mathbb{Z}_3$-зображенням [3]

$$\Gamma : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

де $\tilde{\eta}$ — незвідна $\mathbb{Z}_3$-матриця 18-го порядку вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle t \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Ключові слова:** черніковська група, матричне зображення групи, незвідна компонента зображення.

**1. Вступ.** Нехай $H = \langle h \rangle$ — циклічна група 27-го порядку; $\eta$, $\xi$, $\varepsilon$ — первісні корені з 1 відповідно 27-го, 9-го і 3-го степенів; $\mathbb{Z}_3$ — кільце цілих 3-адичних чисел. Розглянемо $\mathbb{Z}_3$-зображення групи $H$ вигляду:

$$\Gamma : h \to \Gamma_h = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $t = \eta - 1$, $u = \xi - 1$. Опишемо всі не ізоморфні розширення групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$, що є розширенням прямої суми 26-ти екземплярів 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, за допомогою групи $H$, і які визначаються зображенням $\Gamma$. Із [1] слідує, що кожне таке розширення цілком визначається елементом $m$ групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{n}$, що задовольняє умові $\Gamma_h(m) = m$.

Надалі всюди через $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... будемо позначати твірні елементи квазіциклічної 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, які задовольняють умовам $3a_0 = 0, 3a_i = a_{i-1}$ $(i = 1,\ 2,\ \dots)$. Якщо $u$ — елемент квазіциклічної 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, то для довільного натурального числа $k$ через $u^{(k)}$ будемо позначати елемент групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{k}$ вигляду

$$\underbrace{(u,\ u,\ \dots\ ,\ u)}_{k \text{ раз}}.$$

**Теорема 1.** *Нехай*

$$m\,(i,j,k) = \left(ka_0 - ja_0,\ ka_0{}^{(8)},\ -ka_0{}^{(9)},\ ja_0 - ia_0,\ ja_0{}^{(2)},\ -ja_0{}^{(3)},\ ia_0,\ -ia_0\right),$$

*де* $i,\ j,\ k = 0,\ 1,\ 2$. *Тоді*

$$A\left(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma\right) = \{m\,(i,j,k) \mid i,j,k = 0,\ 1,\ 2\}.$$

***Доведення.*** За означенням групи $A\,(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma)$ ця група складається з усіх таких елементів $m \in \mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$, що

$$\Gamma_h\,(m) = m. \tag{2}$$

Нехай $m = (x, y, z)$, де

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{18}) \in \mathbb{C}_{3^\infty}^{18}, \quad x_1, x_2, \dots, x_{18} \in \mathbb{C}_{3^\infty},$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_6) \in \mathbb{C}_{3^\infty}^6, \quad y_1, y_2, \dots, y_6 \in \mathbb{C}_{3^\infty},$$

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_{3^\infty}^2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{3^\infty}.$$

Тоді із (2) слідує, що

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} \cdot z^T = z^T, \\ \tilde{\xi} \cdot y^T + \langle u \rangle \, z^T = y^T, \\ \tilde{\eta} \cdot x^T + \langle t \rangle \, y^T = x^T, \end{cases} \tag{3}$$

де $x^T$, $y^T$, $z^T$ — вектор-стовпці, одержані транспонуванням відповідно вектор-рядків $x$, $y$, $z$.

Із першого рівняння системи (3) одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -z_2 = z_1, \\ z_1 - z_2 = z_2. \end{cases}$$

Звідси

$$z = (ia_0, \ -ia_0)\,, \quad i \in \{0, \ 1, \ 2\}\,.$$

Аналогічно, із другого рівняння системи (3) одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ia_0 \\ -ia_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_6 = ia_0, \\ y_1 - y_2 = -ia_0, \\ y_2 - y_3 = 0, \\ y_3 - y_4 - y_6 = 0, \\ y_4 - y_5 = 0, \\ y_5 - y_6 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$y = \left(ja_0 - ia_0, \ ja_0{}^{(2)}, \ -ja_0{}^{(3)}\right), \quad j \in \{0, \ 1, \ 2\}\,.$$

