УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).83-96

О. В. Капустян[1], А. О. Станжицький[2], О. М. Станжицький[3]

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
kapustyan@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9373-6812

[2] Інститут математики НАН України,
молодший науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань,
доктор філософії
stanzhytskiy@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7587-1608

[3] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
завідувач кафедри загальної математики,
доктор фізико-математичних наук, професор
stanzhytskiy@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1456-729X

СЛАБКІ РОЗВ'ЯЗКИ СТОХАСТИЧНО ЗБУРЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ШВИДКО ЗРОСТАЮЧИМИ ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ

В даній роботі вивчаються стохастичні еволюційні рівняння у нескінченновимірних просторах. Ці рівняння є математичними моделями реальних процесів природознавства із розподіленими параметрами і таких, що у процесі своєї еволюції зазнають впливу випадкових факторів. Дані фактори можна розглядати як сумарний результат великої кількості незалежних у сукупності випадкових величин. Тоді, у силу центральної граничної теореми, отримаємо, що випадкові збурення описуються нескінченновимірним процесом білого шуму, що приводить до стохастичних рівнянь Ітовського типу. Характерним прикладом таких рівнянь є стохастичні параболічні рівняння із нелінійним зносом. Головним диференціальним оператором тут є, як правило, оператор другого порядку еліптичного типу. Відомі раніше результати стосувались існування та єдиності слабких розв'язків таких рівнянь за умови степеневого росту нелінійностей та деяких умов монотонності. Однак у застосуваннях часто трапляється нелінійності експоненціального росту, наприклад, добре відоме рівняння Франка–Каменського.

В даній роботі отримані умови існування, єдиності та неперервної залежності слабких розв'язків від правих частин та початкових даних. При цьому нелінійності можуть допускати ріст вище степеневого. Також для розв'язків отримані оцінки у спеціальних Соболівських нормах.

Ключові слова: процес Вінера, лапласіан, еліптичність, простір Соболева, крайова задача.

1. Вступ. В даній роботі вивчається стохастично збурене нескінченновимірним Q-вінерівським процесом рівняння реакція-дифузія вигляду:

$$\begin{cases} dy = (\Delta y + f(y) + u(t))dt + \sigma(y)dW(t), \\ y(t,x) = 0, \ x \in \partial D, \ t \in [0,T], \\ y(0,x) = y_0(x,w), \end{cases} \tag{1}$$

де $D \subset R^d, \ d \geq 2$, обмежена область із ляпуновською межею, Δ — оператор Лапласа, f і σ дійсні скалярні функції з R^1 в R^1, що породжують відповідні абстрактні відображення як відображення Немицького: $y(x) \to f(y(x)), \sigma(y(x))$, $u(t)$ певне випадкове збурення, що часто інтегрується як вектор керування. Такі рівняння виникають у застосуваннях як математичні моделі процесів із розподіленими параметрами, що зазнають випадкових впливів. Типовими представниками є, наприклад, модель Ходжкіна–Каменського–Хакслі (нейрофізіологія), де $y(t,x)$ є еластичним потенціалом клітинного нерва [1], модель Давсона–Флемінга популяційної динаміки [2] та багато інших моделей.

Але, результати, що стосуються коректної розв'язності відповідних рівнянь отримані за умови степеневого росту функції реакції f, наприклад [3, 4] для детерміністичного випадку та [5, 6] для стохастичного випадку.

Однак, зустрічаються ситуації, коли функція $f(y)$ має ріст вище лінійного, типовим представником тут є рівняння Франка–Каменського [7], де функція f має експоненційний ріст. Тому важливо довести конкретну розв'язність задачі (1) і в подібних випадках.

Для отримання відповідного результату ми використовуємо підхід робіт [8, 9], розроблений для детермінованого випадку, де основною умовою на функцію f є наступна:

$$f'(s) \leq \Lambda_f, \quad \Lambda_f \geq 0.$$

Очевидно, що наприклад, функція $f(s) = e^{-s}$ дану умову задовольняє, але не задовольняє умову степеневого росту.

2. Постановка задачі та основний результат. Позначимо наступні простори $H = L^2(D)$, $V = H_0^1$, $V' = H^{-1}$. Тоді $V \subset H \subset V'$ утворюють трійку Гельфанда. Надалі $\|\cdot\|$ — норма в H, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в H, $< \cdot,\cdot >$ — спарка між V' і V (тобто $< z, v >:= z(v)$, для $z \in V', \quad v \in V$.)

