УДК 51-7:368.025(045)
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).188-194

Л. М. Іллічева[1], Т. В. Авдєєва[2], О. П. Томащук[3]

[1] Національний авіаційний університет,
доцент кафедри прикладної математики
факультет комп'ютерних наук та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
m_ilicheva@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-5209-6823

[2] Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,
старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь
avdeeva.tetyana@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7775-8512

[3] Національний авіаційний університет,
доцент кафедри прикладної математики
факультет комп'ютерних наук та технологій,
кандидат педагогічних наук
o_tomaschuk@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5631-3418

ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ ПОЗОВІВ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ ЗА СХЕМАМИ ЛАНЦЮГОВОЇ РЕАКЦІЇ ТА ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ

Сумарна величина клієнтських позовів за певний проміжок часу важлива для правильного менеджменту страхової компанії. У роботі розглядається випадок, коли кількість позовів наростатиме згідно із ланцюговою реакцією або у відповідності до гіллястого процесу. Таке збільшення кількості позовів, зазвичай, пов'язано із випадками стихійного лиха (буревіями, великими повенями) або воєнними діями. Якщо позови формуються за схемою ланцюгової реакції, тобто кожний позов може бути задоволений із ймовірністю q або перетворитися у m аналогічних позовів з ймовірністю p, то на n етапі середня кількість позовів дорівнюватиме $(pm)^n$. Якщо позови формуються за схемою гіллястого процесу, наведена формула для Ex^{Z_n}, де Z_n — очікувана кількість позовів на n-му етапі.

Ключові слова: випадкова величина, що не залежить від майбутнього, ланцюгова реакція, гіллястий процес, моделювання кількості позовів, середня величина кількості позовів.

1. Вступ. Для страхової компанії ключовим поняттям слугує тарифна ставка, тобто адекватне грошове вираження зобов'язань страховика за укладеним договором страхування. Тарифна ставка, по якій укладається договір страхування, називається брутто-ставкою. В свою чергу, вона складається з нетто-ставки і навантаження. Саме нетто-ставка виражає ціну страхового ризику. Вона повинна бути побудована так, щоб забезпечити еквівалентність відносин між страховиком і страхувальником [7]. Сумарна величина клієнтських позовів за певний проміжок часу важлива для правильного менеджменту страхової компанії. Іншими словами, страхова компанія повинна зібрати стільки страхових премій, скільки має бути потім виплачено страхувальникам. Нехай випадкова величина S означає сумарні виплати, тобто сумарну величину позовів, що належать до даного ризику. Нехай випадкова величина Y_i — позначає величину i-го позову, а випадкова величина N — кількість позовів протягом періоду страхування.

Тоді $S = \sum_1^N Y_i$, де суму вважають рівною 0, коли $N = 0$. Фактори, які впливають на величини позовів та на їх кількість, можуть бути різними.

Вводять такі припущення:

– Кількість позовів не впливає на величини індивідуальних позовів.
– На величину окремого позову не впливають величини інших позовів.
– Розподіл величини індивідуальних позовів не змінюється протягом терміну дії полісу.

У більш строгому математичному сенсі припускаємо, що:

– Випадкові величини $\{Y_i\}_{i=1}^N$ є незалежними й однаково розподіленими.
– Випадкова величина N не залежить від $\{Y_i\}_{i=1}^N$.

У роботах [1, 3] розглядаються оцінки величин сумарних позовів, коли N має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, $(N \sim Pois\,(\lambda))$, тоді S має складний розподіл Пуассона з параметрами λ і $F(x)$ ($F(x)$ — функція розподілу величини позову Y_i. Якщо N розподілено за біноміальним законом з параметрами n і q (N$\sim b\,(n,q)$), S має складний біноміальний розподіл. Коли N має від'ємний біноміальний розподіл ($N \sim NB\,(k,p)$), S — має складний від'ємний біноміальний розподіл. Якщо відбулася страхова подія, власник страхового полісу (або уповноважена ним особа) звертається до страхової компанії з позовом (вимогою) про відшкодування збитків. У деяких випадках, наприклад, при страхуванні життя, один поліс може привести до одного позову, а в інших (наприклад, при страхуванні автотранспорту) — протягом дії договору може виникнути кілька позовів. [6]. У роботі [5] використовуються статистичні методи оцінювання величин збитків в залежності від видів ризиків. У роботі [2] представлені приклади стохастичних моделей прийняття рішень в умовах ризику і особлива увага приділяється «портфельному» підходу в теорії грошей. Але даний розгляд не враховує специфіку страхової діяльності.

