УДК 519.4
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).29-45

Л. П. Бедратюк

Хмельницький національний університет,
професор кафедри інженерії програмного забезпечення,
доктор фізико-математичних наук, професор
LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6076-5772

СТРУКТУРА $\mathfrak{sl}_2$-МОДУЛІВ НА ДІАГРАМАХ ЮНГА

В роботі встановлено явний вигляд трійки лінійних операторів $(\widehat{D}_-, \widehat{D}_0, \widehat{D}_+)$, які визначають дію алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ на векторному просторі $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ діаграм Юнга, що відповідають розбиттям λ довжини n:

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_-(\lambda) &= -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)),\\
\widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda,\\
\widehat{D}_+(\lambda) &= \nabla_+(\lambda),
\end{aligned}$$

де $\xi_-(\lambda)$ та $\nabla_\pm(\lambda)$ є сумами за всіма можливими діаграмами Юнга, отриманими додаванням або вилученням клітинки $\square$ з відповідної діаграми Юнга. Ідея доведення полягала у введені на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ структури алгебри, ізоморфній алгебрі симетричних многочленів від n змінних; визначення дії $\mathfrak{sl}_2$ на многочленах Шура і в перенесенні цієї дії на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Ключові слова: алгебра Лі $\mathfrak{sl}_2$, зображення алгебри $\mathfrak{sl}_2$, симетричні многочлени, многочлени Шура, діаграми Юнга.

1. Вступ. Нехай $\mathcal{Y}$ — множина всіх фінітних неспадних наборів невід'ємних чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, де $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, а $\mathcal{Y}_n$ — її підмножина яка утворена такими наборами фіксованої довжини n. Такі набори λ називаються розбиттями і геометрично зображуються діаграмами Юнга, див. [1]–[3].

Розглянемо нескінченно вимірний векторний простір $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$, який складається з формальних скінченних сум елементів $\mathcal{Y}$ з раціональними коефіцієнтами. На $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$ можна ввести структуру нескінченно-вимірного зображення комплексної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ яке, у дещо спрощеному вигляді, визначається (див. [4]) такими операторами Керова:

$$\begin{aligned}
U\,\lambda &= \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathcal{Y}} c(\square)\,\mu,\\
L\,\lambda &= \qquad 2|\lambda|\,\delta_\lambda,\\
D\,\lambda &= \sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{Y}} c(\square)\,\mu,
\end{aligned}$$

тобто виконуються такі тотожності

$$[D, U] = L\,, \quad [L, U] = 2U\,, \quad [L, D] = -2D\,.$$

Сумування відбувається за всіма діаграмами Юнга, які отримуються з розбиття λ шляхом додавання, або, відповідно, вилучення клітинки $\square = (i, j)$. Тут

i і j є координатами клітинки, тобто номерами рядка і стовпчика в якому знаходиться $\square$, а $c(\square)$ позначає *контент* цієї клітинки: $c(\square) = j - i$. Більше про оператори Керова та їхнє застосування в [5]. Схожі оператори на диференціальних частково впорядкованих множинах розглядалися в [6].

Позначимо через $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ підпростір в $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$, породжений діаграмами Юнга в яких не більше n рядків. Неважко бачити, що оператор U збільшує кількість рядків діаграми, тому вищезгадані оператори U, L, D уже не визначають $\mathfrak{sl}_2$-дію на $\mathcal{Y}_n$.

Метою даної роботи є знаходження трійки операторів, які визначають $\mathfrak{sl}_2$-дію на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Головна ідея роботи полягає в тому, щоб із простору $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ перейти до ізоморфного йому простору симетричних многочленів від n змінних, з якими працювати технічно простіше.

Нехай Λ_n — алгебра симетричних многочленів від n змінних з раціональними коефіцієнтами. Алгебра Λ_n також є нескінченновимірним векторним простором, базисом якого є многочлени Шура $\boldsymbol{s}_\lambda$ індексовані розбиттями $\lambda \in \mathcal{Y}_n$. Структурні константи $c^\nu_{\lambda\mu}$ алгебри Λ_n називаються *коефіцієнтами Літвулда-Річардсона* і визначають розклад добутку двох многочленів Шура за цим базисом:

$$\boldsymbol{s}_\lambda \boldsymbol{s}_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \boldsymbol{s}_\nu,$$

тут ν пробігає всі розбиття числа $|\lambda| + |\mu|$, $|\lambda| = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$.

Якщо ми визначимо операцію множення на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ за таким правилом

$$\lambda \cdot \mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\nu} v, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathcal{Y}_n,$$

то $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ наділяється структурою комутативної асоціативної алгебри над $\mathbb{Q}$, яка буде ізоморфна алгебрі Λ_n. Образом розбиття λ при цьому ізоморфізмі буде многочлен Шура $\boldsymbol{s}_\lambda$.

Головним результатом статті є наступне твердження

Теорема 1. *Трійка лінійних операторів $(\widehat{D}_-, \widehat{D}_0, D_+)$ на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$, яка так діє на розбиття $\lambda \in \mathcal{Y}_n$*

$$\begin{aligned}
&\widehat{D}_-(\lambda) = -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)),\\
&\widehat{D}_0(\lambda) = 2|\lambda|\lambda,\\
&\widehat{D}_+(\lambda) = \nabla_+(\lambda)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\xi_-(\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{Y}_n} \mu,\\
\nabla_\pm(\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda\pm\square\in\mathcal{Y}_n} c(\square)\,\mu,
\end{aligned}$$

визначає дію алгебри Лі на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Ідея доведення полягає в тому, що спочатку розглядається $\mathfrak{sl}_2$-дія на Λ_n наступними диференціальними операторами

$$
\begin{aligned}
D_+ &= x_1^2\partial_1 + x_2^2\partial_2 + \cdots + x_n^2\partial_n,\\
D_0 &= 2(x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \cdots + x_n\partial_n),\\
D_- &= -(\partial_1 + \partial_2 + \cdots + \partial_n),
\end{aligned}
$$

де $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Далі встановлюється дія цих операторів на многочлени Шура, а саме

$$
\begin{aligned}
D_-(\boldsymbol{s}_\lambda) &= -\sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{Y}_n} (n + c(\square))\boldsymbol{s}_\mu,\\
D_0(\boldsymbol{s}_\lambda) &= 2|\lambda|\boldsymbol{s}_\lambda,\\
D_+(\boldsymbol{s}_\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathcal{Y}_n} c(\square)\boldsymbol{s}_\mu.
\end{aligned}
$$

Використовуючи згаданий ізоморфізм, ця дія переноситься на алгебру $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$, що і дає нам твердження теореми. При цьому на діаграмах Юнга природно виникають редуковані аналоги вже відомих з [5], [6], [7] операторів ξ та Δ на $\mathcal{Y}$.

