УДК 517.977.8, 517.929
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).18-28

А. О. Бардан

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій
bardan.andrii@chnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-3250-2326

УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГРИ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗБУРЕНЬ

У роботі розглядається задача диференціальної гри переслідування, коли на рух переслідувача і втікача накладені зовнішні малі збурення. Застосовано та обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними для побудови спрощеної системи рівнянь. Досліджено вплив багаточастотних збурень на конфліктно-керований процес. Доведено існування та єдиність розв'язку початкової задачі і побудовано оцінку відхилення розв'язків точної усередненої системи з однаковими початковими умовами на довільному скінченному часовому відрізку $[0, L]$. Розглянуто випадки, коли матриця лінійної частини залежить як від часу, так і від амплітудних змінних. Наведено приклад диференціальної гри «Простий рух», який модифіковано через накладення збурень, та знайдено час завершення переслідування для точної задачі та у випадку зі збуренням. Проаналізовано вплив збурень на існування розв'язку та на час завершення переслідування диференціальної гри.

Ключові слова: диференціальна гра переслідування, багаточастостне збурення, метод усереднення, осциляційний інтеграл, резонанс.

1. Вступ. Одним з важливих та актуальних напрямків досліджень у прикладній математиці є теорія диференціальних ігор, започаткована американським вченим Р. Айзексом [1] у середині XX століття. Її початок та розвиток стимулював численні дослідження з керування процесами, які функціонують в умовах конфлікту та невизначеності.

Значного прогресу в розвитку теорії диференціальних ігор досягли українські вчені. Одними з перших були праці Б. М. Пшеничного [2], які присвячені методам розв'язування ігрових задач зближення-відхилення керованих об'єктів. У дослідженнях А. О. Чикрія, викладених у монографії [3] та багатьох інших його працях, розроблено та впроваджено метод розв'язуючих функцій для дослідження широких класів ігрових задач, а саме для стаціонарних і нестаціонарних конфліктно-керованих процесів, які описуються звичайними і диференціально-різницевими рівняннями, стохастичними рівняннями та рівняннями з частинними похідними [4–6].

У диференціальних іграх кожен із гравців обирає керування, аналізуючи відому йому інформацію про суперників. Відповідно, дії одного з гравців можуть вплинути на можливі дії інших гравців. Проте у процесі переслідування, як на переслідувачів, так і на втікачів можуть накладатися збурення, які породжені метеорологічними факторами, спричинені внаслідок воєнних дій або іншими, незалежними від гравців чинниками. У багатьох таких задачах збурення є багаточастотними і в процесі еволюції може досягатися резонанс частот, умова якого

$$(k, \omega) := k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m = 0,$$

де ω_i — частоти, $k_i \in \mathbb{Z}, |k| = |k_1| + \ldots + |k_m| \neq 0, m \geq 2$.

У даній праці за допомогою методу усереднення [7] досліджується вплив багаточастотних збурень на конфліктно-керований процес.

2. Постановка задачі. Нехай керування переслідувача задано рівнянням

$$\dot{x} = A_1 x + \varphi_1(u), \tag{1}$$

де x — фазовий вектор, $x \in \mathbb{R}^{n_1} \in D_1$, який складається з геометричних координат, швидкостей і прискорень переслідувача, D_1, — обмежена область, A_1 — квадратна матриця порядку n_1, $\varphi_1(u)$ — функція керування, u — параметр керування переслідувача, $u \in U$, U — область керування.

Відповідно керування втікача задається рівнянням

$$\dot{y} = A_2 y + \varphi_2(v), \tag{2}$$

де y — фазовий вектор втікача, $y \in \mathbb{R}^{n_2} \in D_2$, D_2 — обмежена область, A_2 — квадратна матриця порядку n_2, $\varphi_2(v)$ — функція керування втікача, v — параметр керування втікача відповідно, $v \in V$, V — область керування. Області U та V — непорожні компакти в $\mathbb{R}^{n_1}$ та $\mathbb{R}^{n_2}$ відповідно.

Запишемо рівняння (1), (2) у вигляді одного рівняння

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \tag{3}$$

де $z = col(x, y)$ — фазовий вектор, $A = (A_1, A_2)$ — блочна матриця порядку $n = n_1 + n_2$, $\varphi(u, v) = col(\varphi_1(u), \varphi_2(v))$ — блок керування.

