УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).223-229

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3], Н. І. Когут[4]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістр факультету математики та цифрових технологій
kohut.nikita@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-3305-9948

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ ДЕДЕКІНДА

У даній роботі показано, що клас монотонних функцій співпадає з класом тупикових диз'юнктивних нормальних форм (ТДНФ). Монотонні функції від n змінних можна задати на вершинах n-мірного кубу. У роботі знаходяться всі монотонні функції від n змінних ($n = 1, 2, \ldots, 13$), які є одноярусними ТДНФ. У даній роботі запропонований алгоритм для знаходження монотонних функцій, які є одноярусними тупиковими диз'юнктивними нормальними формами для n змінних.

Ключові слова: монотонні функції, проблема Дедекінда, класи Поста, одноярусні монотонні функції.

1. Вступ. У роботі проведені дослідження класу монотонних функцій багатьох змінних. Вивчена структура класу тупикових диз'юнктивних нормальних форм. Оскільки клас монотонних функцій для $n > 9$ майже невивчений, то дана робота присвячена дослідженню підкласів монотонних функцій для $n = 9, 10, 11, 12, 13$. Монотонні функції знаходять широке застосування в теорії перемикальних схем, у криптографії, у теорії груп і кілець, а також інших алгебраїчних структур.

Функція $f(x) : Z_2^n \to Z_2$ називається монотонною, якщо для будь-яких двох порівнювальних наборів $x, y \in Z_2^n$ виконується умова $f(x) \leq f(y)$. Нехай D^n — множина всіх монотонних булевих функцій з Z_2^n. Задача визначення потужності множини $|D^n|$ називається проблемою Дедекінда, а безпосередньо потужність множини $d_n = |D^n|$ називається числом Дедекінда для вказаного n.

У 1897 році Дедекінд розв'язав цю задачу для $n = 4$, у 1940 році Черч для $n = 5$ та Вард для $n = 6$ у 1946 році. На даний час відомі значення числа Дедекінда для булевих функцій від семи, восьми та дев'яти змінних [1]. У [2] Відеман підрахував число монотонних функцій для восьми змінних. Цей результат був підтверджений у [3].

У 1954 році Гільберт отримав таку оцінку числа Дедекінда $2^{C_{n,\,[n/2]}} \le d_n \le$ $\le n^{C_{n,\,[n/2]+2}}$. Надалі верхня оцінка була покращена до $3^{C_{n,\,[n/2]}}$. Відомі роботи [2, 3, 4, 5], у яких було покращено цю оцінку.

У роботі [6] показано, що за характеристикою Поста можна побудувати сімнадцять непорожніх класів, які утворюють решітку Поста. Для тринадцяти класів знайдені формули обчислення потужностей цих класів для довільного n. Клас монотонних функцій — це об'єднання підкласів $n_0, n_3, n_9, n_{12}, n_{14}$. Для класів n_0, n_9, n_{14} знайдені оцінки обчислення потужностей для довільної кількості змінних, а для класів n_3, n_{14} такі оцінки не знайдені.

2. Основні результати.

Означення 1. *Елементарною кон'юнкцією, утвореною із булевих змінних $X_1, X_2, \dots, X_n$, називається вираз вигляду $X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}$, де $k \le n$ та $i_p \ne i_q$, якщо $p \ne q$.*

Ранг елементарної кон'юнкції це число k, яке визначає кількість змінних, які входять до її складу.

Твердження 1. *Всі елементарні кон'юнкції є монотонними функціями.*

Доведення випливає з того факту, що кон'юнкція є монотонною функцією, а клас монотонних булевих функцій є замкнутим.

Означення 2. *Диз'юнктивною нормальною формою називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій.*

Твердження 2. *Всі диз'юнктивні нормальні форми є монотонними функціями.*

Доведення аналогічне доведенню попереднього твердження.

Означення 3. *Тупиковою диз'юнктивною нормальною формою монотонної функції називається диз'юнктивна нормальна форма, у якій ні одна елементарна кон'юнкція не є власною частиною іншої елементарної кон'юнкції.*

Теорема 1. *Тупикові диз'юнктивні нормальні форми є канонічними.*

Доведення. Доведемо, що кожна монотонна функція має єдину канонічну тупикову диз'юнктивну нормальну форму.

