УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).83-92

Ю. П. Глухов[1], С. Ю. Бабич[2], М. М. Маляр[3], Ю. Ю. Млавець[4]

[1] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6328-5993

[2] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2642-9115

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор технічних наук
mykola.malyar@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2544-1959

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ТА ЗАХИСНИМ ПОКРИТТЯМ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В роботі з використанням комплексних потенціалів в загальній формі для нестисливих пружних тіл дана постановка і приведений розв'язок двовимірної задачі про дію рухомого навантаження на вільну поверхню попередньо напруженого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Ключові слова: шаруватий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, комплексні потенціали.

1. Вступ. В даній статті розглянута задача про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Розв'язок задачі отримано за допомогою методу комплексних потенціалів. Аналогічна задача досліджена з використанням методу інтегральних перетворень Фур'є в роботі [1].

При відсутності шару точний розв'язок задачі про реакцію на рухоме навантаження півпростору з початковими напруженнями з використанням комплексних потенціалів було отримано в [2]. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі при дії рухомого навантаження розглядалася в роботі [5].

2. Постановка задачі. Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Матеріал півпростору — ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного матеріалу будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей, вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули

$$u_j^0 = \delta_{mj}\left(\lambda_m - 1\right) x_m; \quad m, j = \overline{1,3}, \tag{1}$$

де λ_j — подовження ($\lambda_j = const;\ j = \overline{1,3}$), δ_{mj} — символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \quad \sigma_{22}^0 \neq 0; \quad \sigma_{33}^0 \neq 0. \tag{2}$$

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат ($\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$), які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами ($x_1,\ x_2,\ x_3$), що вводяться в природному стані, співвідношеннями

$$\xi_j = \lambda_j x_j. \tag{3}$$

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площина $\xi_1 O \xi_3$ співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область $-h \leq \xi_2 \leq 0$, а півпростір — область $\xi_2 + h \leq 0$.

До вільної границі шару ($\xi_2 = 0$) прикладено лінійне навантаження P, що рухається з постійною швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3.

Визначимо координати рухомої системи наступним чином

$$y_1 = \xi_1 - \mathrm{v}t; \quad y_2 = \xi_2. \tag{4}$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [2] для опису додаткового напруженного стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1.

Рівняння руху нестисливого півпростору в умовах плоскої деформації при $\xi_2 + h \leq 0$ мають вигляд [2]

$$N_{11}u_1 + N_{12}u_2 + N_{13}p = 0; \quad N_{21}u_1 + N_{22}u_2 + N_{23}p = 0; \quad N_{31}u_1 + N_{32}u_2 = 0. \tag{5}$$

У рухомій системі координат (3) диференціальні оператори в виразах (5) мають вигляд

$$N_{m\alpha} = \tilde{\kappa}_{im\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \tilde{\rho}\mathrm{v}^2\delta_{m\alpha}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}; \quad i, m, \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$N_{13} \equiv N_{31} = \tilde{q}_{11}\frac{\partial}{\partial y_1}; \quad N_{23} \equiv N_{32} = \tilde{q}_{22}\frac{\partial}{\partial y_2}. \tag{6}$$

Розглянемо два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$: жорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = P_1 (y_1) + h\rho_1 \ddot{u}_1; \qquad \tilde{Q}_{22} = P_2 (y_1) + h\rho_1 \ddot{u}_2; \tag{7}$$

і нежорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \qquad \tilde{Q}_{22} = P_2 (y_1) + h\rho_1 \ddot{u}_2. \tag{8}$$

Тут $P_1 (y_1)$, $P_2 (y_1)$ — відповідно дотичні та нормальні напруження на вільній поверхні шаруватого півпростору.

При вказаних вище умовах маємо плоску усталену задачу, що полягає у розв'язку рівнянь руху (5) з позначенням (6) відповідно при граничних умовах (7) або (8) і умові загасання на нескінченності.

Запишемо постановку задачі в комплексних потенціалах.