Нехай задана термінальна множина [3]

$$M^* = M^0 + \varepsilon S, \tag{4}$$

де M^0 – лінійний підпростір в $\mathbb{R}^n, S$ — сфера з ортогонального доповнення до M^0 в просторі $\mathbb{R}^n$, параметр $\varepsilon \geq 0$ визначає радіус цієї сфери.

Кожен з гравців обирає керування у вигляді деяких функцій та впливає на процес (3). Переслідувач намагається вивести траєкторію процесу (3) на термінальну множину (4). У свою чергу, мета втікача — уникнути зустрічі траєкторії процесу (3) з термінальною множиною (4), або якомога довше відтягнути момент зустрічі.

У лінійному стаціонарному випадку керування для переслідувача і втікача задається так:

$$\begin{gathered} \dot{x} = Bx + u,\; x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \dot{y} = Cy + v,\; y \in \mathbb{R}^{n_2}, \end{gathered}$$

де B і C – квадратні матриці із сталими елементами порядку n_1 і n_2 відповідно.

Подібні системи закладені в основу більшості практичних методів переслідування, таких як погонна крива, паралельне переслідування, переслідування із випередженням [1].

Розглянемо задачу (3) у випадку, коли на рух переслідувача і втікача накладені зовнішні малі збурення. Тоді система рівнянь (3) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = A(t, a, \psi)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi), \tag{5}$$

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \psi), \tag{6}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y(\tau, a, \psi), \tag{7}$$

де $a \in D$ — вектор амплітудних змінних, D — обмежена область в $\mathbb{R}^{n_k}, \psi \in \mathbb{R}^m, m \geq 1$ — вектор фазових змінних, $\tau = \mu t$ — повільний час, μ — малий параметр, $\mu \in (0, \mu_0]$, вектор-функції X, Y, Z — 2π-періодичні за компонентами вектора ψ.

Якщо $m = 1$, то система рівнянь (6), (7) називається одночастотною, для $m > 1$ — багаточастотною. У багаточастотному випадку дослідження і побудова розв'язку системи рівнянь (6), (7) значно ускладнюється внаслідок можливого резонансу частот. Ефективна оцінка похибки методу усереднення, порядок якої $O(\mu^\alpha), 0 < \alpha \leq m^{-1}$, для повільних і швидких змінних одержується, якщо $\omega = \omega(\tau)$. Якщо ж $\omega = \omega(\tau, a)$ то ефективна оцінка одержується тільки для амплітудних змінних. Дослідження на скінченному і нескінченному часових інтервалах, якщо задано початкові, багатоточкові або інтегральні умови, викладено в монографії А. М. Самойленка і Р. М. Петришина [7].

Збурення можуть впливати на матриці B і C, якими визначається рух переслідувача і втікача. Тому, в загальному випадку, ці матриці також можуть повільно змінюватись або залежати від амплітудних a і фазових φ змінних.

Для спрощення системи рівнянь (5), (6), (7) побудуємо усереднену за швидкими змінними $\psi_v, v = \overline{1, m}$ задачу, в якій керування залишається без змін. Одержимо значно простішу задачу вигляду

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = A_0(t, \bar{a})\bar{z} + \varphi(u, v) + \mu Z_0(\tau, \bar{a}), \tag{8}$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}), \tag{9}$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y_0(\tau, \bar{a}), \tag{10}$$

де $\bar{z}(0) = z_0, \bar{a}(0) = a_0, \bar{\psi}(0) = \psi_0$.

Вектор-функція A_0 набуває такого вигляду

$$A_0(t, \bar{a}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} A(t, a, \psi)\, d\psi_1 \ldots d\psi_m,\ \psi_k \in \mathbb{R}^m.$$

Аналогічний вигляд мають вектор-функції Z_0, X_0 та Y_0.

Розв'язавши задачу Коші для рівняння (9), знаходимо розв'язок $\bar{a}(\tau) = \bar{a}(\tau; a_0)$, що суттєво спрощує рівняння (8). Зі знайденим розв'язком $\bar{a}(\tau) = \bar{a}(\tau; a_0)$, знаходження розв'язку $\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu)$, для випадку повільно змінних частот $\omega = \omega(\tau)$, зводиться до задачі інтегрування

$$\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu) = \psi_0 + \int_0^\tau \left(\frac{\omega(s)}{\mu} + Y_0(s, \bar{a}(s, a_0)) \right) ds.$$

Також значно спрощується рівняння (5), оскільки вектор-функція A_0 і Z_0 не залежить від вектора швидких змінних ψ.