При цьому

$$< z, v >= (z, v) \text{ для } z \in H, v \in V.$$

Нехай (Ω, F, P) є повним ймовірностним простором, а (F_t) — нормальна фільтрація, $t \in [0,T]$. Позначимо також $Q = D \times (0,T)$ і $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$.

Задамо послідовнясть $\{\lambda_i\}_1^\infty$ — невід'ємних чисел таку, що $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 < \infty$ і нехай $\{l_i\}_1^\infty$ є ортогональним базисом в H, що $l_i \in L^\infty(D)$ і $\sup_i \|l_i\|_{L^\infty} < \infty$.

Введемо лінійний неперервний оператор Q такий, що він є невід'ємно визначеним і $Tr(Q) < \infty, \ Ql_i = \lambda_i l_i$.

За допомогою цього оператора стандартним чином можна визначити H — значний процес Вінера

$$W(t) := \sum_{i=1}^\infty \lambda_i l_i(x) \beta_i(t), \ t > o$$

який називається Q-вінерівським процесом. Тут $\beta_i(t)$ є стандартними, скалярними, незалежними в сукупності процесами Вінера. Відносно $W(t)$ і потоку σ-алгебр (F_t) будемо вважати наступне:

1) $W(t) \in F_t$ — вимірним при всіх $t \in [0,T]$;
2) $W(t+h) - W(t)$ не залежить від σ-алгебри F_t при всіх $h \geq 0, \ t \geq 0$.

Позначимо $U = Q^{\frac{1}{2}}(H)$. Тоді з [10, Lemma 2.2] випливає, що $U \in L^\infty(D)$. Аналогічно [10] введемо мультиплікативний оператор $\Phi : U \to H$ наступним чином

$$\Phi(\psi) := \varphi\psi, \ \psi \in U,$$

що визначений функцією $\varphi \in H$. Оскільки $\psi \in L^\infty(D)$, то даний оператор визначений коректно. Тоді $\Phi \circ Q^{\frac{1}{2}} : H \to H$ визначає оператор Гільберта-Шмідта.

Простір таких операторів позначатимемо $L_2^0 = L_2(Q^{\frac{1}{2}}H, H)$, а норму в ньому $\|\cdot\|_{L_2^0}$.

При цьому

$$\begin{aligned} \left\|\Phi \circ Q^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2^0}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \left\|\Phi \circ Q^{\frac{1}{2}} l_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \int_D \varphi^2(x) l_i^2(x) dx \leq \\ \leq \sup_i \|l_i\|_{L^\infty}^2 \cdot \|\varphi\|^2 Tr(Q), \end{aligned} \tag{2}$$

де $TrQ = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = \lambda$.

Тоді, для F_t — вимірного процесу $\Phi : \Omega_T \to L(U, H)$, що задовольняє умову

$$E \int_0^T \left\|\Phi \circ Q^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2^0}^2 dt < \infty,$$

можемо визначити стохастичний інтеграл $\int_0^t \Phi(s) dW(s)$ як елемент простору H. Деталі можна подивитись в [11].

Даний інтеграл допускає представлення

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_0^t \Phi(s, \cdot) l_i(\cdot) d\beta_i(s),$$

при цьому

$$E \left\| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \right\|^2 \leq \lambda_i \sup_i \|l_i\|_{L^\infty}^2 \int_0^t E \|\Phi(s, \cdot)\|^2 ds. \tag{3}$$

Приведемо тепер умови на дійсні функції f і σ, що характеризують реакцію та випадкові впливи.

(A1) $f : R^1 \to R^1$ є неперервно диференційовною функцією, що $f(0) = 0$ і існує стала $\Lambda_f \geq 0$ така, що $f'(s) \leq \Lambda_f$, для всіх $s \in R^1$;

(A2) $\sigma : R^1 \to R^1$, задовольняє глобальну умову Ліпшиця зі сталою L_σ.

Очевидно, що $|\sigma(s)| \leq L_\sigma |s| + |\sigma(0)|$.

(A3). Існує стала $C > 0$ така, що

$$|f'(s) \sigma^2(s)| \leq C(1 + |s|^p), \tag{4}$$

для деякого $p \geq 2$.

Зрозуміло, що можна завжди вважати p-парним.