Враховуючи позначення (6), рівняння усталеного руху півпростору можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2; \tag{9}$$

де величини μ_1 і μ_2 — корені рівняння

$$\mu^4 + 2A\mu^2 + A_1 = 0. \tag{10}$$

Коефіцієнти A и A_1 у випадку нестисливого тіла визначаються із співвідношень

$$\begin{gathered} 2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2\left(\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{\rho}\mathrm{v}^2\right) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}\left(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}\right); \\ 2A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\left(\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho}\mathrm{v}^2\right); \qquad \tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i q_i; \qquad \tilde{\rho} = \rho; \end{gathered} \tag{11}$$

ρ — густина матеріалу півпростору в природному стані. Складові тензора $\tilde{\kappa}$ і величини q_i визначаються для конкретних постановок задач [2].

Введемо наступні комплексні змінні

$$z_j = y_1 + \mu_j(y_2 + h); \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\mu}_j(y_2 + h); \quad j = 1, 2. \tag{12}$$

Враховуючи (12), рівняння руху для півпростору (9) в рухомій системі координат (4) через функції $\chi^{(j)}$ можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^4\chi^{(j)}}{\partial z_1\partial z_2\partial\bar{z}_1\partial\bar{z}_2} = 0; \quad j = 1, 2. \tag{13}$$

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (10).

Рівні корені. Нехай виконується умова

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu. \tag{14}$$

Загальний розв'язок рівняння (13) представимо у вигляді

$$\chi^{(j)} = \mathrm{Re}\left[F_1^{(j)}(z_1) + \bar{z}_1 F_2^{(j)}(z_1)\right]. \tag{15}$$

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j^{(1)'}(z_1) = \mu_1 \phi_j(z_1); \quad F_j^{(2)'}(z_1) = \phi_j(z_1); \quad j = 1, 2. \tag{16}$$

Підставимо (15) у вирази для переміщень і співвідношення пружності з врахуванням (16) і отримаємо представлення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\phi_j(z_1)$ $(j = 1, 2)$

$$\tilde{Q}_{kj} = \mathrm{Re}\left\{\gamma_{kj}^{(1)}\left[\phi_1''(z_1) + \bar{z}_1\phi_2''(z_1)\right] + \gamma_{kj}^{(2)}\phi_2'(z_1)\right\};$$

$$u_k = \mathrm{Re}\left\{\gamma_k^{(1)}\left[\phi_1'(z_1) + \bar{z}_1\phi_2'(z_1)\right] + \gamma_k^{(2)}\phi_2(z_1)\right\}; \tag{17}$$

де

$$\gamma_{ii}^{(1)} = \alpha_{ii}^{(12)} + \mu_1^2\left(\alpha_{ii}^{(11)} + \alpha_{ii}^{(22)} + \mu_1^2\alpha_{ii}^{(21)}\right);$$

$$\gamma_{ii}^{(2)} = 3\alpha_{ii}^{(12)} + \mu_1^2\left(\alpha_{ii}^{(11)} - \alpha_{ii}^{(22)} - 3\mu_1^2\alpha_{ii}^{(21)}\right);$$

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \mu_1\left[\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} + \mu_1^2\left(\alpha_{ij}^{(21)} + \alpha_{ij}^{(22)}\right)\right];$$

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \mu_1\left[3\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} - \mu_1^2\left(\alpha_{ij}^{(21)} + 3\alpha_{ij}^{(22)}\right)\right];$$

$$\gamma_1^{(1)} = \beta_{11}^{(2)} + \mu_1^2\left(\beta_{12}^{(2)} - \beta_{11}^{(1)}\right); \quad \gamma_1^{(2)} = 2\left(\beta_{11}^{(2)} - \mu_1^2\beta_{12}^{(2)}\right);$$

$$\gamma_2^{(1)} = \mu_1\left(\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)} + \mu_1^2\beta_{22}^{(1)}\right);$$

$$\gamma_2^{(2)} = 2\mu_1\left(\beta_{21}^{(1)} - \mu_1^2\beta_{22}^{(1)}\right); \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \tag{18}$$