Зауважимо, що дія оператора D_- на многочлени Шура недавно розглядалася в [8], а в [9] дія D_- узагальнена на косі многочлени Шура.

В розділі 1 дано означення діаграм Юнга та операцій на них. В розділі 2 дано означення алгебри симетричних многочленів Λ_n та наведено стандартні базиси в ній. В розділі 3 розглянута дія алгебри Лі на Λ_n і встановлена дія на базисні елементи та породжуючі функції. В розділі 4 дія з Λ_n з переноситься на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ та встановлені деякі властивості цієї дії. В розділі 5 представлено нові реалізації $\mathfrak{sl}_2$-дії на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, які індукуються $\mathfrak{sl}_2$-діями на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

2. Діаграми Юнга. Дамо означення необхідних понять.

Розбиттям λ числа $m \in \mathbb{N}$ довжини n називається послідовність невід'ємних чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ таких, що $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ і $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = m$. Множину всіх розбиттів довжини не більше n позначимо через $\mathcal{Y}_n$.

Діаграмою Юнга називається набір клітинок на площині, які розміщені в вирівняних за лівим краєм рядках, причому кількість клітинок в кожному рядку нестрого спадає. Всяке розбиття $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ геометрично зображується у вигляді діаграм Юнга, де λ_i кількість клітинок в i-му рядку. Наприклад, діаграми Юнга для розбиттів $(4,4,3,2,2,1)$, (1^6) і (6) мають такий вигляд

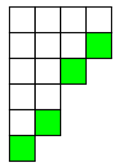
$$\ydiagram{4,4,3,2,2,1}\;,\;\ydiagram{1,1,1,1,1,1}\;,\;\ydiagram{6}\,.$$

Кожна клітинка $\square$ має координати (i,j) на площині, число $c(\square) = j - i$ називається *контентом* клітинки. Для розбиття $(3,2,1)$ координати відповідних клітин та їх вміст показано на діаграмах

$$\begin{ytableau} 0 & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) \\ (3,1) \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 \end{ytableau}$$

Внутрішнім кутом діаграми Юнга називається така клітина діаграми, після видалення якої, отриманий набір кліток, залишиться діаграмою Юнга. Якщо клітина є внутрішнім кутом, то нижче неї і праворуч від неї немає клітин діаграми.

Нижче зеленим кольором зображено внутрішні кути діаграми $(4,4,3,2,2,1)$:

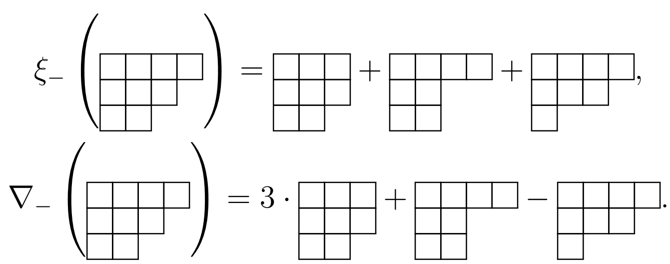


Зрозуміло, що остання клітинка в i-му рядку діаграми буде внутрішнім кутом, якщо $\lambda_i > \lambda_{i+1}$. Зокрема клітинка $(1, \lambda_n)$ завжди буде внутрішнім кутом.

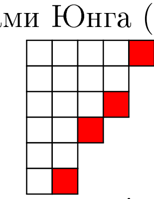
Розглянемо два оператори ξ_- і ∇_- на діаграмах Юнга, які "знімають" внутрішні кути:

$$\xi_-(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda-\Box\in\mathcal{Y}_n} \mu,$$
$$\nabla_-(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda-\Box\in\mathcal{Y}_n} c(\Box)\mu,$$

наприклад



Зовнішнім кутом діаграми називається така клітинка, що при додаванні її до діаграми Юнга знову отримується діаграма Юнга. Нижче червоним кольором зображено внутрішні кути діаграми Юнга $(4,4,3,2,2,1) \in \mathcal{Y}_6$:



Позначимо через $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ векторний простір, який утворений скінченними формальними сумами елементів з $\mathcal{Y}_n$ з раціональними коефіцієнтами:

$$\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n = \left\{\alpha_1\lambda^{(1)} + \alpha_2\lambda^{(2)} + \cdots + \alpha_k\lambda^{(k)},\ k \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{Q},\ \lambda^{(i)} \in \mathcal{Y}_n\right\}.$$

Визначимо оператори ξ_+ і ∇_+ на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ які "додають" внутрішні кути до діаграми, не збільшуючи кількість рядків:

$$\xi_+(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\Box\in\mathcal{Y}_n} \mu,$$
$$\nabla_+(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\Box\in\mathcal{Y}_n} c(\Box)\mu.$$

Тепер розглянемо наступні два оператори

$$\widehat{D}_- = -(n\xi_- + \nabla_-),$$
$$\widehat{D}_+ = \widehat{\nabla}.$$

Наша мета — довести що ці два оператори, разом з їхнім комутатором $[\widehat{D}_+, \widehat{D}_-]$, визначають дію алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

3. Симетричні многочлени. Тепер розглянемо алгебру многочленів $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ від n змінних з раціональними коефіцієнтами. Симетрична група S_n діє на цій алгебрі перестановками змінних:

$$\omega \circ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \ldots, x_{\omega(n)}), \omega \in S_n.$$

Многочлени, які не змінюються при цій дії, називаються *симетричними многочленами* і, оскільки, добуток двох симетричних многочленів, знову є симетричним многочленом, то вони утворюють підалгебру $\Lambda_n = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{S_n}$, яке називається *алгеброю симетричних многочленів*. В Λ_n розглядають кілька традиційних базисів, встановлення та вивчення співвідношень між якими і є, в значній мірі, предметом теорії симетричних многочленів, див. [1], [2].