Розв'язок задачі (1) будемо розглядати у слабкому сенсі. А саме:

Означення 1. *Нехай $y_0 \in F_0$ — вимірним випадковим процесом, а $u(t) \in F_t$ — вимірним. Тоді F_t — адаптований випадковий процес $y(t) \in L^2(\Omega_T, V)$ називається слабким розв'язком задачі (1) на $[0, T]$, якщо для всіх $\phi \in V$ виконується рівність:*

$$\begin{aligned} (y_k(t), \phi) = (y_0, \phi) - \int_0^t \left(\frac{\partial y(s)}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (u(s), \phi) + \\ + (f(y(s)), \phi) ds + \int_0^t (\phi, \sigma(y(s)) dW(s)). \end{aligned} \tag{5}$$

для майже всіх $t \in [0, T]$ з ймовірністю 1.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1 (Існування та єдиності)**.** *Нехай виконані умови (А1)–(А3) і* $y_0 \in L^\infty(\Omega, L^\infty(D))$ *та* $E\int_0^T \int_D u^p(t,x)dxdt < \infty$.

Тоді задача (1) має єдиний слабкий розв'язок на $[0,T]$.

Нехай $y(t, y_0, u)$ і $y(t, y_1, u_1)$ два розв'язки рівняння (1) з початковими умовами $y_0,\ y_1$ і процесами $u_1(t)$ та $u_2(t)$ у правій частині (1) відповідно.

Наступна теорема гарантує неперервну залежність розв'язків від початкових даних та процесів $u_1(t)$ та $u_2(t)$.

Теорема 2 (Неперервна залежність)**.** *За умов теореми 1 існує стала* $C(T)$ *така, що*

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} E\,\|y(t,y_0,u) - y(t,y_1,u_1)\|^2 \le C(T)(E\,\|y_0 - y_1\|^2 + \\ &+ \int_0^T E\,\|u_1(t) - u(t)\|^2\,dt).\end{aligned} \tag{6}$$

3. Доведення теорем 1 і 2. Доведення теореми 1. Замість рівняння (1) розглянемо спочатку "зрізане" рівнянням із обмеженими коефіцієнтами.

Для кожного цілого $k \ge ||y_0||_{L^\infty(\Omega, L^\infty,(D))}$, покладемо $f_k(s) = f(P_k(S))$ і $\sigma_k(s) = \sigma(P_k(s))$, де $P_k(s) = \min\{\max\{-k, s\}, k\}$.

Далі розглянемо "зрізане" рівняння

$$\begin{cases} dy_k = (\Delta y_k + f_k(y_k) + u)dt + \sigma_k(y_k)dW(t), \\ y_k = 0,\ x \in \partial D,\ t\in[0,T] \\ y_k(0,x) = y_0(x,w). \end{cases} \tag{7}$$

В даному рівнянні $f_k \in \sigma_k$ є обмеженими функціями (зі сталою залежною від k), а також глобально ліпшицевими, причому стала Ліпшиця для σ_k така ж, як і для σ, а для f_k, звичайно, залежить від k.

Таким чином, рівняння (7) задовольняє умови теореми 7.5 [12, гл. 6], а отже має єдиний слабкий розв'язок на $[0,T]$. При цьому справедлива енергетична рівність:

$$\begin{aligned}&||y_k(t)||^2 = ||y_0||^2 + 2\int_0^t (-||\nabla y_k(s)||^2 + (f_k(y_k(s)), y_k(s)) + (u(s), y_k(s)ds + \\ &+ \int_0^t ||\sigma_k(y_k(s))||^2_{L_2^0} ds + 2\int_0^t \sigma_k(y_k(s))dW(s), y_k(s)).\end{aligned} \tag{8}$$

З (2) також випливає, що

$$||\sigma_k(y_k(t))||_{L_2^0} = \sum_i \lambda_i^2 \int_D \sigma_i^2(y_k) l_i^2(x)dx \le \lambda \sup_i ||l_i||^2_{L^\infty} l_\sigma^2 (1 + ||y_k||^2). \tag{9}$$

Також з (А1), з використання теореми про середнє значення, отримуємо:

$$(f_k(y_k(s)), y_k(s)) = \int_D y_k f_k(y_k)dx \le \Lambda_f ||y_k||^2. \tag{10}$$

Також маємо, що

$$(u(s), y_k(s)) \le \frac{1}{2}(||u(s)||^2 + ||y_k(s)||^2). \tag{11}$$

Далі, із енергетичної рівності (8) маємо

$$||y_k(t)||^2 \le ||y_0||^2 + 2\int_0^t (-\Lambda ||y_k(s)||_V^2 + C_1 ||y_k(s)||^2 + \Lambda_f ||y_k(s)||^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}||u(s)||^2 + ||y_k(s)||^2 + \lambda \sup_i ||l_i||^2_{L^\infty} L^2_\sigma (1 + ||y_k(s)||^2) ds +$$
$$+ 2\int_0^t (\sigma_k(y_k(s)) dW(s), y_k(s)),$$