Параметри $\alpha_{ij}^{(kn)}$ і $\beta_{ij}^{(k)}$ в співвідношеннях (18) у випадку нестисливих тіл визначаються по формулам

$$\alpha_{ii}^{(kn)} = \tilde{q}_{ii}\tilde{q}_{nn}^{-2}\left(\tilde{\kappa}_{knnk} - \delta_{n2}\tilde{\rho}\mathrm{v}^2\right);$$

$$\alpha_{ii}^{(kk)} = \tilde{\kappa}_{iinn}\tilde{q}_{nn}^{-1} - \tilde{\kappa}_{iikk}\tilde{q}_{kk}^{-1} + \tilde{q}_{ii}\tilde{q}_{kk}^{-2}\left[\tilde{\kappa}_{kkkk} - \tilde{\rho}\mathrm{v}^2 - \tilde{q}_{kk}\tilde{q}_{nn}^{-1}\left(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}\right)\right];$$

$$\alpha_{ij}^{(kn)} = -\tilde{\kappa}_{ijnk}\tilde{q}_{nn}^{-1}; \quad \alpha_{ij}^{(kk)} = \tilde{\kappa}_{ijnk}\tilde{q}_{nn}^{-1}; \quad i, j, n, k = 1, 2; \quad i \neq j; \quad n \neq k;$$

$$\beta_{12}^{(2)} = \beta_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \beta_{21}^{(2)} = \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_{11}^{(2)} = \beta_{22}^{(1)} = 0. \tag{19}$$

Використовуючи (15) з урахуванням (16) граничні умови при $y_2 = -h$ для жорсткого контакту (7) можна записати у вигляді

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \left(\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}\right)\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = P_1(y_1);$$
$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \left(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}\right)\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = P_2(y_1); \tag{20}$$

а для нежорсткого контакту (8) — у вигляді

$$\mathrm{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1)\right] = 0;$$

$$\mathrm{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1\left(y_1\right)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2\left(y_1\right)-\rho_1 h v^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'\left(y_1\right)+\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\Phi_2'\left(y_1\right)\right]\right\}=P_1\left(y_1\right). \tag{21}$$

В системах рівнянь (20) і (21) введені нові аналітичні функції

$$\Phi_1\left(y_1\right)=\phi_1''(y_1)+y_1\phi_2''(y_1);\qquad \Phi_2\left(y_1\right)=\phi_2'(y_1). \tag{22}$$

Коефіцієнти $\gamma_i^{(j)}$ і $\gamma_{ik}^{(j)}$ $(i,j,k=1,2,3)$ в системах рівнянь (20) і (21) для нестисливого півпростору визначаються із співвідношень (18) при позначення (19).

Таким чином, задача про усталений рух попередньо напруженого нестисливого півпростору, захищеного пружнім шаром, у випадку рівних коренів рівняння (10) зводиться до знаходження функцій ϕ_j $(j=1,2)$ із систем рівнянь (20), (22) або (21), (22) в залежности від умов контакту між елементами шаруватого середовища.

Нерівні корені. Розглянемо випадок нерівних коренів

$$\mu_1\neq\mu_2. \tag{23}$$

Розв'язок рівнянь (13) представимо у вигляді

$$\chi=2Re\left[F_1(z_1)+F_2(z_2)\right], \tag{24}$$

де $F_j(z_j)$ — довільні аналітичні функції комплексних змінних z_j.

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j''(z_j)=\Phi_j(z_j). \tag{25}$$

Підставляючи (24) у вирази для переміщень і потім у співвідношення пружності, з урахуванням (25), отримуємо вирази напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\Phi_j(z_j)$ комплексних змінних z_j (12).

$$\tilde{Q}_{ij}=2\mathrm{Re}\left[\gamma_{ij}^{(1)}\Phi_1'(z_1)+\gamma_{ij}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];$$

$$u_k=2\mathrm{Re}\left[\gamma_k^{(1)}\Phi_1(z_1)+\gamma_k^{(2)}\Phi_2(z_2)\right];\quad i,j,k=1,2. \tag{26}$$

В (26) введені наступні позначення для коефіцієнтів, які входять в вирази для напружень і переміщень,

$$\gamma_{jj}^{(k)}=\mu_k(\alpha_{jj}^{(1)}+\mu_k^2\alpha_{jj}^{(2)});\quad \gamma_{ij}^{(k)}=\alpha_{ij}^{(1)}+\mu_k^2\alpha_{ij}^{(2)};$$

$$\gamma_1^{(j)}=-\mu_j;\quad \gamma_2^{(j)}=\beta_1+\mu_j^2\beta_2;\quad i,j,k=1,2;\quad i\neq j; \tag{27}$$