3.1. Базиси в $\boldsymbol{\Lambda_n}$. Найпростішим прикладом симетричних многочленів є суми всіх можливих добутків змінних фіксованої довжини

$$e_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \quad 0 \le r \le n, \quad e_0 = 1,$$

які називаються *елементарними симетричними многочленами*. Вони мають породжуючу функцію

$$E(t) = \sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t),$$

і є базисом алгебри Λ_n. Твердження про алгебраїчну незалежність елементарних симетричних функцій називається *основною теоремою* про симетричні функції.

Повний симетричний многочлен h_r визначається як сума всіх різних мономів степеня r:

$$h_r = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \quad 0 \le r \le n, \quad h_0 = e_0 = 1,$$

Наприклад для трьох змінних $h_1 = x_1 + x_2 + x_3$ і $h_2 = {x_1}^2 + x_2 x_1 + x_1 x_3 + {x_2}^2 + {} + x_2 x_3 + {x_3}^2$.

Породжуюча функція

$$H(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)}.$$

Степеневим симетричним многочленом p_r називається сума r-тих степенів змінних:

$$p_r = x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r, \quad r \ge 1.$$

Породжуюча функція

$$P(t) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r t^r = \frac{H'(t)}{H(t)}.$$

Нарешті дамо означення многочленів Шура, яке є дещо складнішим технічно. Многочлени f, які при дії перестановки змінюються за правилом $\omega \circ f = (-1)^{|\omega|} f$, де $|\omega|$ — парність перестановки ω, називаються *кососиметричними многочленами.* Кососиметричні многочлени утворюють модуль над Λ_n оскільки добуток симетричного многочлена на кососиметричний буде знову кососиметричним многочленом.

Антисиметризатори мономів $\boldsymbol{x}^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}$:

$$a_\mu = \sum_{\omega \in S_n} (-1)^{|\omega|} \omega(\boldsymbol{x}^\mu) = \sum_{\omega \in S_n} (-1)^{|\omega|} x_{\omega(1)}^{\mu_1} x_{\omega(2)}^{\mu_2} \cdots x_{\omega(n)}^{\mu_n},$$

утворюють базис модуля кососиметричних многочленів. Многочлен a_μ можна записати у вигляді визначника

$$a_\mu = \det(x_i^{\mu_j})_{1 \le i,j \le n} = \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1} & x_2^{\mu_1} & \dots & x_n^{\mu_1} \\ x_1^{\mu_2} & x_2^{\mu_2} & \dots & x_n^{\mu_2} \\ & \dots\dots\dots & & \\ x_1^{\mu_n} & x_2^{\mu_n} & \dots & x_n^{\mu_n} \end{vmatrix}.$$

Зокрема, при $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ отримуємо визначник Вандермонда

$$a_\delta = \det(x_i^{n-j})_{1 \le i,j \le n} = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j \le n} (x_i - x_j).$$

Якщо в наборі μ присутні дві однакових компоненти, то тоді многочлен a_μ рівний нулю. Тому для ненульових многочленів можна вважати що, $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n \ge 0$. Отже, набір μ можна подати у вигляді суми $\mu = \lambda + \delta$, де набір λ вже буде розбиттям.

Симетричний *многочлен Шура* $\boldsymbol{s}_\lambda = \boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який відповідає розбиттю $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, визначається як відношення двох кососиметричних многочленів

$$\boldsymbol{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

Наведемо приклади многочленів Шура:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \boldsymbol{s}_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ \boldsymbol{s}_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Якщо λ пробігає всі розбиття довжини не більше n, то відповідні многочлени Шура утворюють базис Λ_n як нескінченновимірного векторного $\mathbb{Q}$-простору.

Многочлени Шура є узагальненням всіх інших відомих базисів Λ_n, наприклад у випадку розбиття довжини k $\lambda = (1^k)$ у якого кожна ненульова частина рівна 1, отримуються елементарні симетричні многочлени $\boldsymbol{s}_{((1^k))} = e_k$. Для розбиття $\lambda = (r) = (r, 0, 0, \ldots, 0)$ можна показати, що $\boldsymbol{s}_{(r)} = h_r$.

3.2. Базиси в $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_\mathbf{n}$. Нехай $\varphi : \Lambda_n \to \mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ ізоморфізм, для якого $\varphi(\boldsymbol{s}_\lambda) = \lambda$. Зрозуміло, що φ переводить базиси в Λ_n у базиси в $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Для елементарних симетричних многочленів і повних симетричних многочленів маємо

$$\varphi(h_k) = (k) = \underbrace{\ydiagram{2}\cdots\ydiagram{1}}_{k\text{ клітин}},$$

і

$$\varphi(e_k) = (1^k) = \left.\begin{array}{c}\ydiagram{1,1}\\ \vdots \\ \ydiagram{1}\end{array}\right\}k\text{ клітин.}$$

Випадок із симетричними степеневими сумами трохи складніший. Розглянемо такі лінійні комбінації діаграм Юнга

$$\begin{gathered}
\pi_1 = \ydiagram{1},\\
\pi_2 = \ydiagram{2} - \ydiagram{1,1},\\
\pi_3 = \ydiagram{3} - \ydiagram{2,1} + \ydiagram{1,1,1},\\
\vdots\\
\pi_n = \underbrace{\ydiagram{4}\cdots\ydiagram{1}}_{n\text{ клітин}} - \ydiagram{3,1}\cdots\ydiagram{1} + \ydiagram{3,1,1}\cdots\ydiagram{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\begin{array}{c}\ydiagram{1,1,1}\\ \vdots\\ n\text{ клітин}\\ \ydiagram{1}\end{array},
\end{gathered}$$

де в елементі π_i всі діаграми містять по i клітин.