для деяких додатніх сталих Λ і C_1. Отже,

$$E||y_k(t)||^2 + \Lambda E \int_0^t ||y_k(s)||_V^2 \le E||y_0||^2 + C_2 \int_0^t E||y_k(s)||^2 ds + C_3 +$$
$$+ \int_0^t E||u(s)||^2 ds \le E||y_0||^2 + C_3 + \tag{12}$$
$$+ C_2 \int_0^t E||y_k(s)||^2 ds + T\left(\int_0^t E||u(s)||^p_{L^p} ds\right)^{\frac{2}{p}}$$

для деяких додатніх сталих C_2 і C_3, залежних лише від T. З (12) з використанням леми Гронуолла маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} E||y_k(t)||^2 + \int_0^t E||y_k(s)||_V^2 ds \le C(y_0, T, u). \tag{13}$$

Отже, y_k слабо збігається (за підпослідовністю) в $L^2(\Omega_T; V)$. З лінійного росту σ, маємо також, що

$$E\int_0^T ||\sigma_k(y_k(t))||^2_{L^0_2} dt \le C_4, \tag{14}$$

отже $\sigma_k(y_k) \to \Phi$ (слабко), $k \to \infty$ в $L^2(\Omega_T; L^0_2)$.

Далі розглянемо функцію $F_k(z) = -\int_0^z f_k(s)ds$. Маємо, що $F_k' = -f_k(z)$, $F_k''(z) = -f_k'(z)$. Покладемо

$$G(y_k(t)) = \int_D F_k(y_k(t)) dx.$$

Використовуючи формулу Іто для G, матимемо

$$G(y_k(t)) - G(y_k(0)) = \int_0^t (-(\nabla y_k(s), \nabla f_k(y_k(s)) - (f_k(y_k(s)), u(s))) ds -$$
$$- \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \int_0^t \int_D f_k(y_k(s) \sigma_k(y_k(s)) l_i(x) dx d\beta_i(s) -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 \int_D f_k'(s)) \sigma_k^2(y_k(s)) l_i^2(x) dx ds - \tag{15}$$
$$- \int_0^t ||f_k(y_k(s))||^2 ds.$$

Очевидно, що

$$(\nabla y_k(s), \nabla f_k(y_k)) \le C_4 ||y_k||_V^2, \tag{16}$$

для деякої додатної сталої C_4. Також,

$$|(f_k(y_k), u)| \le \epsilon ||f_k(y_k)||^2 + \frac{C_5}{\epsilon} ||y_k(s)||^2, \tag{17}$$

для $C_5 > 0$ і $\epsilon > 0$.

Оцінимо тепер $G(y_k)$. З теореми про середнє значення випливає існування функції: $\Theta : R^1 \to [0,1]$, такої, що для $z > 0$

$$F_k(z) = -\int_0^z f_k(s)ds = -\int_0^z f'(\Theta(s)P_k(s))P_k(s)ds \ge$$
$$\ge \int_0^z \Lambda_f(-P_k(s))ds \ge \Lambda_f \int_0^z -sds = -\frac{\Lambda_f}{2} z^2$$

Якщо $z < 0$, то маємо

$$F_k(z) = \int_z^o f_k(s)ds = \int_z^o f'(\Theta(s)P_k(s))P_k(s)ds \ge$$
$$\ge \int_z^o \Lambda_f P_k(s)ds \ge \Lambda_f \int_z^0 sds = -\frac{\Lambda_f}{2} z^2.$$

Таким чином, ми отримуємо наступну оцінку

$$G(y_k(t)) = \int_D F_k(y_k(t))dx \ge -\frac{\Lambda_f}{2} \|y_k(t)\|^2. \tag{18}$$

Для $G(y_k(0))$, враховуючи неперервність F_k і належність y_0 до простору $L^\infty(\Omega, L^\infty(D))$, матимемо

$$|G_k(y_0)| \le C_6 \|y_0\|^2_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))}, \tag{19}$$