Випишемо системи тотожностей булевої алгебри, які відносяться до монотонних функцій.

1. $0 \wedge 0 = 0$;
2. $0 \vee 0 = 0$;
3. $1 \wedge 1 = 1$;
4. $1 \vee 1 = 1$;
5. $0 \wedge x = 0$;
6. $0 \vee x = x$;
7. $1 \wedge x = x$;
8. $1 \vee x = 1$;
9. $x \vee x = x$;

1. $x \wedge x = x$;
2. $x \vee y = y \vee x$;
3. $x \wedge y = y \wedge x$;
4. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
5. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
6. $(x \vee y) \wedge z = x \wedge z \vee y \wedge z$;
7. $x \vee y \wedge z = (x \vee y)\,(x \vee z)$;
8. $x \vee x \wedge y = x$;
9. $x\,(x \vee y) = x$.

Легко показати, що якщо у формулу монотонної функції входять константи нуля та одиниці, то їх можна поглинути, використовуючи тотожності 1–8, крім випадку, якщо функції є константою нуля або одиниці.

За допомогою тотожностей 9–18 отримаємо диз'юнктивну нормальну форму, яка є тупиковою. Доведемо, що тупикова диз'юнктивна нормальна форма є канонічною. Нехай монотонна функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має дві тупикові диз'юнктивні нормальні форми $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_l$ і $q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_k$. Зрозуміло, що $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_l = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_k$. Покажемо, що $\forall p_i,\ i = 1, 2, \ldots, l$, $\exists q_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$, такі, що p_i і q_j лексикографічно співпадають. Нехай $p_i = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$. Розглянемо функцію $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на наборі $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_m} = 1$, а решта змінних $x_{i_s} = 0$; $s \notin \{1, 2, \ldots, m\}$. На цьому наборі $p_i = 1$, а тому і $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$. У цьому випадку повинна існувати $q_j = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k}$, яка на цьому наборі дорівнює одиниці, а це можливо тільки тоді, якщо кожна змінна x_{j_r}, $r \in \{1, 2, \ldots, l\}$ належить p_i.

Розглянемо випадок, коли q_j є власною частиною p_i. На наборі, для якого $x_{j_1} = x_{j_2} = \ldots = x_{j_l} = 1$, а решта змінних рівна нулю, отримаємо, що в диз'юнктивній нормальній формі $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_l$ повинна існувати елементарна кон'юнкція p_v, яка є власною частиною p_i. Це протирічить тому, що $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_l$ є тупиковою диз'юнктивною нормальною формою. Теорема доведена.

Означення 4. *Тупиковою диз'юнктивною нормальною формою k-го порядку називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, які мають ранг k.*

Наприклад, $x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_1 x_2 x_5$ — тупикова диз'юнктивна нормальна форма третього порядку, а $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ — п'ятого порядку.

Потужність тупикової диз'юнктивної нормальної форми — це число, що дорівнює кількості диз'юнктів у диз'юнктивній нормальній формі.

Наприклад, $|x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_4 x_5| = 3$, а $|x_1 \vee x_3 x_4| = 2$.

Позначимо через $D^n_{i,j}$ — множину тупикових диз'юнктивних нормальних форм від n змінних i-го порядку з рангом j.

Для $n = 4$ випишемо всі елементи множини $D^4_{i,j}$, і знайдемо формули для знаходження потужності $D^4_{i,j}$.