Виразимо степеневі суми через многочлени Шура

$$\begin{aligned}
p_1 &= s_{(1)},\\
p_2 &= s_{(2)} - s_{1,1},\\
p_3 &= s_{(3)} - s_{2,1} + s_{1,1,1},\\
p_4 &= s_{(4)} - s_{3,1} + s_{2,1,1} - s_{1,1,1,1}.
\end{aligned}$$

З [1, Теорема 7.17.1] випливає, що степеневі симетричні многочлени так виражаються через многочлени Шура:

$$p_k = \boldsymbol{s}_{(k)} - \boldsymbol{s}_{k-1,1} + s_{k-2,1,1} - \boldsymbol{s}_{k-3,1,1,1} + \cdots + (-1)^{k-1}\boldsymbol{s}_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k}}, \quad k \le n.$$

Отже $\varphi(p_k) = \pi_k$.

4. $\mathfrak{sl}_2$-дія $\Lambda_\mathbf{n}$ і на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_\mathbf{n}$. Розглянемо стандартний базис комплексної матричної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$:

$$\mathfrak{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

з такими комутаційними співвідношеннями

$$[h, \mathfrak{e}_+] = 2\mathfrak{e}_+, \quad [h, \mathfrak{e}_-] = -2\mathfrak{e}_-, \quad [\mathfrak{e}_+, \mathfrak{e}_-] = \mathfrak{h}.$$

Лінійним зображенням (ρ, V) алгебри $\mathfrak{sl}_2$ у векторному просторі V називається гомоморфізм $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ який зберігає комутатори. В термінології модулів, векторний простір V (можливо нескінченновимірний) називається $\mathfrak{sl}_2$-модулем, а гомоморфізм ρ називається $\mathfrak{sl}_2$-дією.

Безпосередня та пряма перевірка показує, що наступні диференціальні оператори (D_-, D_0, D_+) в $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathfrak{e}_+) &= D_+ = x_1^2\partial_1 + x_2^2\partial_2 + \cdots + x_n^2\partial_n, \\
\rho(\mathfrak{h}) &= D_0 = 2(x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \cdots + x_n\partial_n), \\
\rho(\mathfrak{e}_-) &= D_- = -(\partial_1 + \partial_2 + \cdots + \partial_n),
\end{aligned}$$

де $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[D_+, D_-] = D_0, \quad [D_0, D_+] = 2D_+, \quad [D_0, D_-] = -2D_-.$$

Отже, вони визначають $\mathfrak{sl}_2$-дію на алгебрі $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, яка розглядається як нескінченновимірний векторний простір з мономіальним базисом $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Частинні похідні $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ входять симетрично у вирази для операторів D_+, D_0, D_-, тому ці оператори є ендоморфізмами і алгебри Λ_n. Отже, звуження ρ на Λ_n також буде $\mathfrak{sl}_2$-дією.

Можна показати, що *елемент Казиміра*, тобто єдиний породжуючий елемент центру універсальної огортуючої алгебри для алгебри $\mathfrak{sl}_2$, цієї дії в координатах має такий вигляд:

$$D_0^2 + 2(D_-D_+ + D_+D_-) = -4 \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 \partial_i \partial_j.$$

4.1. Дія на многочлени Шура. Оскільки многочлени Шура

$$\boldsymbol{s}_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \ldots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \ldots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}},$$

утворюють базис в Λ_n (як нескінченновимірного векторного $\mathbb{Q}$-простору), то $\mathfrak{sl}_2$-дія на многочлени Шура є лінійною комбінацією многочленів Шура.

В наступній теоремі дія операторів D_-, D_0, D_+ на многочлени Шура виражена в цьому базисі.

Теорема 2. *Справедливі наступні співвідношення:*

$$\begin{array}{ll} (i) & D_-(\boldsymbol{s}_\lambda) = -\sum\limits_{\mu=\lambda-\Box\in\mathbb{Y}_n}(n+c(\Box))\boldsymbol{s}_\mu, \\ (ii) & D_0(\boldsymbol{s}_\lambda) = 2|\lambda|\boldsymbol{s}_\lambda, \\ (iii) & D_+(\boldsymbol{s}_\lambda) = \sum\limits_{\mu=\lambda+\Box\in\mathbb{Y}_n}c(\Box)\boldsymbol{s}_\mu. \end{array}$$

Доведення. (i) Оскільки оператор D_- є диференціюванням алгебри многочленів, то ми маємо

$$D_-(\boldsymbol{s}_\lambda) = D_-\left(\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}\right) = \frac{D_-(a_{\lambda+\delta})a_\delta - a_{\lambda+\delta}D_-(a_\delta)}{a_\delta^2}.$$

За правилом диференціювання визначника знаходимо дію D_- на визначник Вандермонда:

$$D_-(a_\delta) =$$

$$= \begin{vmatrix} D_-(x_1^{n-1}) & D_-(x_2^{n-1}) & \dots & D_-(x_n^{n-1}) \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ D_-(x_1^{n-2}) & D_-(x_2^{n-2}) & \dots & D_-(x_n^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Оскільки $D_-(x_i^k) = -\partial_i(x_i^k) = -k\,x_i^{k-1}$, то в кожному з цих визначників, крім останнього, є два пропорційних рядки, а в останньому визначнику є нульовий рядок. Тому диференціювання D_- зануляє визначник Вандермонда і ми отримуємо простіший вираз для дії оператора D_-:

$$D_-(\boldsymbol{s}_\lambda) = \frac{D_-\left(\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}\right)}{a_\delta}.$$

Діємо диференціюванням на визначник у чисельнику і отримуємо, враховуючи правило диференціювання визначників, таку суму

$$D_-\left(a_{\lambda+\delta}\right) = -\sum_{i=1}^{n}(n+\lambda_i-i)\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_i+n-i-1} & x_2^{\lambda_i+n-i-1} & \dots & x_n^{\lambda_i+n-i-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що кожен із визначників суми відмінний від нуля лише тоді коли у діаграмі Юнга, яка відповідає розбиттю λ, клітина (i,λ_i) буде внутрішньою клітиною. В протилежному випадку отримується визначник з двома пропорційними рядками. Зауважимо, що $\lambda_i - i$ є контентом $c(\square)$ цієї внутрішньої клітини. Тому, поділивши цю суму на на визначник Вандермонда, отримаємо, що

$$D_-(\boldsymbol{s}_\lambda) = -\sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathbb{Y}_n} (n+c(\square))s_\mu.$$