де $C_6 = C_6(y_0, f) > 0$. Взявши в (15) математичне сподівання, матимемо

$$\begin{gathered}
-\frac{\Lambda_f}{2} E\|y_k(t)\|^2 \le C_6 E\|y_0\|^2_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))} + C_4 \int_0^t E\|y_k(s)\|_V^2 ds + \\
+\frac{C_5}{\epsilon} \int_0^t E\|y_k(s)\|^2 ds + \epsilon \int_0^t E\|f_k(y_k(s))\|^2 ds + \frac{T}{\epsilon} (\int_0^T E\|u(t)\|^2_{L^p} dt)^{\frac{p}{2}} + \\
+\frac{1}{2} \sum_i {\lambda_i}^2 E \int_0^t \|f_k'(y_k(s))\sigma_k^2(y_k(s)) l_i^2(x) dxds - \int_0^T E\|f_k(y_k)(s)\|^2 ds.
\end{gathered} \tag{20}$$

Звідси, з використанням (A2) і (13) матимемо

$$E\int_0^T \|f_k(y_k(t))\|^2 dt \le C_7 + C_8 \int_0^T E\int_D |y_k(t)|^p dxdt, \tag{21}$$

для деяких сталих $C_7 = C_7(y_0, u) > 0$ і $C_8 > 0$.

Отже, ми отримаємо рівномірну оцінку

$$E\int_0^T \|f_k(y_k(s))\|^2\,ds \le C_9, \tag{22}$$

якщо доведемо рівномірну оцінку для

$$E\int_0^T \|f_k(y_k(s))\|^p_{L^p}\,ds \le C_{10}. \tag{23}$$

Для її отримання ми використаємо теорію стохастичного інтегрування в банахових просторах, зокрема в $L^p(L^p-$теорія). А саме, скористаємось теоремою 1.1 з [13]. Неважко переконатися, що для "зрізаного" рівняння (7) виконані всі умови цієї теореми. Дійсно, в ролі спектральної міри, що фігурує в даній теоремі, (умова $H1$) можна взяти наступну міру: для кожної борелевої множини A із R^d покладемо $\mu(A) := \lambda(A\cap D)$, де λ — міра Лебега на R^d. Тоді міра μ має вигляд типу $(H1)$: $\mu = \mu + \mu_1$, де $\mu_1(A) = 0$, для кожної борелевої множини A із R^d. Очевидно, що μ_1 абсолютно неперервна відносно міри λ. Таким чином, характеристика a_w, що фігурує в умові $(H1)$ теореми 1.1 [13] рівна нулю. Перевірка решти умов цієї теореми для рівняння (7) тривіальна.

Таким чином, рівняння (7) має єдиний м'який розв'язок z_k такий, що

$$E\sup_{t\in[0,T]}\|z_k(t)\|^p_{L^p} < \infty. \tag{24}$$

Оскільки $z_k(t)\in L^2(D)$ то даний процес є м'яким розв'язком (7) і в H. Але, у нашому випадку, слабкий розв'язок співпадає із м'яким, [5. Пропозиція $G05$ та зауваження $G06$]. Тоді, в силу єдиності, $y_k(t) = z_k(t)$, а тому врахувавши (24), можна використати формулу Іто для $\int_D y_k^p(t,x)dx$. Маємо

$$\begin{gathered}\int_D y_k^p(t)dx - \int_D y_k^p(0)dx = \int_0^t (p < \Delta y_k, y_k^{p-1} > dx + p(u(s), y_k^{p-1}(s)) + \\ + p\left(f_k(y_k(s), y_k^{p-1}(s)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\int_D p(p-1)y_k^{p-2}\sigma_k^2(y_k(s))l_i^2 dx\right)ds + \\ + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t\int_D p y_k^{p-1}(s)\sigma_k(y_k(s))l_k(x)dxd\beta_i(s).\end{gathered} \tag{25}$$

Оцінимо в (25) кожний доданок окремо. Для спарки між просторами V і V' маємо

$$< \Delta y_k, y_k^{p-1} > = -\int_D (p-1)y_k^{p-2}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2 dx \le 0. \tag{26}$$

Далі

$$(u, y_k^{p-1}) = \int_D y_k^{p-1}u(s)dx \le C_{11}(\|y_k\|^p_{L^p} + \|u\|^p_{L^p}), \tag{27}$$

а також

$$(f_k(y_k), y_k^{p-1}) = \int_D y_k^{p-2}y_k f_k(y_k)dx \le \int_D \Lambda_f y_k^p dx. \tag{28}$$

Тут ми використали умову (A1). Також отримаємо

$$\int_D y_k^{p-2}\sigma^2(y_k)l_i^2dx \leq \int_D y_k^{p-2}L_\sigma^2(1+|y_k^2|dx) \leq C_{12}\int_D y_k^p dx + C_{13,} \qquad (29)$$

для деяких додатніх сталих $C_{10} - C_{13}$.