де параметри β_j і $\alpha_{ij}^{(k)}$ у випадку нестисливих тіл визначаються по формулам

$$\alpha_{ii}^{(1)}=\tilde{q}_{ii}\tilde{q}_{11}^{-1}\left[\tilde{\kappa}_{1111}-\tilde{\rho}\mathrm{v}^2-\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}^{-1}\left(\tilde{\kappa}_{1122}+\tilde{\kappa}_{1212}\right)\right]-\tilde{\kappa}_{ii11}+\tilde{\kappa}_{ii22}\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}^{-1};$$

$$\alpha_{ii}^{(2)}=\tilde{q}_{ii}\tilde{q}_{11}^{-1}\tilde{\kappa}_{2112};\quad \alpha_{ij}^{(2)}=\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}^{-1}\tilde{\kappa}_{ij21};$$

$$\alpha_{ij}^{(2)}=-\tilde{\kappa}_{ij12};\qquad i\neq j;\quad \beta_1=\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}^{-1};\qquad \beta_2\equiv 0. \tag{28}$$

Використовуючи комплексні потенціали, запишемо граничні умови для даної задачі при $y_2 = -h$. Будемо розглядати, як і раніше, жорсткий та нежорсткий контакти між захисним шаром і півпростором. Із (7), (8) і (26) при $y_2 = -h$ маємо:

1) жорсткий контакт

$$2\mathrm{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1) + \rho_1 h v^2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_1^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = P_1(y_1);$$

$$2\mathrm{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = P_2(y_1); \quad (29)$$

2) нежорсткий контакт

$$\mathrm{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1)\right] = 0;$$

$$2\mathrm{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = P_2(y_1). \quad (30)$$

В системах рівнянь (29) і (30) параметри $\gamma_i^{(j)}$, $\gamma_{ik}^{(j)}$ $(i, j, k = 1, 2)$ визначаються із співвідношень (27) з врахуванням (28).

Таким чином, розв'язок поставленої задачі в випадку нерівних коренів рівняння (10) можна отримати, розв'язуючи відносно функцій Φ_j $(j = 1, 2)$ системи рівнянь (29) і (30) при жорсткому і нежорсткому контакті між захисним шаром і півпростором відповідно.

3. Метод розв'язку задачі. Отримаємо розв'язок задачі про усталений рух попередньо напруженого півпростору із захисним покриттям при дії рухомого навантаження. Для цього застосуємо метод М. І. Мусхелішвілі [4], оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. Відповідно до [4], для довільної голоморфної в нижній півплощині $y_2 + h < 0$ функції $f(z)$, яка неперервна до границі включно, справедливі наступні співвідношення

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y_1)dy_1}{y_1 - z} = -f(z) + \frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{f}(y_1)dy_1}{y_1 - z} = -\frac{1}{2}\bar{a}, \quad (31)$$

де

$$z = y_1 + i(y_2 + h). \quad (32)$$

В (31) вважалось, що функцію $f(y_1)$ при великих $|y_1|$ можна представити у вигляді

$$f(y_1) = a + o(|y_1|^{-\varepsilon}) = f(\infty) + o(|y_1|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon = const > 0. \quad (33)$$

Враховуючи викладене, перейдемо до дослідження задачі в площині y_1Oy_2.

Відносно поведінки комплексних потенціалів $\Phi_j(z_j)$, $\phi_j(z_1)$ на нескінченності приймемо такі ж обмеження, як і в лінійній теорії пружності [3, 4].

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (10).

Рівні корені. Розглянемо випадок рівних коренів (14). В цьому випадку задача зводиться до визначення аналітичних функцій ϕ_j із рівнянь (20), (22) або (21), (22) (в залежності від умов контакту).