(ii) Знайдемо тепер дію диференціювання D_+ на визначник Вандермонда. Оскільки $D_+(x_i^k) = kx_i^{k+1}$, то в кожному визначнику суми $D_+(a_\delta)$, крім того, який відповідає диференціюванню першого рядка, будуть пропорційні рядки. Тому в результаті залишиться лише один визначник:

$$D_+\left(\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}\right) = (n-1)\begin{vmatrix} x_1^{n} & x_2^{n} & \dots & x_n^{n} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник є узагальненим визначником Вандермонда. Використавши формулу для його обчислення, див. [10, Лема 2.1], отримуємо

$$\begin{vmatrix} x_1^{n} & x_2^{n} & \dots & x_n^{n} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+\cdots+x_n)a_{\lambda+\delta} = \boldsymbol{s}_{(1)}a_\delta.$$

Діючи диференціюванням D_+ на многочлени Шура отримуємо

$$D_+(\boldsymbol{s}_\lambda) = D_+\left(\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}\right) = \frac{D_+(a_{\lambda+\delta})a_\delta - a_{\lambda+\delta}D_+(a_\delta)}{a_\delta^2} = \frac{D_+\left(a_{\lambda+\delta}\right)}{a_\delta} - (n-1)\boldsymbol{s}_{(1)}\boldsymbol{s}_\lambda.$$

Вираз $D_+\left(a_{\lambda+\delta}\right)$ є сумою визначників, які відмінні від нуля лише тоді коли клітина (i,λ_i+1) буде зовнішнім кутом діаграми Юнга λ. Маємо

$$\frac{D_+\left(\det(x_j^{\lambda_i+n-i})\right)}{a_\delta} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(\lambda_i+n-i)\det(x_j^{\lambda_i+n-i})}{a_\delta} = \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathbb{Y}_n}(n-1+c(\square))\boldsymbol{s}_\mu.$$

Згідно правила П'єрі знаходимо $\boldsymbol{s}_{(1)}\boldsymbol{s}_\lambda = \sum\limits_{\mu=\lambda+\square\in\mathbb{Y}_n}\boldsymbol{s}_\mu$.

Отже, в підсумку, отримуємо

$$D_+(\boldsymbol{s}_\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathbb{Y}_n} c(\square)\boldsymbol{s}_\mu.$$

(iii) Шукаємо дію диференціювання D_0 на визначник Вандермонда

$$D_0\left(\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}\right) = 2((n-1)+(n-2)+\cdots+1)\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= n(n-1)a_\delta.$$

Тоді

$$D_0(\boldsymbol{s}_\lambda) = D_0\left(\frac{\det(x_j^{\lambda_i+n-i})}{a_\delta}\right) = \frac{D(\det(x_j^{\lambda_i+n-i}))a_\delta - \det(x_j^{\lambda_i+n-i})D_0(a_\delta)}{a_\delta^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} 2(\lambda_i+n-i)\det(x_j^{\lambda_i+n-i})a_\delta - \det(x_j^{\lambda_i+n-i})n(n-1)a_\delta}{a_\delta^2} = 2|\lambda|\boldsymbol{s}_\lambda.$$

□

Тепер ми можемо довести Теорему 1.

Доведення. Розглянемо такі оператори на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$:

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_-(\lambda) &= -\sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{Y}_n}(n+c(\square))\mu,\\
\widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda,\\
\widehat{D}_+(\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathcal{Y}_n}c(\square)\mu.
\end{aligned}$$

які індуковані ізоморфізмом φ і відповідають операторам D_-, D_0, D_+ з Теореми 2. Виразимо їх через оператори $\xi_-, \nabla_-, \nabla_+$:

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_- &= -(n\xi_-(\lambda)+\nabla_-(\lambda)),\\
\widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda,\\
\widehat{D}_+(\lambda) &= \nabla_+(\lambda).
\end{aligned}$$

Оскільки існує ізоморфізм алгебр $\mathcal{Y}_n$ та Λ_n, який переводить многочлен $\boldsymbol{s}_\lambda$ в розбиття λ, то ці оператори задають $\mathfrak{sl}_2$-дію на $\mathcal{Y}_n$, що і вимагалося довести в Теоремі 1.

□

4.2. Дія на інші базиси в $\boldsymbol{\Lambda_n}$ і на породжуючі функції. Як безпосередній наслідок Теореми 2 отримаємо явний вигляд дії операторів D_-, D_0, D_+ і операторів $\widehat{D}_-, \widehat{D}_0, \widehat{D}_+$ на різні базиси в Λ_n і $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Теорема 3. *Дія операторів*

1) *на елементарні симетричні многочлени e_i та на відповідні розбиття (1^i) :*

$$\begin{array}{ll}
D_-(e_i) = -(n-(i-1))e_{i-1}, & \widehat{D}_-((1^i)) = -(n-(i-1))(1^{i-1})\\
D_0(e_i) = 2ie_i, & \widehat{D}_0((1^i)) = 2i((1^i)),\\
D_+(e_i) = e_1e_i-(i+1)e_{i+1}, & \widehat{D}_+((1^i)) = (1)\cdot(1^i)-(i+1)(1^{i+1})\\
D_+(e_n) = e_1e_n, & \widehat{D}_+((1^n)) = (1)\cdot(1^n).
\end{array}$$

2) *На повні симетричні многочлени h_i та на відповідні розбиття (i) :*

$$\begin{array}{ll}
D_-(h_i) = -(n+i-1)h_{i-1}, & \widehat{D}_-((n)) = -(n+i-1)(n),\\
D_0(h_i) = 2ih_i, & \widehat{D}_0((i)) = 2i(i)\\
D_+(h_i) = (i+1)h_{i+1}-h_1h_i, & \widehat{D}_+((i)) = (i+1)(i+1)-(1)\cdot(i).
\end{array}$$

3) *На степеневі симетричні многочлени p_i та на відповідні розбиття π_i :*

$$\begin{array}{ll} D_-(p_i) = ip_{i-1}, D_-(p_1) = n, & \widehat{D}_-(\pi_i) = i\pi_{i-1}, D_-(\pi_1) = n, \\ D_0(p_i) = 2ip_i, & \widehat{D}_0(\pi_i) = 2i\pi_i, \\ D_+(p_i) = ip_{i+1}, & \widehat{D}_+(\pi_i) = i\pi_{i+1}, \end{array}$$

для всіх $1 \leq i \leq n$.