Іноді у роботах приділяють увагу екстремальним випадкам при формуванні клієнтських позовів. Так, у розділі 3.6.3 [6] розглядається зміна кількості позовів при страхуванні домашнього майна за припущенням, що кількість буревіїв, які їх спричиняють, має розподіл Пуассона із визначеним параметром. При цьому кількість позовів, викликаних окремим буревієм, у свою чергу, теж має розподіл Пуассона із наперед відомим параметром.

2. Постановка завдання. Оцінити середню кількість позовів, якщо вони виникають за схемою ланцюгової реакції або гіллястого процесу. Таке збільшення кількості позовів, зазвичай, пов'язано із випадками стихійного лиха (буревіями, великими повенями) або воєнними діями, які, на жаль, теж можуть трапитися.

3. Огляд літератури. При формуванні страхової політики особливу увагу привертає мінливість фінансового стану домогосподарства внаслідок різних життєвих негараздів. Виконуються статистичні дослідження, що дозволяють визначити зміни у демографічному, гендерному складі; моделюються різні ситуації, провадяться ймовірнісні підрахунки для окреслення ситуацій, коли члени домогосподарств потребуватимуть допомоги. Для підкріплення фінансового стану домогосподарств пропонуються додаткові страхові продукти для проміжного страхування (bridging insurance) [8]. Оскільки фінансові труднощі домогосподарства доволі часто пов'язані одне з одним, при формуванні таких продуктів слід враховувати характер цього зв'язку.

Загальновідомо, що у розвинутих суспільствах спостерігається підвищення попиту на медичні послуги. Цей процес обумовлений не тільки феноменом «старіння» населення, але й значним технологічним прогресом у царині медицини. Як наслідок, підвищуються соціальні витрати на охорону здоров'я, які вже неможливо задовольнити без додаткової платні з боку пацієнта. Один з підходів полягає у розвитку приватного медичного страхування, особливо, для підтримки літніх пацієнтів з хронічними хворобами. Розглядаються перспективи розвитку страхових продуктів медичної спрямованості, призначених саме для таких категорій клієнтів [9, 10].

У статті [11] для опису подібних ситуацій вводиться множинна марківська модель станів, яка дозволяє класифікувати різні життєві випадки. Такий підхід доповнює вже доволі розповсюджений механізм прижиттєвих ануїтетів, який широко застосовується на практиці. При оцінці перспектив застосування цього підходу слід враховувати ланцюговий або гіллястий характер наростання позовів з боку клієнта.

4. Основний результат. У даній роботі розглядається випадок, коли кількість позовів N наростатиме згідно із ланцюговою реакцією або у відповідності до гіллястого процесу. Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана послідовність $\{\xi_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ незалежних випадкових величин і цілочислова випадкова величина $\mu \geq 0$. Нехай $F_{k,n} = \sigma\{\xi_k, \ldots, \xi_n\}$ позначає σ-алгебру, яка породжується $n - k + 1$ випадковими величинами $\xi_k, \ldots, \xi_n$ [2].

Кажуть, що випадкова величина μ не залежить від майбутнього, якщо подія $\{\mu \leq n\}$ не залежить від $F_{k,\infty.}$

Довільна випадкова величина μ, яка не залежить від послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (не залежать $\sigma(\mu)$ та $F_{1,\infty}$), буде випадковою величиною, яка не залежить від майбутнього.

Введемо поняття суми випадкового числа випадкових величин [4]:

$$S_\mu = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu.$$

Стосовно математичного сподівання суми випадкового числа випадкових величин відома тотожність Вальда [1]: Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні і однаково розподілені, $E\,|\xi_k| < \infty$, випадкова величина μ не залежить від майбутнього, $E\mu < \infty$, то $ES_\mu = E\xi_1 \cdot E\mu$.