Обґрунтуємо метод усереднення для системи рівнянь (5), (8) для випадку повільно змінних частот $\omega_v(\tau)$. Для цього доведемо існування і єдиність розв'язку початкової задачі і побудуємо оцінку розв'язків точної усередненої системи на довільному скінченному часовому відрізку $t \in [0, L]$, якщо початкові умови збігаються. Для цього застосуємо оцінку похибки методу усереднення для системи (6), (7) на асимптотично великому проміжку $[0, L\mu^{-1}]$, яка явно залежить від малого параметра μ [7].

Наведемо відповідну теорему, для цього скористаємось такими позначеннями: $W_p(\tau) - p \times m$ матриця, елементи якої мають вигляд $(\omega_\nu^{(j-1)}(\tau))_{j,\nu=1}^{p,m}$, $p \geq m$, де $\omega_\nu \in C[0, \tau]$, $l \geq p$. $W_p^T(\tau) -$ транспонована до матриці $W_p(\tau)$. Вектор-функція $c(t, a, \psi) := (X(\tau, a, \psi); Y(\tau, a, \psi))$.Якщо $p = m$, то $det\ W_m(\tau)$ — визначник Вронського.

Теорема 1. *[7] Нехай виконуються умови:*

1) *вектор-функції $c(t, a, \psi) \in C_\psi^{l_1}(D, \sigma_1)$, $\frac{\partial}{\partial \tau} c(t, a, \psi) \in C_\psi^{l_2}(D, \sigma_1)$, $\frac{\partial}{\partial x} c(t, a, \psi) \in C_\psi^{l_3}(D, \sigma_1)$, $\min\{l_1 - 1, l_2, l_3\} \geq m$, $\omega_\nu \in C^l[0, L]$, де $C_\psi^{l_i}(D, \sigma_1)$ — множина функцій, які при кожному фіксованому μ мають неперервні по τ, a, ψ і рівномірно обмежені сталою σ_1 на множині $(t, a, \psi) \in D \times R^m \times [0, L] \times \times (0, \mu_0] \equiv D$, частинні похідні до порядку l включно;*
2) $\det\left(W_p^T(\tau) W_p(\tau)\right) \neq 0$ *при $\tau \in [0, L]$ і деякому мінімальному $m \leq p \leq l + 1$;*
3) *для всіх $\tau \in [0, L], y \in D_1$ і $\mu \in (0, \mu_0]$ існує єдиний розв'язок рівняння (9) із початковою умовою $a(0, a_0) = a_0$ і крива $\bar{a} = \bar{a}(\tau, \bar{a}_0)$ лежить в області D разом із своїм ρ — околом.*

Тоді можна вказати таку незалежну від μ сталу σ_2, що при досить малому $\mu_0 > 0$ для кожних $\tau \in [0, L], a_0 \in D_1, \psi_0 \in \mathbb{R}^m$ і $\mu \in (0, \mu_0)$ правильна оцінка

$$\|a(\tau, a_0, \psi_0, \mu) - \bar{a}(\tau, a_0, \mu)\| + \|\psi(\tau, a_0, \psi_0, \mu) - \bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu)\| \leq \sigma_2 \mu^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

3. Випадок залежності матриці A від t. Розглянемо спочатку випадок, коли матриця A залежить від часу t, тоді рівняння (5) матиме вигляд

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi). \tag{12}$$

Відповідно усереднене за швидкими змінними рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = A(t)\bar{z} + \varphi(u, v) + \mu Z_0(\tau, \bar{a}). \tag{13}$$

Теорема 2. *Нехай:*

1) *виконуються умови теореми 1 для системи рівнянь (6), (7);*
2) *вектор-функції $Z(\tau, a, \psi)$ із рівняння (12) задовольняє умови 1-3 теореми 1;*
3) *існує єдиний розв'язок рівняння (13) із початковою умовою $\bar{z}(0, \mu) = z_0$ і крива $\bar{z}(t, \mu)$ — лежить в області $D_1 \times D_2$ разом із деяким ρ_2 — околом, $\rho_2 > 0$, для $(t, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu_0]$.*
4) *функція φ — неперервна за сукупністю змінних на компакті $U \times V$;*
5) *матриця $A(t)$ — неперервна і $\int_0^L ||A(t)||dt < \infty$.*