1) $D^4_{1,1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\left|D^4_{1,1}\right| = C^1_4 = 4$.
2) $D^4_{1,2} = \{x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_3, x_1 \vee x_4, x_2 \vee x_3, x_2 \vee x_4, x_3 \vee x_4\}$, $\left|D^4_{1,2}\right| = C^2_4 = 6$.
3) $D^4_{1,3} = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_4, x_2 \vee x_3 \vee x_4,\ x_2 \vee x_3 \vee x_4\}$, $\left|D^4_{1,3}\right| = C^3_4 = 4$.
4) $D^4_{1,4} = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\}$, $\left|D^4_{1,4}\right| = C^4_4 = 1$.
5) $D^4_{2,1} = \{x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4, x_3 x_4\}$, $\left|D^4_{2,1}\right| = C^2_4 = 6$.
6) $D^4_{2,2} = \{x_1 x_2 \vee x_1 x_3, x_1 x_2 \vee x_1 x_4, x_1 x_2 \vee x_2 x_3, x_1 x_2 \vee x_2 x_4, x_1 x_2 \vee x_3 x_4,$
$x_1 x_3 \vee x_1 x_4, x_1 x_3 \vee x_2 x_3, x_1 x_3 \vee x_2 x_4, x_1 x_3 \vee x_3 x_4, x_1 x_4 \vee x_2 x_3, x_1 x_4 \vee x_2 x_4,$
$x_1 x_3 \vee x_3 x_4, x_2 x_3 \vee x_2 x_4, x_2 x_4 \vee x_3 x_4, x_2 x_3 \vee x_3 x_4\}$.
$\left|D^4_{2,2}\right| = C^2_6 = 15$.

Аналогічно, знаходимо потужність решти множин $D^4_{i,j}$, а саме:

$$\left|D^4_{2,3}\right| = C^3_6 = 20; \quad \left|D^4_{2,4}\right| = C^4_6 = 15; \quad \left|D^4_{2,5}\right| = C^5_6 = 6; \quad \left|D^4_{2,6}\right| = C^6_6 = 1;$$

$$\left|D^4_{3,1}\right| = C^3_4 = 4; \quad \left|D^4_{3,2}\right| = C^2_4 = 6; \quad \left|D^4_{3,3}\right| = C^3_4 = 4;$$

$$\left|D^4_{3,4}\right| = C^4_4 = 1; \quad \left|D^4_{4,1}\right| = C^4_4 = 1.$$

Означення 5. *Тупикова диз'юнктивна нормальна форма називається одноярусною, якщо вона є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій, які мають однаковий ранг.*

Твердження 3. *Кількість одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм для чотирьох змінних дорівнює 94 і обчислюється за формулою*

$$\sum_{t=1}^{4} C^t_{C^1_4} + \sum_{t=1}^{4} C^t_{C^2_4} + \sum_{t=1}^{4} C^t_{C^3_4} + \sum_{t=1}^{4} C^t_{C^4_4}.$$

У даній роботі запропонований алгоритм для знаходження монотонних функцій, які є одноярусними тупиковими диз'юнктивними нормальними формами для n змінних.

Узагальнюючи міркування, наведені для $n = 4$, отримаємо відповідні формули для обчислення одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм для n змінних.

Теорема 2. *Кількість одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм дорівнює*

$$\sum_{t=1}^{n} C^t_{C^1_n} + \sum_{t=1}^{n} C^t_{C^2_n} + \ldots + \sum_{t=1}^{n} C^t_{C^n_n} = \left|D^n_{1,1}\right| + \left|D^n_{1,2}\right| + \ldots + \left|D^n_{1,n}\right| +$$

$$+ \left|D^n_{2,1}\right| + \left|D^n_{2,2}\right| + \ldots + \left|D^n_{2,n}\right| + \ldots + \left|D^n_{n,1}\right| + \left|D^n_{n,2}\right| + \ldots + \left|D^n_{n,n}\right|.$$

У даній роботі розроблено програмне забезпечення на мові Python для обчислення одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм.