Тобто, якщо ввести обмеження на кількість позовів за допомогою випадкової величини μ, можна обчислити середнє значення сумарного позову як добуток середнього значення одного позову та середнього значення цієї випадкової величини [3, 6].

Розглянемо детально характеристики для кількості позовів. Вважається, що позови виникають згідно з моделлю, яка описує появу подій протягом певного проміжку часу. Для моделювання кількості позовів застосуємо схему ланцюгової реакції [1].

Якщо припустити, що величини збитків мають вигляд послідовності випадкових величин $\{Y_j,\ j = 1, 2 \ldots\}$, причому μ — номер першої випадкової величини у послідовності, котра більше, або дорівнює N, тобто,

$$\mu = \inf\{k : Y_k \geq N\}.$$

Тоді, якщо Y_j — незалежні випадкові величини, то μ не залежить від майбутнього, оскільки подія

$$\{\mu \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{Y_k \geq N\} \in F_{1,n}.$$

Значення N можна трактувати як порогове значення для величини фінансового збитку, починаючи з якого страхова компанія розглядає можливість відшкодування.

Спочатку маємо один позов, котрий або задовольняється з ймовірністю q, або на його основі формується m позовів з ймовірністю $p = 1 - q$. Кожний позов нового покоління поводить себе аналогічно. Оцінимо математичне сподівання кількості позовів у n-му поколінні.

Розглянемо оцінку середньої кількості позовів за схемою ланцюгової реакції.

Введемо подвійну послідовність

$$\left\{X_k^{(n)}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots \ ;$$

незалежних однаково розподілених випадкових величин, які приймають значення m та 0 із ймовірностями p та q, причому $p = 1 - q$. Тоді елементи послідовностей

$$\left\{X_k^{(1)}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \left\{X_k^{(2)}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \ldots \ ;$$

де змінюється верхній індекс — будуть незалежними між собою. Якщо ввести нову послідовність випадкових величин $\{Z_n\}$, $(Z_0 = 1)$ як суму елементів відповідних послідовностей, одержимо:

$$Z_1 = X_{Z_0}^{(1)} = X_1^{(1)},$$

$$Z_2 = X_1^{(2)} + X_2^{(2)} + \ldots + X_{Z_1}^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_n = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \ldots + X_{Z_{n-1}}^{(n)}.$$

Оскільки послідовність $\left\{X_k^{(n)}\right\}$ не залежить від Z_{n-1} та

$$EX_k^{(n)} = pm, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

за тотожністю Вальда одержимо:

$$EZ_n = EX_1^{(n)} \cdot EZ_{n-1} = pm \cdot EZ_{n-1} = (pm)^n.$$

Подібний розгляд дозволяє оцінювати середню кількість позовів на кожному етапі, якщо позови формуються згідно з наданою моделлю.

При оцінці дисперсії одержимо:

$$V\left[X_k^{(n)}\right] = E\Big[X_k^{(n)} - E\,X_k^{(n)}\Big]^2 = E\Big[X_k^{(n)} - pm\Big]^2 =$$

$$= (m - pm)^2 p + (0 - pm)^2 q = m^2 qp\,(q - p)\,,$$

звідки

$$E\left[X_k^{(n)}\right]^2 = V\left[X_k^{(n)}\right] + (pm)^2 = m^2 p\left(q^2 + p^2\right). \tag{1}$$

Отже, якщо позови формуються за схемою ланцюгової реакції, тобто кожний позов може бути задоволений із ймовірністю q або перетворитися у m аналогічних позовів з ймовірністю p, то на n етапі середня кількість позовів дорівнюватиме $(pm)^n$.

Тепер розглянемо більш складний випадок, коли позови формуються за схемою гіллястого процесу. Тобто, позови формуються не із сталою ймовірністю, а з ймовірностями $\{f_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\sum_0^\infty f_k = 1$. Спочатку маємо один позов, на основі якого формується наступна k кількість позовів. Ці позови формують «перше покоління». Кожний позов із цього «покоління» поводить себе аналогічно [1].