Взявши математичне сподівання в (25), з використанням (25)–(29), матимемо

$$E\int_D y_k^p(t)dx \leq C_{14} + C_{15}\int_0^t E\int_D y_k^p(s)dxds,$$

звідки, прийнявши до уваги нерівність Гронуолла, отримаємо оцінку (23), а відтак і (22).

Отже, послідовність $\{f_k(y_k)\}$ є слабко компактною в $L^2(\Omega_T, L^2(D))$, а отже за послідовністю

$$\begin{aligned} y_k &\rightharpoonup y \text{ в } L^2(\Omega_T, V), \\ \sigma_k(y_k) &\rightharpoonup \Phi \text{ в } L^2(\Omega_T, L_2^0) \\ f_k(y_k) &\rightharpoonup \psi \text{ в } L^2(\Omega_T, H). \end{aligned} \qquad (30)$$

Далі обгрунтуємо граничний перехід в (7). Позначимо $S(t)$ — напівгрупу, генератором якої є оператор Лапласа. Оскільки y_k є слабким розв'язком (7) то, як було сказано вище, у нашому випадку, y_k є також м'яким розв'язком. Тому, в силу означення м'якого розв'язку, маємо наступне інтегральне представлення

$$\begin{aligned} y_k(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)(f_k(y_k(s)) + u(s))ds + \\ + \int_0^t S(t-s)\sigma_k(y_k(s))dW(s). \end{aligned} \qquad (31)$$

Добре відомо, що напівгрупа $S(t)$ компактна при $t > 0$, як відображення з H в H [4, гл. 6].

Для $\alpha \in (\frac{1}{p}; 1]$ введемо до розгляду оператор G_α :

$$(G_\alpha\varphi)(t) = \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1}S(t-s)f(s)ds. \qquad (32)$$

Для даного відображення є справедливим наступне твердження.

Твердження 1 (11)**.** *Якщо $S(t)$ компактний оператор при $t > 0$, то оператор G_α з (32) є також компактним оператором з $L^p(0,T;H)$ в $C([0,T];H)$.*

Нагадаємо, що у наших позначеннях $H = L^2(D)$ і ми беремо $p > 2$.

Із стохастичного аналогу теореми Фубіні [11] отримується наступна факторизаційна формула

$$\int_0^t S(t-s)\psi(s)dW(s) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}(G_\alpha Y)(t),\ t \in [0,T], \qquad (33)$$

де

$$Y(t) = \int_0^t (t-\epsilon)^{-\alpha}S(t-\tau)\Phi(\tau)dW(\tau). \qquad (34)$$

Тому
$$y_k(t) = S(t)y_0 + G_1(f_k(y_k)) + u)(t) + G_\alpha(Y_k)(t), \tag{35}$$
де
$$Y_k(t) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} S(t-s)\sigma_k(y_k(s))dW(s). \tag{36}$$

Звідси маємо
$$E\int_0^T \|Y_k(t)\|^p\, dt \le C_{16} E\int_0^T \left(\int_0^T (t-s)^{-2\alpha} \|\sigma_k(y_k(s))\|^2_{z_2^0}\, ds\right)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Використавши нерівність Хаусдорфа-Юнга для конволюцій, матимемо
$$E\int_0^T \|Y_k(t)\|^p\, dt \le C_{16} E\int_0^T \left(\int_0^T (t-s)^{-2\alpha}\right) \|\sigma_k(y_k(t))\|^p_{z_2^0}\, dt, \quad \text{для} \quad \alpha \in (\frac{1}{p}, \frac{1}{2}). \tag{37}$$

Прийнявши також до уваги лінійне зростання σ, матимемо
$$E\int_0^T \|Y_k(t)\|^p\, dt \le C_{17} \int_0^T (1 + E\|y_k(t)\|^p)dt.$$

Але
$$\begin{aligned} E\int_0^T \|y_k(t)\|^p\, dt &= E\int_0^T \left(\int_D y_k^2(t,x)dx\right)^{\frac{p}{2}} dt \le \\ &\le C_{18} E\int_0^T \left(\int_D y_k^p(t,x)dx\right) dt \le C_{19}, \end{aligned} \tag{38}$$
в силу (22). Тут $C_{15} - C_{19}$ — деякі додатні сталі.