Дана мова програмування має вбудовану підтримку роботи з великими числами (довга арифметика), оскільки вже при значеннях $n \geq 7$ числові операнди не можуть бути представлені стандартними 64-бітними типами даних. Python-скрипт є прямою реалізацією вище наведених формул — одним циклом обчислюється сума $\left|D^n_{1,1}\right| + \left|D^n_{1,2}\right| + \ldots + \left|D^n_{n,n}\right|$, а іншим — значення кожного доданку, тобто $\sum\limits_{t=1}^{n} C^t_{C^i_n}$. Окрім цього, застосовані наступні оптимізації, необхідні для отримання бажаного інтервалу результатів:

- Обчислення біноміального коефіцієнту C^k_n реалізовано як функцію-підпрограму. Для невеликих чисел, підійшла б рекурсивна реалізація даної формули: $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$, проте в нашому випадку було застосоване усунення хвостової рекурсії (tail recursion elimination), щоб уникнути переповнення стеку.
- Додатково в функцію обчислення біноміального коефіцієнту додано кешування отриманих значень, із зберіганням їх у хеш-мапі.
- Вхідні параметри n, k хешуються за допомогою функції парування Сзудзіка [7], що дозволяє уникнути створення списків чи великих рядків при зберіганні значення-ключа в хеш-мапі.
- Весь скрипт був паралелізований за допомогою вбудованого модуля concurrent. Це дозволило розподілити обчислення кожного із значень n між різними ядрами процесора.

Алгоритм можна і надалі оптимізовувати, проте даних покращень достатньо для отримання необхідних емпіричних даних для цієї роботи.

Позначимо кількість одноярусних монотонних функцій для довільного n через M_n'. Після близько 2 годин виконання програми на 16-ядерному Intel процесорі, отримали результати для усіх значень n від 1 до 13, які наведені у табл. 1.

Таблиця 1.

Кількість одноярусних монотонних функцій

n	M_n'	d_n
1	1	3
2	4	6
3	15	20
4	94	168
5	2109	7581
6	1114236	7828354
7	68723671291	2414682040998
8	1180735735906024030714	56130437228687557907788
9	170141183460507917357914971986913657849	286386577668298411128469151667598498812366
10	7237005577335553223087828975127304179197147198604070555943173844710572689400	
11	23817051317718446589520242536874132581704494608451604223152615851205423435630529490414414868197560846685672979028358164214694168094211837943	
12	141812983367708498267942666831007057202511448421643827125349472119773535022654196943944209450975037768339007732459544512725221726759486456306391423731808917670558303020063768732533713950908137270269160833647989425881755169137192813409227664868035160693806114244902552366349295606	
13	7387586092700242099654546576830696772603866567292789055868426442323956818125567473217880665869221255368279336978185916233370357201699933360013660303978745892764195522848354539705793513919597732734884156529761033753427195519969697624270178558596316217257846017103289532683322885282348641152281865886668025955910760507230758696036539020726102730094647769940544922472927488214661083640608334310504673740186874300616390261927175493611791369984942853541797421226793552819432389440434687061961255725549982243785045998321653	

Оскільки наразі відомі значення чисел Дедекінда до $n = 9$, то зобразимо на графіку відносну частку одноярусних монотонних функцій від загальної кількості монотонних функцій $\left(M_n'/d_n\right)$.

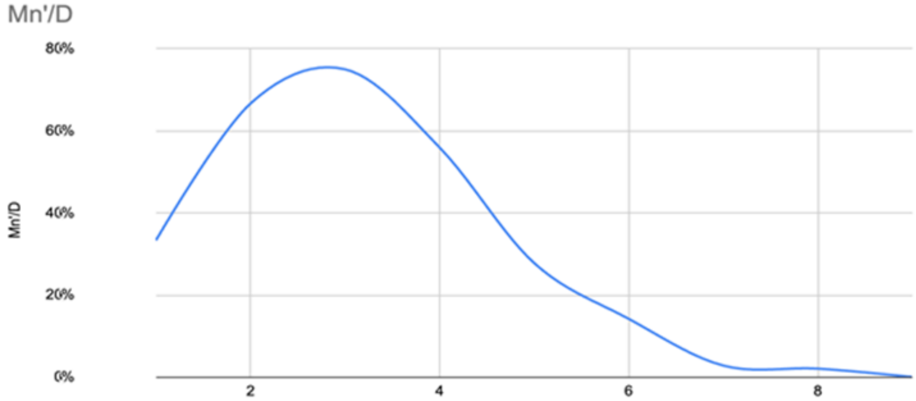

Рис. 1. Графік функції $y_n = M'_n/d_n$.