Для опису усього процесу введемо незалежні між собою послідовності незалежних однаково розподілених величин

$$\left\{X_k^{(1)}\right\},\quad k = 1, 2, \ldots;\quad \left\{X_k^{(2)}\right\},\ k = 1, 2, \ldots;\quad \ldots;$$

де $\left\{X_k^{(n)}\right\}$ мають розподіл: $P\left(X_k^{(n)} = j\right) = f_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Послідовність Z_n матиме такий вигляд:

$$Z_0 = 1,$$

$$Z_1 = X_1^{(1)},$$

$$Z_2 = X_1^{(2)} + X_2^{(2)} + \cdots + X_{Z_1}^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_n = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \cdots + X_{Z_{n-1}}^{(n)}.$$

Розглядаючи суму випадкового числа випадкових величин, у якій $X_1^{(n)}$, $X_2^{(n)}, \ldots$ не залежать від Z_{n-1}, за формулою повної ймовірності можна одержати для функції: $f_{(n)}(x) = Ex^{Z_n}$ такий вираз:

$$f_{(n)}(x) = Ex^{Z_n} = \sum_{j=0}^{\infty} P\left(Z_{n-1} = j\right) \cdot Ex^{X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \ldots + X_j^{(n)}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(Z_{n-1} = j\right) \cdot f^j(x) = f_{(n-1)}\left(f(x)\right),$$

де $f(x) = f_{(1)}(x) = Ex^{X_1^{(1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$. Позначимо ітерації функції $\varphi(x)$, таким чином: $\varphi_1(x) = \ \varphi(x)\,;\ \varphi_2(x) = \ \varphi(\varphi(x))\,;\ldots$

Якщо таким же чином ввести ітерації функції $f(x)$, за допомогою індукції одержують:

$$Ex^{Z_n} = f_n(x)\,. \tag{2}$$

Таким чином, якщо у початковий момент маємо один позов, який із ймовірністю $\{f_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\sum_1^\infty f_k = 1$ — переходить у k позовів того ж типу, причому цей процес може продовжуватися, тоді стосовно функції Ex^{Z_n}, де Z_n — очікувана кількість позовів на n-му етапі, справедливе одержане вище співвідношення (1) або (2), в залежності від ситуації.

Відомо [1], що в середньому один позов призводить тільки до ще одного позову, тобто середня величина кількості позовів на кожному етапі дорівнює 1, можна визначити ймовірність припинення цього процесу на кроці n. Тобто, мають місце такі оцінки: якщо

$$f'(1) = 1, \quad 0 < b \equiv f''(1) < \infty, \text{ то}$$

– ймовірність завершення процеса (виродження) на кроці n дорівнює $\frac{2}{bn^2}$;
– ймовірність продовження процесу формування позовів приблизно дорівнює $\frac{2}{nb}$.

5. Висновки і перспективи подальших досліджень. Якщо позови формуються за схемою ланцюгової реакції, тобто кожний позов може бути задоволений із ймовірністю q або перетворитися у m аналогічних позовів з ймовірністю p, то на n етапі середня кількість позовів дорівнюватиме $(pm)^n$. Якщо у початковий момент маємо один позов, який із ймовірністю $\{f_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\sum_1^\infty f_k = 1$ — переходить у k позовів того ж типу, причому цей процес може продовжуватися, тоді стосовно закономірності для кількості позовів на n-му етапі — а саме, для випадкової величині Z_n — справедливе співвідношення:

$$Ex^{Z_n} = f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\ldots\right)\right),$$

де у правій частині n разів застосовується функція $f\left(x\right) = \sum_{j=0}^\infty f_j x^j$.

У подальшому можна досліджувати розподіл кількості позовів при інших обмеженнях на закони їх розподілів.