Нарешті, із третього рівняння системи (3) будемо мати:

$$\begin{cases} -x_1 - x_{18} = ja_0, \\ x_1 - x_2 = -ja_0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ \vdots \\ x_8 - x_9 = 0, \\ x_9 - x_{10} - x_{18} = 0, \\ x_{10} - x_{11} = 0, \\ \vdots \\ x_{16} - x_{17} = 0, \\ x_{17} - x_{18} = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає наступне

$$x_{10} = x_{11} = x_{12} = \ldots = x_{18}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = x_9,$$

$$x_{18} = -ka_0, \quad x_9 = 2x_{18} = ka_0, \quad x_1 = ka_0 - ja_0.$$

Далі матимемо, що

$$x = \left(ka_0 - ja_0,\ ka_0{}^{(8)},\ -ka_0{}^{(9)}\right), \quad k \in \{0,\ 1,\ 2\}.$$

Теорема доведена.

**Наслідок 1.** *Існує 27 нееквівалентних розширень групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$ за допомогою циклічної групи $H = \langle h \rangle$ 27-го порядку, що визначаються зображенням*

$$\Gamma : h \to \Gamma_h = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

***Доведення.*** Очевидно

$$B\left(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma\right) = \left\{\left(E + \Gamma_h + \ldots + \Gamma_h^{26}\right)(m) \ \mid m \in \mathbb{C}_{3^\infty}^{26}\right\} = 0.$$

Тому $A\left(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma\right) / B\left(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma\right) \cong A\left(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma\right)$. Оскільки

$$\left|A\left(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma\right)\right| = 27,$$

то наслідок доведено.

**Теорема 2.** *Нехай $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$ — пряма сума 26-ти екземплярів квазіциклічної 3-групи*

$$\mathbb{C}_{3^\infty} = \langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \mid 3a_0 = 0,\ 3a_i = a_{i-1}, \quad i \in \mathbb{N} \rangle;$$

*$H = \langle h \rangle$ — циклічна група 27-го порядку;*

$$\Gamma : h \to \Gamma_h = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

*— матричне $\mathbb{Z}_3$-зображення групи $H$, де $\eta$, $\xi$, $\varepsilon$ — первісні корені з 1 відповідно 27-го, 9-го і 3-го степенів, $t = \eta - 1$, $u = \xi - 1$ Далі нехай*

$$m\,(i,j,k) = (ju + km_\eta,\ jm_\xi + iv,\ im_\varepsilon)\,, \tag{4}$$

*де*

$$m_\eta = \left(a_0^{(9)},\ -a_0^{(9)}\right), \quad m_\xi = \left(a_0^{(3)},\ -a_0^{(3)}\right), \quad m_\varepsilon = (a_0,\ -a_0)\,,$$

$$u = \left(-a_0,\ 0^{(17)}\right), \quad v = \left(-a_0,\ 0^{(5)}\right), \quad i,\ j,\ k \in \{0,\ 1,\ 2\}\,.$$

*Всі неізомрфні розширення групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$ за допомогою групи $H$, що визначаються зображенням $\Gamma$ вичерпуються наступними групами:*

$$G\,(\Gamma, m(0,0,0))\,, \quad G\,(\Gamma, m(1,0,0))\,, \quad G\,(\Gamma, m(0,1,0))\,, \quad G\,(\Gamma, m(0,0,1))\,.$$

***Доведення.*** Нехай виконуються умови теореми. Спочатку покажемо, що серед вказаних груп: $G\,(\Gamma, m(0,0,0))$, $G\,(\Gamma, m(1,0,0))$, $G\,(\Gamma, m(0,1,0))$, $G\,(\Gamma, m(0,0,1))$ немає попарно ізоморфних.