Тоді можна вказати таку не залежну від μ, сталу c_3, що при досить малому $\mu_0 > 0$ для кожних $t \in [0, L], z_0 \in D_1$, де D_1 — це множина точок області G, які входять в цю область із ρ — околом, і $\mu \in (0, \mu_0]$, правильна оцінка

$$\|z(t, z_0, a_0, \psi_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq c_3 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Введемо наступне позначення $b_0 := (a_0, \psi_0)$. Із гладкості правих частин системи рівнянь (5), (6), (7) випливає існування єдиного розв'язку задачі Коші на деякому інтервалі $(0, t_1), t_1 \leq L$. Тоді із рівнянь (12) і (13) для $t \in (0, t_1)$ одержимо

$$z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu) = \int_0^t (A(s)(z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)))\, ds +$$
$$+\mu \int_0^t (Z(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu), \psi) - Z_0(\mu s, \bar{a}(\mu s, a_0)))\, ds = S_1 + S_2.$$

Для доданку S_2 виконаємо такі перетворення

$$S_2 = \mu \int_0^t (Z(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu), \psi) - Z_0(\mu s, \bar{a}(\mu s, a_0)))\, ds +$$
$$+\mu \int_0^t (Z_0(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) - Z_0(\mu s, \bar{a}(\mu s, a_0)))\, ds +$$
$$+\mu \sum_{k \neq 0} \int_0^t (Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp(i(k, \psi(\mu s, b_0, \mu))))\, ds = S_3 + S_4.$$

Тоді

$$z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu) = S_1 + S_3 + S_4.$$

Побудуємо оцінки норми кожного із доданків $S_v, v = 1, 3, 4$. Для S_1 маємо

$$\|S_1\| \leq \int_0^t \|A(s)\| \cdot \|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| ds.$$

На підставі умови 1 із теореми 1 та оцінки (11) одержимо

$$\|S_3\| \leq \mu \int_0^t \|a(\mu s, b_0, \mu) - \bar{a}(\mu s, a_0)\| ds \leq \sigma_3 \sigma_2 \mu t \mu^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_2 \sigma_3 L \mu^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_4 \mu^{\frac{1}{p}},$$

де $\sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3 L$.

Для оцінки норми S_4 застосуємо оцінку осциляційного інтеграла, одержану в [7]. А саме, якщо виконуються умови теореми 1 і $f \in C^1[0, L]$, то для досить малого $\mu_0 > 0$ і $k \neq 0$

$$\left\| \int_0^\tau \left(f(s) \exp\left(\frac{i}{\mu} \int_0^s (k, \omega(z))\, dz \right) \right) ds \right\| \leq$$
$$\leq \sigma_5 \mu^{\frac{1}{p}} \left(\max_{s \in [0, L]} \|f(s)\| + \frac{1}{\|k\|} \max_{s \in [0, L]} \left\| \frac{df}{ds} \right\| \right). \tag{14}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\mu \in (0, \mu_0]$, де $\sigma_5 > 0$ і не залежить від μ і k.

Скориставшись інтегральним зображенням рівняння (10), запишемо підінтегральну функцію із S_4 у вигляді

$$S_4 = Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp\left(i\left(k, \psi_0(\mu s, b_0, \mu) + \int_0^s \left(\frac{\omega(z)}{\mu} + \psi(\mu s, b_0, \mu)\right) dz\right)\right) =$$

$$= Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp\left(i\left(k, \psi_0(\mu s, b_0, \mu)\right)\right) \exp\left(i \int_0^s k, \psi(\mu s, b_0, \mu) dz\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{\mu}\int_0^s k, \omega(z) dz\right).$$

Для норми S_4 одержимо:

$$\|S_4\| \leq \sum_{k\neq 0} \left\| \int_0^\tau \left(f_k(s,\mu) \exp\left(\frac{i}{\mu}\int_0^s (k, \omega(z))\, dz\right)\right) ds \right\|,$$