Аналогічно маємо
$$E\int_0^T \|f_k(y_k(t))\|^2\, dt \le C_{20}, \tag{39}$$
і
$$E\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt \le C_{21} + C_{22}\left(E\int_0^T \left(\int_D u^p(t,x)dx\right) dt\right)^{\frac{2}{p}} \le C_{23}, \tag{40}$$
для деяких додатніх сталих $C_{21} - C_{23}$.

З твердження ([11]) випливає, що множина
$$K(r) = \left\{S(\cdot)y_0 + G_\alpha\varphi(\cdot) + G_1 g(\cdot) : \int_0^T \|f(t)\|^p\, dt \le r,\ \int_0^T \|g(t)\|^2\, dt \le r\right\},$$
є компактом в $C([0,T]; H)$. Тоді з (36)–(38), з використанням нерівності Чебишева, отримаємо, що для довільного $\epsilon > 0$ можна знайти $r > 0$ таке, що для всіх $k \in N$
$$\begin{aligned} P\{y_k \notin K(r)\} &\le P\left\{\int_0^T \|f_k(y_k(t)) + u(t)\|^2\, dt > r\right\} + \\ &+ P\left\{\int_0^T \|y_k(t)\|^p\, dt > \frac{\pi r}{\sin\alpha\pi}\right\} \le \frac{C_{24}}{r^2} + \frac{C_{25}}{r^p} < \epsilon, \end{aligned}$$

де C_{24} і C_{25} додатні сталі.

Таким чином, для множини мір $z(y_k)$ маємо

$$z(y_k)(K(r)) = P\{y_k \in K(r)\} \geq 1 - \epsilon, k = 1, 2, ...$$

Тоді, згідно з теоремою Прохорова, ця множина мір компактна, а отже $\mu_k = z(y_k)$ слабко збігається в $C([0,T];H)$ до деякої міри μ. За теоремою Скорохода [14] існує ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$, фільтрація $(\tilde{F_t})$ і процес Вінера $\tilde{W}(t)$, випадкові процеси $\tilde{y_k}, \tilde{y}, \tilde{u}$ такі, що $z(\tilde{y}) = \mu$, $z(\tilde{y_k}) = z(y_k)$, $z(\tilde{u}) = z(u)$, і $\tilde{y_k} \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$ майже всюди за мірою $\tilde{P}$.

Оскільки закони розподілів співпадають, то з означення слабкої збіжності маємо, що $\tilde{y_k} \rightharpoonup \tilde{y}$ в $L^2(\tilde{\Omega}, V)$, $\sigma_k(\tilde{y_k}) \rightharpoonup \tilde{\Phi}$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; L_2^0)$ та $f_k(\tilde{y_k}) \rightharpoonup \tilde{\Psi}$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; H)$. Тоді, з використанням леми Ліонса [15, Леми 1.3] $f_k(\tilde{y_k}) \rightharpoonup f(\tilde{y})$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; H), \tilde{y}_k(t,x,w) \to y(t,x,w)$ майже всюди, $\sigma_k(\tilde{y_k}) \rightharpoonup \sigma(\tilde{y})$ в $L^2(\tilde{\Omega_T}; L_2^0)$.

Із властивостей стохастичного інтеграла випливає, що інтеграл $\int_0^t f(s)dW(s)$ є лінійним неперервним оператором з банахового простору $L^2(\Omega_T, L_2^0)$ в $L^2(\Omega, H)$, а отже і неперервним відносно слабкої збіжності.

Значить

$$\int_0^t \sigma_k(\tilde{y}_k^s)d\tilde{W}(s) \to \int_0^t \sigma(\tilde{y}(s))d\tilde{W}(s).$$

в $L^2(\Omega_T, L_2^0)$ і зокрема в $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega, H))$.

Для f_k із умови $(A1)$ отримуємо

$$(f_k(s_1) - f_k(s_2))(s_1 - s_2) \leq \Lambda_f(s_1 - s_2)^2. \tag{41}$$

Оскільки $\sigma_k(s)$ є ліпшицевими зі сталою L_σ, то

$$\|\sigma_k(u) - \sigma_k(v)\|_{L_2^0}^2 \leq L_\sigma^2 C_{20} \|u - v\|^2, \tag{42}$$

для деякої сталої $C_{20} > 0$.