Доведемо, що група $G\,(\Gamma, m(0,0,1))$ не є ізоморфною групі $G\,(\Gamma, m(1,0,0))$. Припустимо протилежне, нехай $G\,(\Gamma, m(0,0,1)) \cong G\,(\Gamma, m(1,0,0))$. Тоді за теоремою 2 існує оборотна матриця $C \in GL\,(26, \mathbb{Z}_3)$ і натуральне число $r$, що не ділиться на 3, що

$$C\Gamma\,(h)\,C^{-1} = \Gamma\,(h)^r \tag{5}$$

і

$$Cm(0,0,1) = rm(1,0,0) \tag{6}$$

Із рівності (5) випливає, що матриця $C$ має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}$$

де $C_{11}$, $C_{22}$, $C_{33}$ — оборотні матриці над $\mathbb{Z}_3$ відповідно порядків 18, 6, 2, а $C_{12}$, $C_{13}$, $C_{23}$ — відповідно $18 \times 6$-, $18 \times 2$- та $6 \times 2$-матриці над $\mathbb{Z}_3$. Тоді рівність (6), враховуючи позначення (4), перепишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ rv \\ rm_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Це б означало, що

$$C_{11}m_\eta = 0, \quad 0 = rv, \quad 0 = rm_\varepsilon.$$

Останнє неможливо, тому група $G\,(\Gamma, m(0,0,1))$ не ізоморфна групі $G\,(\Gamma, m(1,0,0))$. Аналогічно доводиться, що групи, перераховані в теоремі, попарно неізоморфні.

Тепер покажемо, що всі інші групи, що є розширенням групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$ за допомогою групи $H$, що визначаються зображенням $\Gamma$, крім тих, що фігурують в теоремі попарно ізоморфні.

Розглянемо матрицю $C$, вигляду

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & X & Z \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & Y \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix},$$

де $\Theta_1 \in \mathbb{Z}_3[\eta]$, $\Theta_2 \in \mathbb{Z}_3[\xi]$, $\Theta_1 \in \mathbb{Z}_3[\varepsilon]$,
$X$, $Y$, $Z$ — відповідно $18 \times 6$-, $18 \times 2$-, $6 \times 2$- матриці такі, що

$$\tilde{\eta}X + \langle t \rangle \tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Theta}_1 \langle t \rangle + X\tilde{\xi},$$

$$\tilde{\xi}Y + \langle u \rangle \tilde{\Theta}_3 = \tilde{\Theta}_2 \langle u \rangle + Y\tilde{\varepsilon},$$

$$\tilde{\eta}Z + \langle t \rangle Y = X \langle u \rangle + Z\tilde{\varepsilon}. \tag{7}$$

Матриці $X$ і $Y$ можна подати у вигляді:

$$X = X' + X'', \quad Y = Y' + Y'',$$

де

$$\tilde{\eta}X' + \langle t \rangle \tilde{\Theta}_2 = \langle t\Theta_2' \rangle + X'\tilde{\xi},$$

$$\tilde{\xi}Y' + \langle u \rangle \tilde{\Theta}_3 = \langle u\Theta_3' \rangle + Y'\tilde{\varepsilon}.$$

Тоді

$$\tilde{\eta}X'' + \langle \Theta_2' t \rangle = \langle \Theta_1 t \rangle + X''\tilde{\xi},$$

$$\tilde{\xi}Y'' + \langle \Theta_3' u \rangle = \langle \Theta_2 u \rangle + Y''\tilde{\varepsilon}.$$

Звідси $X'' = \langle\langle x'' \rangle\rangle$ — матриця, перший стовпець якої складається з координат елемента $x'' \in \mathbb{Z}_3[\eta]$ у $\mathbb{Z}_3$-базисі $1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{17}$ кільця $\mathbb{Z}_3[\eta]$, другий — з координат елемента $x''\eta$, третій —$x''\eta^2$, четвертий — $x''\eta^3$, п'ятий — $x''\eta^4$, шостий — $x''\eta^5$.

$Y'' = \langle\langle y'' \rangle\rangle$ — матриця, перший стовпець якої складається з координат елемента $y'' \in \mathbb{Z}_3[\xi]$ у $\mathbb{Z}_3$-базисі $1, \xi, \ldots, \xi^5$ кільця $\mathbb{Z}_3[\xi]$, другий — з координат елемента $y''\xi$.

$$(\Theta_2' - \Theta_1)\, t = x''\Phi_9(\eta),$$

$$(\Theta_3' - \Theta_2)\, u = y''\Phi_3(\xi).$$

Таким чином

$$\Theta_2 = \Theta_3' - y''\frac{\Phi_3(\xi)}{u},$$

$$\Theta_1 = \Theta_2' - x''\frac{\Phi_9(\eta)}{t}.$$

$z_1$, $z_2$ — елементи кільця $\mathbb{Z}_3[\eta]$, координати яких у базисі $1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{17}$ співпадають відповідно з елементами першого і другого стовпців матриці $Z$.