де

$$f_k(s,\mu) = Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp\left(i\left(k, \psi_0(\mu s, b_0, \mu)\right)\right) \exp\left(i \int_0^s (k, \psi(\mu s, b_0, \mu))\, dz\right) \equiv$$

$$\equiv Z_k(s,a) \exp(i\xi).$$

Для норми f_k маємо

$$\|f_k(s,\mu)\| \leq \|Z_k(s,a)\|.$$

Далі знаходимо

$$\frac{df_k}{ds} = \left(\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial s} + \frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial a} X(s,a,\psi)\right) \exp(i\xi) + i Z_k(s,a)\, (k, Y(s,a,\psi)) \exp(i\xi),$$

і відповідну оцінку

$$\left\|\frac{df_k}{ds}\right\| \leq \left\|\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial s}\right\| + \sigma_6 \left\|\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial a}\right\| + \sigma_6 \|k\| \cdot \|Z_k\|.$$

Нехай $c_1 = \sigma_5(1+\sigma_6)$. Застосувавши оцінку (14) одержимо

$$\|S_4\| \leq c_1 \mu^{\frac{1}{p}} \sum_{k\neq 0} \left(\sup_{G_1} \|Z_k(s,a)\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial s}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial a}\right\|\right)\right) \leq c_2 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

де $\mu \in (0, \mu_0], s \in (0, t_1), a \in D$,

$$c_2 = c_1 \sum_{k\neq 0} \left(\sup_{G_1} \|Z_k(s,a)\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial s}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial Z_k(s,a)}{\partial a}\right\|\right)\right).$$

Врахувавши оцінки норм $S_v, v = 1,3,4$ на підставі інтегральну нерівності Белмана [8], отримаємо

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq (c_2 + \sigma_4)\mu^{\frac{1}{p}} \exp\left(\int_0^L \|A(s)\| ds\right) \leq c_3 \mu^{\frac{1}{p}}, \quad (15)$$

де $c_3 = (c_2 + \sigma_4) \exp\left(\int_0^L \|A(s)\| ds\right)$.

Одержана оцінка виконується для всіх $s \in [0, t_1]$ і $\mu \in (0, \mu_1]$. Нехай

$$\mu_1 = \min\left(\frac{\rho}{2c_3}\right)^p,$$

тоді розв'язок системи (12) лежить в околі усередненої системи $\bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)$ для всіх $t \in [0, L]$, $\mu \in (0, \mu^*]$ і для цих значень виконується оцінка (15).

4. Випадок залежності матриці A від t і a. Розглянемо ще один більш загальний випадок, коли збурення впливають на керування, але матриця A залежить не тільки від часу τ, а також від вектора амплітудних змінних a. Тоді рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = A(t, a)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi). \tag{16}$$

Відповідно усереднене за швидкими змінними рівняння

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = A(t, \bar{a})\bar{z} + \varphi(u, v) + \mu Z_0(\tau, \bar{a}). \tag{17}$$

Обґрунтування методу усереднення задається такою теоремою.

Теорема 3. *Нехай:*

1) *виконуються умови теореми 1 для системи рівнянь (6),(7);*
2) *вектор-функції $Z(\tau, a, \psi)$ із рівняння (16) задовольняє умови 1-3 теореми 1;*
3) *існує єдиний розв'язок рівняння (17) із початковою умовою $\bar{z}(0, \mu) = z_0$ і крива $\bar{z}(t, \mu)$ — лежить в області $D_1 \times D_2$ разом із деяким ρ_2 — околом, $\rho_2 > 0$, для $(t, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu_0]$.*
4) *функція φ – неперервна за сукупністю змінних на компакті $U \times V$;*
5) *матрична функція $A(t, a) \in C(G), G = [0, L] \times D$ і $A(t, a) \leq M(t)$, скалярна функція $M(\tau)$ неперервна при $\tau \in [0, L]$ і $M(\tau) \geq 0$.*

Тоді можна вказати таку не залежну від μ, сталу c_9, що при досить малому $\mu_0 > 0$ для кожних $t \in [0, L], z_0 \in D_1 \mu \in (0, \mu_0]$, виконуватиметься оцінка

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq c_9 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

де D_1 — це множина точок області D, які входять в цю область із ρ — околом, $b_0 := (a_0, \psi_0)$ — стала, $c_9 > 0$ і не залежить від μ.