Список використаної літератури

1. Бондаренко Я. С. Теорія ризику в страхуванні. Основні поняття, приклади, задачі [Текст] : навч. посіб. / Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин. Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2010. 180 с.
2. Ястремський О. І. Моделювання економічного ризику. Київ : Либідь, 1992. 176 с.
3. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics 2nd Edition. The Society of Actuaries, 1997. 753 p.
4. Бабак В. П., Білецький А. Я., Приставка О. П., Приставка П. О. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики : Навч. посібник / МОН України. Київ : КВІЦ, 2003. 432 с.
5. Thomas M. Schadenversicherungsmathematik. Deutsche Gesellschaft fur Versicherungsmathematik, Schriftreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe. 2002. 416 s.
6. Зинченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику : навч. посібн. / Київ : Видавн.-поліґр. центр «Київський університет», 2008. 224 с.
7. Ковтун І. О, Денисенко М. П., Кабанов В. Г. Основи актуарних розрахунків : Навч. посібник / Київ : «ВД Професіонал», 2008. 480 с.
8. Jedrzychowska A. Bridge Life Insurance for Households—Diagnosis and Motives. *Risks.* 2022. Vol. 10, No. 4. P. 113–133. DOI: https://doi.org/10.3390/risks10040081
9. Paolucci F., Przemyslaw M., Sowa M. and Henry E. Mandatory Aged Care Insurance: A Case for Australia. *Ageing & Society.* 2015. Vol. 35, No. 2. P. 231–245.
10. Pitacco E. Health Insurance. Basic Actuarial Models. Berlin-Heidelberg : Springer, 2014. 172 p.
11. Marciniuk A. and Zmyślona B. Marriage and Individual Equity Release Contracts with Dread Disease Insurance as a Tool for Managing the Pensioners' Budget. *Risks.* 2022. Vol. 10, No. 7. P. 113–133. DOI: https://doi.org/10.3390/risks10070140

Illicheva L. M, Avdieieva T. V., Tomaschuk O. P. Estimation of the number of lawsuits formed according to the scheme of chain reaction and branching process.

The total value of client claims for a certain period of time is important for the correct management of an insurance company. The paper considers the case when the number of lawsuits will increase according to a chain reaction or in accordance with a branching process. Such an increase in the number of claims is usually associated with cases of natural disaster (storms, major floods) or military operations. If claims are formed according to the scheme of a chain process, that is, each claim can be satisfied with probability q or turn into m similar claims with probability p, then at stage n the average number of claims will be equal to $(pm)^n$. If claims are formed according to the scheme of a branching process, the formula for Ex^{Z_n} is given, where Z_n is the expected number of claims at the n-th stage.

Keywords: random variable that does not depend on the future, chain process, branching process, modeling the number of lawsuits, average number of lawsuits.

References

1. Bondarenko, Ya. S., Turchyn, V. M., & Turchyn, E. V. (2010). *Theory of risk in insurance. Basic concepts, examples, problems [Text].* Dnipropetrovsk: RVV DNU, 2010 [in Ukrainian].
2. Yastremsky, O. I. (1992). *Modeling of economic risk.* Kyiv: Lybid [in Ukrainian].
3. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. *Actuarial Mathematics 2nd Edition.* The Society of Actuaries, 1997.
4. Babak, V. P., Biletskyi, A. Ya., Prystavka, O. P., & Prystavka, P. O. (2003). *Basics of probability theory and mathematical statistics: Education manual.* Kyiv: KVITS [in Ukrainian].
5. Thomas, M. (2002). Schadenversicherungsmathematik. *Deutsche Gesellschaft fur Versicherungsmathematik. Schriftreihe Angewandte Versicherungsmathematik.* Verlag Versicherungswirtschaft: Karlsruhe [in Germany].
6. Zinchenko, N. M. (2008). *Mathematical methods in the theory of risk: Education manual.* Kyjv: Kyiv University [in Ukrainian].
7. Kovtun, I. O., Denysenko, M. P., & Kabanov, V. G. (2008). *Basics of actuarial calculations.* Education manual. Kyjv: VD Professional [in Ukrainian].
8. Jedrzychowska, A. (2022). Bridge Life Insurance for Households—Diagnosis and Motives. *Risks,* 10(4), 113–133. https://doi.org/10.3390/risks10040081
9. Paolucci, F., Przemyslaw, M., Sowa, M., & Henry, E. (2015). Mandatory Aged Care Insurance: A Case for Australia. *Ageing & Society,* 2015. 35(2), 231–245.
10. Pitacco, E. (2014). *Health Insurance. Basic Actuarial Models.* Berlin-Heidelberg: Springer.
11. Marciniuk, A., & Zmyślona, B. (2022). Marriage and Individual Equity Release Contracts with Dread Disease Insurance as a Tool for Managing the Pensioners' Budget. *Risks,* 10(7), 113–133. https://doi.org/10.3390/risks10070140

Одержано 03.09.2024