З рівності (7) маємо

$$\eta z_1 - z_2 = y_5(\eta - 1),$$

$$z_1 + (\eta + 1)\, z_2 = x''(1 - \eta) + (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5)(\eta - 1),$$

$$y_j \in \mathbb{Z}_3, \quad j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Звідси

$$z_2 = \eta z_1 - y_5 t,$$

$$x'' = -z_1 \frac{\Phi_3(\eta)}{t} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\eta.$$

Отже,

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & X & Z \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & Y \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де $\Theta_3 \in \mathbb{Z}_3[\varepsilon]$, $y'' \in \mathbb{Z}_3[\xi]$, $z_1 \in \mathbb{Z}_3[\eta]$, а все інше визначається за допомогою вище вказаних рівностей.

Тоді легко бачити, що виконується рівність $C\Gamma(h)\,C^{-1} = \Gamma(h)$.

Розглянемо тепер матрицю $C_1$, вигляду (8), що визначається елементами $\Theta_3 = \varepsilon$, $z_1 = 1+\eta^2$, $y'' = 1+\xi^3$. Очевидно, що для матриці $C_1$ має місце рівність

$$C_1\Gamma(h)\,{C_1}^{-1} = \Gamma(h).$$

Крім того

$$C_1(m(0,1,0)) = m(0,1,2), \quad C_1(m(0,1,2)) = m(0,1,1),$$

$$C_1(m(0,1,1)) = m(0,1,0).$$

Отже, за теоремою 2, одержуємо

$$G(\Gamma, m(0,1,0)) \cong G(\Gamma, m(0,1,1)) \cong G(\Gamma, m(0,1,2)).$$

Аналогічно, використовуючи матрицю $C_1$, можна показати, що

$$G(\Gamma, m(1,0,0)) \cong G(\Gamma, m(1,2,2)) \cong G(\Gamma, m(1,1,2)),$$

$$G(\Gamma, m(1,0,1)) \cong G(\Gamma, m(1,1,0)) \cong G(\Gamma, m(1,2,0)),$$

$$G(\Gamma, m(1,0,2)) \cong G(\Gamma, m(1,1,1)) \cong G(\Gamma, m(1,2,1)).$$

Також неважко бачити, що за допомогою матриці $C_2$, вигляду (8), що визначається елементами $\Theta_3 = 1+\varepsilon$, $z_1 = 1+\eta+\eta^2+\eta^3$, $y'' = 1+\xi$, ми одержимо

$$G(\Gamma, m(1,0,0)) \cong G(\Gamma, m(1,0,1)) \cong G(\Gamma, m(1,0,2)).$$

Тепер розглянемо скалярну матрицю $T$, 26-го порядку з елементом 2 на діагоналі. За допомогою цієї матриці, використовуючи теорему 2, легко показати, що

$$G(\Gamma, m(0,0,2)) \cong G(\Gamma, m(0,0,1)),\ G(\Gamma, m(0,2,0)) \cong G(\Gamma, m(0,1,0)),$$

$$G(\Gamma, m(0,2,1)) \cong G(\Gamma, m(0,1,2)),\ G(\Gamma, m(0,2,2)) \cong G(\Gamma, m(0,1,1)),$$

$$G(\Gamma, m(2,0,0)) \cong G(\Gamma, m(1,0,0)),\ G(\Gamma, m(2,0,1)) \cong G(\Gamma, m(1,0,2)),$$

$$G(\Gamma, m(2,0,2)) \cong G(\Gamma, m(1,0,1)),\ G(\Gamma, m(2,1,0)) \cong G(\Gamma, m(1,2,0)),$$

$$G(\Gamma, m(2,1,1)) \cong G(\Gamma, m(1,2,2)),\ G(\Gamma, m(2,1,2)) \cong G(\Gamma, m(1,2,1)),$$

$$G\left(\Gamma, m(2,2,0)\right) \cong G\left(\Gamma, m(1,1,0)\right), \; G\left(\Gamma, m(2,2,1)\right) \cong G\left(\Gamma, m(1,1,2)\right),$$

$$G\left(\Gamma, m(2,2,2)\right) \cong G\left(\Gamma, m(1,1,1)\right).$$

Таким чином ми одержали, що всі інші групи, що є розширенням групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$ за допомогою групи $H$, що визначаються зображенням $\Gamma$, крім тих, що фігурують в теоремі попарно ізоморфні. Теорема доведена.