Доведення. Із гладкості правої частини рівняння (16) випливає існування єдиного розв'язку $z(t, z_0, b_0, \mu)$ початкової задачі на деякому інтервалі $t \in (0, t_1)$, для кожного $\mu \in (0, \mu_0]$. Тоді одержимо

$$z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu) = \int_0^t (A(s, a)z - A(s, \bar{a})\bar{z})\, ds +$$

$$+\mu \int_0^t (Z_0(\mu, a(\mu s, b_0, \mu)) - Z_0(\mu, \bar{a}(\mu s, a_0)))\, ds +$$

$$+\mu \sum_{k \neq 0} \int_0^t (Z_k(\mu, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp(i(k, \psi(\mu s, b_0, \mu))))\, ds = S_1 + S_2 + S_3.$$

Оцінки норм доданків S_2 та S_3 відомі із теореми 2:

$$\|S_2\| \le \mu \int_0^\tau \|a(\mu s, b_0, \mu) - \bar{a}(\mu s, a_0)\| ds \le \sigma_4 \mu^{\frac{1}{p}},$$
$$\|S_3\| \le c_2 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Для оцінки доданку S_1 виконаємо такі перетворення

$$S_1 = \int_0^t (A(s,a)z - A(s,\bar{a})\bar{z})\, ds = \int_0^t (A(s,a)z - A(s,a)\bar{z})\, ds +$$
$$+ \int_0^t (A(s,a)\bar{z} - A(s,\bar{a})\bar{z})\, ds = \int_0^t (A(s,a)\,(z-\bar{z}))\, ds +$$
$$+ \int_0^t ((A(s,a) - A(s,\bar{a}))\,\bar{z})\, ds = S_4 + S_5.$$

Побудуємо оцінку доданку S_4. Згідно з умовою 3

$$\|S_4\| \le \int_0^t \|A(s,a)\| \cdot \|z - \bar{z}\|\, ds \le \int_0^t M(s)\|z - \bar{z}\|\, ds.$$

Оскільки функція φ — неперервна на компакті $U \times V$, то $\max\limits_{U\times V} \|\varphi(u,v)\| \le c_4$. Враховуючи обмеження норми вектор-функції z і $z_0 \le c_5$ одержимо із (17)

$$\|\bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \le \|z_0\| + \int_0^t (\|A(s, \bar{a}(\mu s, a_0))\| \cdot \|\bar{z}(s,\mu)\|)\, ds + c_4 t +$$
$$+\mu \int_0^t \|\bar{z}(s, \bar{a}(\mu s, a_0))\| ds \le c_5 + \int_0^t (M(s)\|\bar{z}(s,\mu)\|)\, ds + (c_4 + \sigma_7\mu)t,$$

де $\|Z(s, \bar{a}(\mu s, a_0))\| \le \sigma_7$.

Застосувавши інтегральну нерівність [8], одержимо

$$\|\bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \le (c_5 + (c_4 + \sigma_7\mu)t + c_6) \exp\left(\int_0^t M(s)\, ds\right) \le$$
$$\le (c_6 + (c_5 + \sigma_7\mu_0)L + c_6) \exp\left(\int_0^t M(s)\, ds\right) = c_7.$$

Тоді оцінка норми S_5 набуває вигляду

$$\|S_5\| \le n \left(\sum_{v=1}^n \sup \left\| \frac{\partial A^{(v)}(s,a)}{\partial a} \right\|\right) c_7 t\, c_2 \mu^{\frac{1}{p}} \le c_8 t\, \mu^{\frac{1}{p}},$$

де $c_8 = n c_7 t c_2 \left(\sum_{v=1}^n \sup \left\|\frac{\partial A^{(v)}(s,a)}{\partial a}\right\|\right)$, $A^{(v)}$ — стовпець матриці A.