Доведення. З Теореми 2, оскільки симетричні многочлени e_i та h_i є многочленами Шура, які відповідають розбиттям (1^i) і (i), ми зразу отримаємо, що

$$\begin{array}{ll} D_-(e_i) = -(n-(i-1))e_{i-1} & D_-(h_i) = -(n+i-1)h_{i-1} \\ D_0(e_i) = 2ie_i & D(h_i) = 2ih_i, \\ D_+(e_i) = e_1e_i - (i+1)e_{i+1} & D_+(h_i) = (i+1)h_{i+1} - h_1h_i, \\ D_+(e_n) = e_1e_n & D_+(h_n) = (n+1)h_{n+1} - h_1h_n. \end{array}$$

Результати дії операторів D_-, D_0 зрозумілі, пояснимо отримані вирази для D_+. За Теоремою 2 маємо, що

$$D_+(\boldsymbol{s}_\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathbb{Y}_n} c(\square)\boldsymbol{s}_\mu.$$

Для $\lambda = (1^i)$, $i < n$ отримуємо,

$$D_+(\boldsymbol{s}_{(1^i)}) = D_+(e_i) = \sum_{\mu=(1^i)+\square\in\mathbb{Y}_n} c(\square)\boldsymbol{s}_\mu = \boldsymbol{s}_{2,1,\ldots,1} - ie_{i+1}.$$

За правилом П'єрі, маємо

$$e_1e_i = \boldsymbol{s}_{2,1,\ldots,1} + e_{i+1}.$$

Звідси

$$D_+(e_i) = e_1e_i - (i+1)e_{i+1}.$$

Для випадку $i = n$ маємо $D_+(e_n) = e_1e_n$.

Для повних симетричних многочленів вираз для $D_+(h_i)$ отримується аналогічно. Дія на степеневі симетричні многочлени многочлени p_i отримується зразу із означення цих многочленів.

Теорему доведено.

□

Знайдемо дію операторів D_-, D_0, D_+ на породжуючі функції цих сімей симетричних многочленів. Має місце наступна теорема

Теорема 4. *Нехай $E(t), H(t), P(t)$ – звичайні породжуючі функції для сімей елементарних, повних та степеневих симетричних многочленів, відповідно.*

Тоді оператори D_-, D_0, D_+ діють на них у такий спосіб:

$$\begin{aligned}
1)\quad & D_-(H(t)) = -t(n\,H(t) + tH'(t)),\\
& D_0(H(t)) = 2tH'(t),\\
& D_+(H(t)) = H'(t) - h_1H(t).\\[1em]
2)\quad & D_-(E(t)) = -t(n\,E(t) - tE'(t)),\\
& D_0(E(t)) = 2tE'(t),\\
& D_+(E(t)) = e_1E(t) - E'(t).\\[1em]
3)\quad & D_-(P(t)) = -n - t(2P(t) + tP'(t)),\\
& D_0(P(t)) = 2tP'(t),\\
& D_+(P(t)) = P'(t).
\end{aligned}$$

Доведення. Для породжуючої функції повних симетричних многочленів $H(t)$ маємо

$$D_-(H(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} D_-(h_i)t^i = -\sum_{i=1}^{\infty}(n+i-1)h_{i-1}t^i = -\sum_{i=1}^{\infty} nh_{i-1}t^i -$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)h_{i-1}t^i = -nt\sum_{i=0}^{\infty} h_it^i - t^2\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)h_{i-1}t^{i-2} = -ntH(t) - t^2H'(t).$$

Далі знаходимо

$$D_0(H(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} D(h_i)t^i = \sum_{i=1}^{\infty} 2\,ih_it^i = 2t\sum_{i=1}^{\infty} ih_it^{i-1} = 2tH'(t),$$

і

$$D_+(H(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} D_+(h_i)t^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left((i+1)h_{i+1} - h_1h_i)\right)t^i = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)h_{i+1}t^i -$$

$$-h_1\sum_{i=0}^{\infty} h_it^i = H'(t) - h_1H(t).$$

Для породжуючих функцій $E(t)$ і $P(t)$ дія на них операторів зображення знаходиться аналогічними міркуваннями.

□

Питання про дію на породжуючу функцію для многочленів Шура залишається відкритим, оскільки аналітичний вираз для цієї функції невідомий, див. [11], [12].

5. Нові $\mathfrak{sl}_2$-дії на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ і на Λ_n. Ми хочемо отримати нові реалізації $\mathfrak{sl}_2$-дії в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, використовуючи знайдені $\mathfrak{sl}_2$-дію в Λ_n. В загальному випадку, розширення диференціювання з підалгебри на алгебру, не завжди можливе. Проте, якщо кількість породжуючих в алгебрі така сама, як і в підалгебрі, то ми можемо продовжити довільне диференціювання на алгебру простим перепозначенням змінних, при деяких умовах.

В наступній теоремі визначаються три нові $\mathfrak{sl}_2$-дії на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Теорема 5. *Наступні відображення* $\rho_i : \mathfrak{sl}_2 \mapsto \mathrm{End}(\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n])$ *є* $\mathfrak{sl}_2$*-діями:*

1) $\rho_1(\mathfrak{e}_-) = -\left(n\partial_1 + (n-1)x_1\partial_2 + \cdots + 1 \cdot x_{n-1}\partial_n\right),$
$\rho_1(\mathfrak{h}) = 2\left(x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \cdots + nx_n\partial_n\right),$
$\rho_1(\mathfrak{e}_+) = (x_1^2 - 2x_2)\partial_1 + (x_1x_2 - 3x_3)\partial_2 + (x_1x_3 - 4x_4)\partial_3 + \cdots + x_1x_n\partial_n.$