**Список використаної літератури**


1. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские $p$-группы и целочисленные $p$-адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753.
2. Гудивок П. М., Шапочка И. В. О черниковских $p$-группах. *Укр. мат. журн.* 1999. Т. 51, № 3. С. 291–304.
3. Гудивок П. М., Рудько В. П. Про $p$-адичні цілочислові зображення циклічної $p$-групи. *Допов. АН УРСР.* 1966. № 9. С. 1111–1113.


**Porokhnavets I. M., Shapochka I. V.** Classification of non-isomorphic groups of a certain class of Chernikov 3-groups.


In this paper, some Chernikosh 3-groups, which are cyclic extensions of divisible Abelian 3-groups with the minimality condition, are described with accuracy up to isomorphism.

Let $\mathbb{C}_{3^\infty}$ be an additive quasicyclic 3-group, and let $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ be an external direct sum $n$ instances of the quasicyclic 3-group $\mathbb{C}_{3^\infty}$ for some positive integer $n$. It is well known that the group $\operatorname{Aut}\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ isomorphic to the complete linear group $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_3)$, where $\mathbb{Z}_3$ the ring of 3-adic integers. Therefore, in the future for an arbitrary matrix $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_3)$ and an arbitrary element $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$ through $A(c)$ denote the image of the element $c$ in the automorphism that corresponds to the matrix $A$. Let $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ be the set of all generators of the group $\mathbb{C}_{3^\infty}$, where $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $3a_0 = 0$, $3a_r = a_{r-1}$ for all $r \in \mathbb{N}$.

Consider a cyclic additive group $H$ of order 27 with a generating element $h$ and some matrix image $\Gamma$ of this group of degree $n$ over the ring $\mathbb{Z}_3$. The image of any element $h'$ of the group $H$ is denoted by $\Gamma_{h'}$. Determine the action $\cdot$ of the group $H$ on the group $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ by the rule $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ for arbitrary elements $h' \in H$ and $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$. We emphasize that the kernel $\operatorname{Ker}\Gamma$ is a subgroup of the stabilizer of each element with $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$. It is easy to see that the set

$$A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

is a subgroup of $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$. For the matrix image $\Gamma$ of the group $H$ and some element $c \in A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma)$ we construct the group $G(\Gamma, c)$ as follows:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{3^\infty}^n,$$

and the binary operation $+$ is set as follows

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h,\; \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

where $i$, $j \in \{0, 1, \ldots, 26\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{if } \; i+j < 27, \\ 1, & \text{if } \; i+j \geq 27. \end{cases}$$

Paper deals with the classification up to isomorphism of all Chernikov 3-groups quotient group of which by maximal divisible Abelian subgroup is a the cyclic group of the order 27 and which determined by the matrix $\mathbb{Z}_3$-representation [3]

$$\Gamma : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

where $\tilde{\eta}$ is the irreducible $\mathbb{Z}_3$-matrix of the order 18 of type

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle t \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Keywords:** Chernikov group, matrix representation of group, irreducible component of representation.

## References

1. Gudivok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov $p$-groups and integer $p$-adic representations of finite groups. *Ukr. Mat. J.,* 44(6), 742–753.
2. Gudivok, P. M., & Shapochka, I. V. (1999). On the Chernikov $p$-groups. *Ukr. Mat. J.,* 51(3), 291–304.
3. Gudivok, P. M., & Rud'ko, V. P. (1966). On $p$-adic integral representations of the cyclic $p$-group. *Dopovidi Akad. Nauk URSR,* 9, 1111–1113.

Одержано 04.04.2024