Отже, із оцінок норм $S_v, v = \overline{1,5}$ випливає

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \le \int_0^t M(s)\|z(s,\mu) - \bar{z}(s,\mu)\| ds + c_2\mu^{\frac{1}{p}} + \sigma_4\mu^{\frac{1}{p}} + c_8 t \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Застосувавши інтегральну нерівність [8], матимемо

$$\|z(t, z_0, a_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq (c_2 + \sigma_4 + c_8 t)\mu^{\frac{1}{p}} \exp\left(\int_0^t M(s)\, ds\right).$$

Нехай $\mu^* > 0$ таке, що при $\mu < \mu^* \leq \mu_0$ виконується нерівність

$$(c_2 + \sigma_4 + c_8 L)\, \mu^{\frac{1}{p}} \exp\left(\int_0^L M(s)\, ds\right) \leq \frac{\rho}{2}.$$

Тоді розв'язок $z(t, z_0, b_0, \mu)$ існує для $t \in [0, L]$ і $\mu \in (0, \mu^*]$ та виконується оцінка

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq c_9 \mu^{\frac{1}{p}},$$

де c_9 — стала, $(c_2 + \sigma_4 + c_8 L)\, \mu^{\frac{1}{p}} \exp\left(\int_0^L M(s)\, ds\right)$.

5. Приклад. Розглянемо один з прикладів диференціальної гри, відомий як «Простий рух» [3]. У цьому випадку система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u,\ x \in \mathbb{R}^s,\ \|u\| \leq \rho, \\ \dot{y} &= v,\ y \in \mathbb{R}^s,\ \|v\| \leq \sigma. \end{aligned} \tag{18}$$

Термінальна множина замкнена і має наступний вигляд $M^* : ||x - y|| \leq \varepsilon$. Ціль переслідувача звести траєкторію процесу на цю термінальну множину. Ціль втікача уникнути зустрічі з термінальною множиною, або якомога довше відтягнути момент зустрічі.

Умова Л. С. Понтрягіна [3] виконується якщо $\rho \geq \sigma$. Тоді час переслідування можна визначити з рівняння

$$\|x_1^0 - y_1^0\| = \int_0^t (\rho - \sigma)\, d\tau + \varepsilon,$$

де x_1^0 і y_1^0 — початковий стан переслідувача та втікача відповідно.

Розв'язавши це рівняння, отримаємо час завершення переслідування для задачі (18)

$$t = \frac{\|x_1^0 - y_1^0\| - \varepsilon}{\rho - \sigma}. \tag{19}$$

З вигляду розв'язку (19) можна зробити очевидний висновок, що час переслідування досягається тоді та тільки тоді, коли $\rho - \sigma > 0$, тобто швидкість переслідувача ρ є більшою за швидкість втікача σ.

Розглянемо модифікацію диференціальної гри «Простий рух» із накладеними деякими збуреннями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \mu(\alpha + \cos\psi),\ x \in \mathbb{R}^s, \\ \dot{y} &= v + \mu(\beta + \sin\psi),\ y \in \mathbb{R}^s. \end{aligned} \tag{20}$$

Тоді усереднена за швидкими змінними система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \alpha\mu,\ x \in \mathbb{R}^s,\ \|u + \alpha\mu\| \leq \rho, \\ \dot{y} &= v + \beta\mu,\ y \in \mathbb{R}^s,\ \|v + \beta\mu\| \leq \sigma. \end{aligned} \tag{21}$$

термінальна множина залишається незмінною $M^* : ||x - y|| \leq \varepsilon$.

В цьому випадку час переслідування для системи (21) одержується з рівняння

$$\|x_1^0 - y_1^0\| = \int_0^t ((\rho + \alpha\mu) - (\sigma + \beta\mu))\, d\tau + \varepsilon.$$

Проінтегрувавши, одержимо час завершення переслідування

$$\bar{t} = \frac{\|x_1^0 - y_1^0\| - \varepsilon}{\rho - \sigma + \mu(\alpha - \beta)}. \tag{22}$$

З розв'язку (22), випливає, що час переслідування за наявності збурення $\bar{t}$ існує лише у випадку, коли $\rho - \sigma + \mu(\alpha - \beta) > 0$.

Проаналізувавши розв'язки (19) і (22) можна зробити висновок, що в залежності від значень коефіцієнта збурення μ, та коефіцієнтів впливу на гравців α і β, час завершення переслідування $\bar{t}$ для задачі зі збуренням може набувати різних значень порівняно з часом t аналогічної задачі без збурень (18).