2) $\rho_2(\mathfrak{e}_-) = -\left(n\partial_1 + (n+1)x_1\partial_2 + \cdots + (2n-1) \cdot x_{n-1}\partial_n\right),$
$\rho_2(\mathfrak{h}) = 2\left(x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \cdots + nx_n\partial_n\right),$
$\rho_2(\mathfrak{e}_+) = (2x_2 - x_1^2)\partial_1 + (3x_3 - x_1x_2)\partial_2 + \cdots + ((n+1)H_n - x_1x_n)\partial_n.$

3) $\rho_3(\mathfrak{e}_-) = -\left(n\partial_1 + 2x_1\partial_2 + \cdots + n \cdot x_{n-1}\partial_n\right),$
$\rho_3(\mathfrak{h}) = 2\left(x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \cdots + nx_n\partial_n\right),$
$\rho_3(\mathfrak{e}_+) = x_2\partial_1 + 2x_3\partial_2 + \cdots + nP_n\partial_n.$

де $H_n(h_1, h_2, \dots, h_n) = h_{n+1}$ *і* $P_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_{n+1}$.

Доведення. Перепишемо в координатах, відому з Теореми 3 дію на елементарні симетричні многочлени e_i:

$$\rho_1(\mathfrak{e}_-) = -\left(n\frac{\partial}{\partial e_1} + (n-1)e_1\frac{\partial}{\partial e_2} + \cdots + 1 \cdot e_{n-1}\frac{\partial}{\partial e_n}\right),$$
$$\rho_1(\mathfrak{h}) = 2\left(e_1\frac{\partial}{\partial e_1} + 2e_2\frac{\partial}{\partial e_2} + \cdots + ne_n\frac{\partial}{\partial e_n}\right),$$
$$\rho_1(\mathfrak{e}_+) = (e_1^2 - 2e_2)\frac{\partial}{\partial e_1} + (e_1e_2 - 3e_3)\frac{\partial}{\partial e_2} + (e_1e_3 - 4e_4)\frac{\partial}{\partial e_3} + \cdots + e_1e_n\frac{\partial}{\partial e_n},$$

Виконавши формальну заміну змінних $e_i \mapsto x_i$, отримаємо твердження 1). Теореми.

Для повних симетричних многочленів ми маємо таку дію або в координатах

$$\rho_2(\mathfrak{e}_-) = -\left(n\frac{\partial}{\partial h_1} + (n+1)h_1\frac{\partial}{\partial h_2} + \cdots + (2n-1) \cdot h_{n-1}\frac{\partial}{\partial h_n}\right),$$
$$\rho_2(\mathfrak{h}) = 2\left(h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + 2h_2\frac{\partial}{\partial h_2} + \cdots + nh_n\frac{\partial}{\partial h_n}\right),$$
$$\rho_2(\mathfrak{e}_+) = (2h_2 - h_1^2)\frac{\partial}{\partial h_1} + (3h_3 - h_1h_2)\frac{\partial}{\partial h_2} + \cdots + ((n+1)h_{n+1} - h_1h_n)\frac{\partial}{\partial h_n}.$$

Для того, щоб продовжити диференціювання $\rho_2(\mathfrak{e}_+)$ з Λ_n на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ потрібно виразити h_{n+1} як деякий многочлен H_n від $h_1, h_2, \dots, h_n$ і тоді виконати заміну $h_i \mapsto x_i$.

Аналогічно, для степеневих симетричних многочленів маємо

$$\rho_3(\mathfrak{e}_-) = -\left(n\frac{\partial}{\partial p_1} + 2p_1\frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots + n \cdot p_{n-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\right),$$
$$\rho_3(\mathfrak{h}) = 2\left(p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + 2p_2\frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots + np_n\frac{\partial}{\partial p_n}\right),$$
$$\rho_3(\mathfrak{e}_+) = p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + 2p_3\frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots + np_{n+1}\frac{\partial}{\partial p_n}.$$

Для того, щоб продовжити диференціювання $\rho_3(\mathfrak{e}_+)$ з Λ_n на $\mathbb{Q}[(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ потрібно виразити p_{n+1} як многочлен P_n від $p_1, p_2, \ldots, p_n$ і тоді виконати заміну $p_i \mapsto x_i$.

Теорему доведено.

$\square$

Для невеликих n многочлени H_n і P_n мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&H_2 = -{h_1}^3 + 2\,h_1h_2 \\
&H_3 = {h_1}^4 - 3\,{h_1}^2h_2 + 2\,h_1h_3 + {h_2}^2, \\
&H_4 = -{h_1}^5 + 4\,{h_1}^3h_2 - 3\,{h_1}^2h_3 - 3\,h_1{h_2}^2 + 2\,h_1h_4 + 2\,h_2h_3, \\
&H_5 = {h_1}^6 - 5\,{h_1}^4h_2 + 4\,{h_1}^3h_3 + \left(6\,{h_2}^2 - 3\,h_4\right){h_1}^2 + \left(2\,h_5 - 6\,h_2h_3\right)h_1 - \\
&- {h_2}^3 + 2\,h_2h_4 + {h_3}^2,
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
&P_2 = -\frac{1}{2}\,{p_1}^3 + \frac{3}{2}\,p_2p_1, \\
&P_3 = \frac{1}{6}\,{p_1}^4 - p_2{p_1}^2 + \frac{4}{3}\,p_3p_1 + \frac{1}{2}\,{p_2}^2, \\
&P_4 = -\frac{1}{2}4\,{p_1}^5 + \frac{5}{12}\,p_2{p_1}^3 - \frac{5}{6}\,p_3{p_1}^2 + \left(\frac{5}{4}\,p_4 - \frac{5}{8}\,{p_2}^2\right)p_1 + \frac{5}{6}\,p_3p_2, \\
&P_5 = \frac{1}{120}\,{p_1}^6 - \frac{1}{8}\,p_2{p_1}^4 + \frac{1}{3}\,p_3{p_1}^3 + \left(\frac{3}{8}\,{p_2}^2 - \frac{3}{4}\,p_4\right){p_1}^2 + \left(\frac{6}{5}\,p_5 - p_3p_2\right)p_1 - \\
&- \frac{1}{8}\,{p_2}^3 + \frac{1}{3}\,{p_3}^2 + \frac{3}{4}\,p_4p_2.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що ρ_1, ρ_2, ρ_3 вже не будуть $\mathfrak{sl}_2$-діями на Λ_n.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі знайдено явний вигляд трійки операторів $\mathfrak{sl}_2$-дії на векторному просторі діаграм Юнга $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ та просторі симетричних многочленів. Показано, що, використовуючи ізоморфізм між $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ та алгеброю симетричних многочленів Λ_n, можна перенести дію алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ з Λ_n на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

В майбутньому планується застосувати запропонований підхід і використати інші відомі симетричні дії $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ з метою перенесення їх на простір діаграм Юнга $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Основна технічна проблема, яка тут виникатиме, це знаходження дії диференціальних операторів, які реалізовують відповідне зображення $\mathfrak{sl}_2$, на многочлени Шура.