3. Висновки. У роботі показано, що для $n = 13$ число одноярусних монотонних булевих функцій більше ніж 10^{518}. Через це обчислення кількості монотонних функцій, тобто знаходження чисел Дедекінда, яке значно перевищує кількість одноярусних ТДНФ не є перспективною. Представляє інтерес аналітичне описання підкласів n_3, n_{14} монотонних функцій і знаходження їх потужності. Інший напрям у знаходженні числа Дедекінда полягає у поділі множини монотонних функцій на класи функцій, які є багатоярусними диз'юнктивними нормальними формами. У наступній роботі планується дослідження монотонних функцій, які належать кільком ярусам n-мірного кубу.

Список використаної літератури

1. Van Hirtum L., De Causmaecker P., Goemaere J., et al. A computation of D(9) using FPGA Supercomputing. Published online. 2023. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.03039
2. Wiedemann D. A computation of the eighth Dedekind number. *Order.* 1969. Vol. 8, No. 1. P. 5–6. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00385808
3. Fidytek R., Mostowski A., Somla R., Szepietowski A. Algorithms counting monotone Boolean functions. *Inform. Process. Lett.* 2011. Vol. 79, No. 5. P. 203–209. DOI: https://doi.org/10.1016/S0020-0190(00)00230-1
4. Bakoev V. On more way for counting monotone Boolean functions. *Thirteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory.* Pomorie : Bulgaria, June 15–21, 2012. P. 47–52.
5. Pawelski B. On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. 2021. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.13997
6. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Проблема Дедекінда та класи Поста. *Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування інформатики».* 2022. Вип. 67, № 5. С. 42–50. URL: https://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001383907 (дата звернення: 09.07.2024).
7. Szudzik M. An Elegant Pairing Function. URL: https://szudzik.com/ElegantPairing.pdf (date of access: 11.07.2024).
8. Kleitman D. On Dedekind's Problem: The Number of Monotone Boolean Functions *Proc. Amer. Math. Soc.* 1969. Vol. 21. P. 677–682.
9. Yusun T. Counting inequivalent monotone Boolean functions. 2012. URL: https://sfu.ca/~tyusun/inequivalentMBF.html (date of access: 09.07.2024).

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Kohut N. I. On one approach to solving the Dedekind problem.

This paper demonstrates that the class of monotone functions coincides with the class of dead-end disjunctive normal forms (DNF). Monotonic functions of n variables can be defined on the vertices of an n-dimensional cube. The paper contains all monotonic functions of n variables ($n = 1, 2, \dots, 13$), that are single-tier TDNF. It proposes an algorithm for finding monotone functions that are single-level dead-end disjunctive normal forms for n variables.

Keywords: monotonic functions, Dedekind's problem, Post classes, single-level monotonic functions.

References

1. Van Hirtum, L., De Causmaecker, P., Goemaere, J., & et al. (2023). A computation of D(9) using FPGA Supercomputing. Published online. https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.03039
2. Wiedemann, D. (1969). A computation of the eighth Dedekind number. *Order,* 8(1), 5–6. https://doi.org/10.1007/BF00385808
3. Fidytek, R., Mostowski, A., Somla, R., & Szepietowski, A. (2011). Algorithms counting monotone Boolean functions. *Inform. Process. Lett.,* 79(5) 203–209. https://doi.org/10.1016/S0020-0190(00)00230-1
4. Bakoev, V. (June 15–21, 2012). On more way for counting monotone Boolean functions. *Thirteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory.* Pomorie: Bulgaria.
5. Pawelski, B. (2021). On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.13997
6. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2022). Dedekind's problem and Post's classes. *International Scientific Technical Journal "Problems of control and informatics",* 67(5), 42–50. Retrieved from https://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001383907 [in Ukrainian].
7. Szudzik, M. An Elegant Pairing Function. Retrieved from https://szudzik.com/ElegantPairing.pdf
8. Kleitman, D. (1969). On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 21, 677–682.
9. Yusun, T. (2012). Counting inequivalent monotone Boolean functions. Retrieved from https://sfu.ca/~tyusun/inequivalentMBF.html

Одержано 01.11.2024