Використовуючи рівняння (20) і формули (31) і (33), у випадку жорсткого контакту між захисним шаром і півпростором маємо

$$\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z)-\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(z)+\left(\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\right)\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_1dy_1}{y_1-z};$$

$$\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z)-\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z)+\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_2dy_1}{y_1-z}, \tag{34}$$

а при нежорсткому контакті рівняння (21) із врахуванням (31) і (33) будуть мати вигляд

$$\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z)=0;$$

$$\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z)-\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z)+\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_2dy_1}{y_1-z}. \tag{35}$$

Системи рівнянь (34) і (35) неважко привести до вигляду

$$L[\Phi_j(z)]=f_j(z);\quad j=1,2; \tag{36}$$

де диференціальний оператор L і функції f_j $(j=1,2)$ визначаються у випадку жорсткого контакту по формулам

$$\begin{aligned}L=\rho_1^2h^2\mathrm{v}^4\left(\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}-\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\\ +\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_1^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}-\gamma_2^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}+\gamma_{21}^{(1)}\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)-\right.\\ \left.-\left(\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\right)\gamma_{22}^{(1)}\right]\frac{d}{dz}+\left(\gamma_{21}^{(2)}\gamma_{22}^{(1)}-\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}\right);\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}f_1(z)=\frac{1}{i\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_{22}^{(2)}P_1(y_1)-\gamma_{21}^{(2)}P_2(y_1)}{y_1-z}dy_1+\right.\\ \left.+\rho_1 h\mathrm{v}^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)P(y_1)_1-\left(\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\right)P_2(y_1)\right]}{(y_1-z)^2}dy_1\right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(z)=-\frac{1}{i\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_{22}^{(1)}P_1(y_1)-\gamma_{21}^{(1)}P_2(y_1)}{y_1-z}dy_1+\right.\\ \left.+\rho_1 h\mathrm{v}^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_2^{(1)}P_1(y_1)-\gamma_1^{(1)}P_2(y_1)}{(y_1-z)^2}dy_1\right];\end{aligned} \tag{38}$$

а у випадку нежорсткого контакту по формулам

$$L=\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_2^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}-\gamma_{21}^{(1)}\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\right]\frac{d}{dz}+\left(\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}-\gamma_{21}^{(2)}\gamma_{22}^{(1)}\right); \tag{39}$$

$$f_j(z)=\frac{(-1)^{j+1}}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_{21}^{(m)}P_2dy_1}{y_1-z};\qquad j,m=1,2;\quad j\neq m. \tag{40}$$

Так як при $y_2=-h$, $y_1=z=z_1$, то вирази (36)–(40) також можна розглядати в площині z_1.

Таким чином, для жорсткого і нежорсткого контактів задача при рівних коренях рівняння (10) звелася до розв'язку звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами виду (36) відносно функцій $\Phi_j\ (z_1)\ \ (j=1,2)$ або, відповідно до принятих позначень (22), функцій $\phi_1''(z_1)+$ $+z_1\phi_2''(z_1)$ і $\phi_2'(z_1)$. Отримавши функції $\phi_1''(z_1)+z_1\phi_2''(z_1)$ і $\phi_2'(z_1)$, легко визначити функції $\phi_j''(z_1)\ \ (j=1,2)$, а потім напруження і швидкості переміщень у півпросторі (перемещіння в даному випадку визначаються з точністю до довільної константи), використовуючи формули (17).

Більш детально аналіз отриманих результатів проведемо для випадку нерівних коренів.

Нерівні корені. Нехай виконується умова (23). До систем рівнянь (29) і (30) застосуємо формули (31) і (33). В результаті при жорсткому контакті між захисним шаром і півпростором отримаємо наступну систему двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $\Phi_j(z)\ \ (j=1,2)$.

$$\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z)+\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_1^{(2)}\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_1(y_1)dy_1}{y_1-z};$$

$$\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z)-\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_2^{(2)}\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_2(y_1)dy_1}{y_1-z}. \tag{41}$$

При нежорсткому контакті аналогічна система диференціальних рівнянь відносно аналітичних функцій $\Phi_j(z)\ \ (j=1,2)$ має вигляд

$$\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z)=0;$$

$$\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z)-\rho_1 h\mathrm{v}^2\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_2^{(2)}\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_2(y_1)dy_1}{y_1-z}. \tag{42}$$