Основні результати роботи мають застосування в теорії зображень та комбінаториці, зокрема в дослідженні структурних властивостей алгебр симетричних функцій та операторів на диференціальних частково впорядкованих множинах.

Список використаної літератури

1. Stanley R. Enumerative Combinatorics. Volume 2. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589
2. Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. 2nd Edition. Oxford University Press : New York, 1995. 486 p. DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780198534891.001.0001
3. Fulton W. Young Tableaux. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511626241

4. Okounkov A. $SL(2)$ and z-measures. Random matrix models and their applications. Bleher P. M. and Its A. R. (eds.). Mathematical Sciences Research Institute Publications 40. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001. pp. 407–420. URL: https://zbmath.org/0985.43007 (date of access: 13.04.2024).
5. Petrov L. $\mathfrak{sl}(2)$ operators and Markov processes on branching graphs. *Jour. Algebr. Comb.* 2013. Vol. 38, No. 3. P. 663–720. DOI: https://doi.org/10.1007/s10801-012-0420-y
6. Stanley R. Differential posets. *Journal of the American Mathematical Society.* 1988. Vol. 1, No. 4. P. 919–961.
7. Nenashev G. Differential operators on Schur and Schubert polynomials. Mathematics — Combinatorics. e-Print. 2005. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.08329
8. Weigandt A. Derivatives and Schubert Calculus. Talk at FPSAC conference 2023. URL: https://www.youtube.com/watch?v=fgzB7YjGOEc (date of access: 13.04.2024).
9. Grinberg D., Korniichuk N., Molokanov K., Khomych S. The diagonal derivative of a skew Schur polynomial. Mathematics — Combinatorics. e-Print. 2024. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.14217
10. Ernst T. Generalized Vandermonde determinants. *U. U. D. M. Report 2000:6.* 2000. URL: https://solnaschack.org/ernst/sep1.pdf (date of access: 14.04.2024).
11. Stanley R. The character generator of SU(n). *Journal of Mathematical Physics.* 1980. Vol. 21, No. 9. P. 2321–2326. DOI: https://doi.org/10.1063/1.524687
12. Бедратюк Л. П. Породжуюча функція для многочленів Шура. *Буковинський математичний журнал.* 2022. Т. 10, № 1. С. 41–50. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2022.01.04

Bedratyuk L. P. The structure of $\mathfrak{sl}_2$-modules on the Young diagrams.

This paper establishes the explicit form of derivatives $(\widehat{D}_-, \widehat{D}_0, \widehat{D}_+)$ that define the action of the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$ on the vector space $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ of Young diagrams corresponding to partitions λ of length n:

$$\widehat{D}_-(\lambda) = -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)),$$
$$\widehat{D}_0(\lambda) = 2|\lambda|\lambda,$$
$$\widehat{D}_+(\lambda) = \nabla_+(\lambda),$$

where $\xi_-(\lambda)$ and $\nabla_\pm(\lambda)$ are sums over all possible Young diagrams obtained by adding or removing a cell $\square$ from the corresponding Young diagram. The proof involves introducing an algebra structure on $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ isomorphic to the algebra of symmetric polynomials in n variables, defining the $\mathfrak{sl}_2$ action on Schur polynomials, and transferring this action to $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Keywords: Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_2$-representation, symmetric polynomials, Schur polynomials, Young diagrams

References

1. Stanley, R. (2001). *Enumerative Combinatorics. Volume 2.* Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589
2. Macdonald, I. G. (1995). *Symmetric Functions and Hall Polynomials. 2nd Edition.* Oxford: Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oso/9780198534891.001.0001
3. Fulton, W. (1997). *Young Tableaux.* Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511626241
4. Okounkov, A. (2001). $SL(2)$ and z-measures. Random matrix models and their applications. Bleher, P. M., & Its, A. R (eds.). *Mathematical Sciences Research Institute Publications 40.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. Retrieved from https://zbmath.org/0985.43007
5. Petrov, L. (2013). $\mathfrak{sl}(2)$ operators and Markov processes on branching graphs. *J. Algebr. Comb.,* 38(3), 663–720. https://doi.org/10.1007/s10801-012-0420-y
6. Stanley, R. (1988). Differential posets. *Journal of the American Mathematical Society,* 1(4), 919–961.
7. Nenashev, G. (2005). Differential operators on Schur and Schubert polynomials. Mathematics — Combinatorics. e-Print. https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.08329

8. Weigandt, A. (2023). Derivatives and Schubert Calculus. Talk at FPSAC conference 2023. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=fgzB7YjGOEc
9. Grinberg, D., Korniichuk, N., Molokanov, K., & Khomych, S. (2024). The diagonal derivative of a skew Schur polynomial. Mathematics — Combinatorics. e-Print. https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.14217
10. Ernst, T. (2000). Generalized Vandermonde determinants. *U. U. D. M. Report 2000:6.* Retrieved from https://solnaschack.org/ernst/sep1.pdf
11. Stanley, R. (1980). The character generator of SU(n). *Journal of Mathematical Physics,* 21(9), 2321–2326. https://doi.org/10.1063/1.524687
12. Bedratyuk, L. P. (2022). Generating function for Schur polynomials. *Bukovinian Mathematical Journal,* 10(1), 41–50. https://doi.org/10.31861/bmj2022.01.04 [in Ukrainian].

Одержано 05.07.2024