Розглянемо два випадки:

1) $\rho - \sigma > 0$, коефіцієнт збурення $\mu > 0$, а коефіцієнт впливу збурення на втікача більший за відповідний коефіцієнт для переслідувача $\alpha > \beta$. Тоді час переслідування зі збуренням буде меншим за час переслідування без збурення, $\bar{t} < t$.
2) $\rho - \sigma < 0$, тобто швидкість втікача більша швидкості переслідувача. У такому випадку розв'язку для задачі (18) не існує. Проте модифікація задачі зі збуреннями (21) дозволяє отримати результат (впіймати втікача). Зокрема, якщо $\alpha > \beta$, то втікач буде пійманим, якщо виконується така оцінка $\mu < (\sigma - \rho)/(\alpha - \beta)$.

6. Висновок. У статті розглянуто диференціальну гру переслідування за наявності впливу багаточастотних збурень на переслідувача і втікача. Величина збурення характеризується малим параметром $\mu > 0$. Методом усереднення побудовано спрощену задачу і одержано оцінку похибки, порядок якої $\sqrt[p]{\mu}$, $p \geq m$. Проаналізовано результати переслідування в залежності від величини збурень для диференціальної гри «Простий рух».

Список використаної літератури

1. Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory With Applications to Warfare, Control and Optimization. Dover Publications, 1999. 416 p.
2. Pshenychnyi B. M. ε-Strategies in Differential Games. *Topics in differential games.* 1973. P. 45–99.
3. Chikrii A. O. Conflict-controlled processes. Boston : Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
4. Chikrii A. O., Petryshyn R. I., Cherevko I. M., Bihun Ya. I. Method of Resolving Functions in the Theory of Conflict-Controlled Processes. *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems.* 2019. Vol. 203. P. 3–33.
5. Liubarshchuk Ye. A., Bihun Ya. I., Cherevko I. M. Non-stationary Differential-Difference Games of Neutral Type. *Dynamic Games and Applications.* 2019. Vol. 9, No. 3. P. 771–779.
6. Liubarshchuk Ye. A., Bihun Ya. I., Cherevko I. M. Game Problems for Systems with Variable Delay. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, No. 4. P. 18–31.
7. Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ : Наукова думка, 2004. 474 с.
8. Pachpatte B. Inequalities for Differential and Integral Equations. New York : Academic Press, 1998. 611 p.

Bardan A. O. Averaging in the differential pursuit game problem in the presence of multifrequency disturbances.

The paper considers the problem of the differential game of pursuit, when small external disturbances are imposed on the movement of the pursuer and the escaper. The method of averaging by fast variables was applied and substantiated for creating a simplified system of equations. During the investigation the impact of multi-frequency disturbances on the conflict-driven process was analyzed. The existence and uniqueness of the solution to the initial problem was proved. Furthermore, an estimate of the deviation of the solutions of the exact averaged system with the same initial conditions on an arbitrary finite time interval $[0, L]$ was constructed. Both cases when the matrix of the linear part depends on the slow time and when it depends on the time as well as on the amplitude variables were considered. The differential game "Simple motion" was given as an example, in which it was modified through the imposition of perturbations. The pursuit completion time was found for the origin problem and in the perturbation case. As a result, the influence of perturbations on the existence of a solution and on the completion time of the pursuit in the differential game was analyzed.

Keywords: differential game of pursuit, multi-frequency disturbance, averaging method, oscillatory integral, resonance.

References

1. Isaacs, R. (1999). *Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization.* Dover Publications.
2. Pshenychnyi, B. M. (1973). ε-strategies in differential Games. *Topics in differential games,* 45–99.
3. Chikrii, A. O. (2013). *Conflict-controlled processes.* Boston: Springer Science and Business Media.
4. Chikrii, A. O., Petryshyn, R. I., Cherevko, I. M., & Bihun, Ya. I. (2019). Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Advanced control techniques in complex engineering systems,* 203, 3–33.
5. Liubarshchuk, Ye. A., Bihun, Ya. I., & Cherevko, I. M. (2019). Non-stationary differential-difference games of neutral type. *Dynamic Games and Applications,* 9(3), 771–779.
6. Liubarshchuk, Ye. A., Bihun, Ya. I., & Cherevko, I. M. (2016). Game problems for systems with variable delay. *Journal of Automation and Information Sciences,* 48(4), 18–31.
7. Samoilenko, A. M., & Petryshyn, R. I. (2004). *Matematychni aspekty teorii neliniinykh kolyvan* [Mathematical aspects of the theory of nonlinear oscillations]. Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian].
8. Pachpatte, B. (1998). *Inequalities for differential and integral equations.* New York: Academic Press.

Одержано 02.10.2024