В результаті нескладних перетворень системи диференціальних рівнянь (41) і (42) можна записати в вигляді (36), де при жорсткому контакті

$$\begin{aligned}L=\rho_1^2h^2\mathrm{v}^4\left(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}-\gamma_2^{(1)}\gamma_1^{(2)}\right)\frac{d^2}{dz^2}&+\\ +\rho_1h\mathrm{v}^2\Big[\left(\gamma_1^{(2)}\gamma_{22}^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\gamma_{21}^{(1)}\right)&-\\ -\left(\gamma_1^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}+\gamma_2^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}\right)\Big]\frac{d}{dz}&+\left(\gamma_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}-\gamma_{22}^{(2)}\gamma_{21}^{(1)}\right);\end{aligned} \tag{43}$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j-1}}{2i\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[\gamma_{22}^{(m)}P_1(y_1)-\gamma_{21}^{(m)}P_2(y_1)\right]dy_1}{y_1-z}+\right.$$
$$\left.+\rho_1 h\mathrm{v}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[\gamma_2^{(m)}P_1(y_1)+\gamma_1^{(m)}P_2(y_1)\right]dy_1}{(y_1-z)^2}\right\};$$
$$j,m=1,2;\quad j\neq m; \tag{44}$$

а при нежорсткому контакті

$$L=\rho_1 h\mathrm{v}^2\left(\gamma_2^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}-\gamma_2^{(2)}\gamma_{21}^{(1)}\right)\frac{d}{dz}+\left(\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}-\gamma_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}\right); \tag{45}$$

$$f_j(z)=\frac{(-1)^{j+1}}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_{21}^{(m)}P_2dy_1}{y_1-z};\quad j,m=1,2;\quad j\neq m. \tag{46}$$

Так як при $y_2=-h$, $y_1=z=z_1=z_2$, то вирази (41)–(46) можна розглядати також в площинах z_1 і z_2.

Таким чином, задача у випадку нерівних коренів зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь виду (36) відносно функцій $\Phi_j(z_j)$ $(j=1,2)$ в позначеннях (43), (44) або (45), (46) (в залежності від умов контакту між захисним шаром і основою). Компоненти напружено-деформованого стану півпростору визначаються за допомогою співвідношень (26) та виразів для функцій $\Phi_j'(z_j)$ $(j=1,2)$.

Критичні швидкості руху навантаження повинні визначатися з умов існування дійсних додатніх кратних коренів характеристичного рівняння диференціальних рівнянь (36).

Порівняльний аналіз формул, отриманих в [1], дозволяє стверджувати, що рівняння $\Delta(k)=0$ має ті ж корені, що і характеристичне рівняння диференціальних рівнянь (36).

Отже, застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати, аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є в роботі [1].

4. Висновки. В даній роботі розглянута плоска динамічна задача про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Для розв'язку задачі застосовується метод Мусхелішвілі, оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. При цьому задача зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно невідомих аналітичних функцій. Порядок рівнянь залежить від умов контакту між захисним покриттям і основою.

Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

Застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є.

Список використаної літератури

1. Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Млавец Ю. Ю. Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика».* 2023. Т. 43, № 2. С. 82–95.
2. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев : Наук. думка, 1983. 296 с.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва : Наука, 1977. 416 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 708 с.
5. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Guz A. N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No 5. P. 481–492.

Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Malyar M. M., Mlavets Yu. Yu. Stress-strain state of incompressible half-space with initial stresses and protective coating under the action of a moving load.

In the work with the use of complex potentials in a general form for incompressible elastic bodies, this formulation is given and the solution of the two-dimensional problem of the action of the moving load on the free surface of a prestressed half-space with heterogeneity in the form of a thin surface layer is given.

Keywords: layered half-space, initial (residual) stresses, moving load, complex potentials.

References

1. Glukhov, Yu. P., Babich, S. Yu., & Mlavets, Yu. Yu. (2023). Reaction of Layered Incompressible Half-Space with Initial Stresses to Moving Load. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 43(2), 82–95 [in Ukrainian].
2. Guz, A. N. (1983). *Mechanics of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses.* Kyiv: Nauk. dumka [in Russian].
3. Lekhnitskii, S. G. (1977). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.* Moscow: Nauka [in Russian].
4. Muskhelishvili, N. I. (1966). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.* Moscow: Nauka [in Russian].
5. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Guz, A. N. (2008). Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load. *Int. Appl. Mech.,* 44(5), 481–492.

Одержано 03.01.2024