Далі, з використанням теореми Фубіні і означення слабкої збіжності, для довільної $\phi \in L^\infty(\tilde{\Omega}_T),\ v \in V$ матимемо

$$E\int_0^T (\tilde{y}(t), \varphi(t)v)dt = \lim_{k\to\infty} E\int_0^T (\tilde{y}_k(t), \varphi(t)v)dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} E\left(\int_0^T (\tilde{y_0}, \varphi(t)v)dt + \int_0^T \int_0^t < \Delta\tilde{y}_k(s), \varphi(s)v > dsdt + \right.$$

$$+ \int_0^T \int_0^t (f_k(\tilde{y}_k(s), \varphi(t)v))dsdt + \int_0^T \int_0^t (\tilde{u}(s)\varphi(t), v)dsdt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^t (\sigma_k(\tilde{y}_k(s), d\tilde{W}(s), \phi(t)v))dsdt = \lim_{k\to\infty} E\int_0^T (\tilde{y_0}, \varphi(t)v)dt +$$

$$+E\int_0^T < \Delta\tilde{y}_k(s), \int_0^T \phi(t)dtv > ds + E\int_0^t (f_k(\tilde{y}_k(s)), \int_0^T \varphi(t)dtv)ds +$$

$$+E\int_0^T (\tilde{u}(s), \int_s^T \varphi(t)dtv)ds + E\int_0^T \left(\int_0^t \sigma_k(\tilde{y}_k(s))d\tilde{W}(s), \varphi(t)v\right)dt =$$

$$= E\left(\int_0^T < \tilde{y}_0 + \int_0^t (\Delta\tilde{y}(s) + f(\tilde{y}(s)) + \tilde{u}(s))ds + \int_0^t \sigma(\tilde{y}(s))d\tilde{W}(s), \varphi(t)v > dt\right).$$

В силу довільності ϕ і v звідси отримуємо, що

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y_0} + \int_0^t (\Delta\tilde{y} + f(\tilde{y}) + \tilde{u}(s))ds + \int_0^t \sigma(\tilde{y}(s))d\tilde{W}(s)$$

в V.

Отже $\tilde{y}$ є слабким мартингальним розв'язком (1) на $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$. Енергетична рівність випливає з формули Іто для $\|y(t)\|^2$.

Доведемо тепер потраєкторну єдиність.

Нехай $\tilde{y_1}$ і $\tilde{y_2}$ два розв'язки рівняння (1) на $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ і $\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_2(0) = \tilde{y}_0$. Тоді

$$d(\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)) = \int_0^t (\Delta(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)) + f(\tilde{y}_1) - f(\tilde{y}_2))dt + \int_0^t (\sigma(\tilde{y}_1) - \sigma(\tilde{y}_2))d\tilde{W}(t).$$

Отже

$$E\|\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)\|^2 = E\left(2\int_0^t (< \Delta(\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)), \tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s) > + \right.$$

$$\left. +(f(\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)), \tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)))\, ds + \int_o^t \|\sigma(\tilde{y}_1(s)) - \sigma\tilde{y}_2(s)\|^2_{z_2^0} ds\right) \leq$$

$$\leq 2\int_0^t -C_4 E\|\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)\|_v^2 ds + C_{27}\int_0^t E\|\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)\|^2 ds,$$

$C_{27} > 0$. Звідси, з використанням леми Гронуолла, отримуємо

$$E\|\tilde{y_1}(t) - \tilde{y_2}(t)\|^2 = 0.$$

Звідси випливає потраєкторна єдиність розв'язку. Отже, враховуючи нескінченновимірний аналог теореми Ямада-Ватанабе [13, Т.2] отримуємо доведення теореми 1.

Доведення теореми 2. Доведення даної теореми подібне до доведення єдиності попередньої теореми. Покладемо

$$y(t) = y(t, y_0, u) \;\text{ та }\; z(t) = y(t, y_1, u_1).$$

Тоді

$$d(y(t) - z(t)) = (\Delta(y(t) - z(t)) + f(y(t)) - f(z(t)) + u_1(t) - u_2(t))dt +$$

$$+(\sigma(y(t)) - \sigma(z(t)))dW(t).$$

Далі, з використанням енергетичної рівності маємо

$$E\|y(t) - z(t)\| = E\|y_0 - y_1\|^2 + 2E\int_0^t (< \Delta(y(s) - z(s)), y(s) - z(s) >) +$$

$$+(f(y(s)) - f(z(s)), y(s) - z(s))ds + \int_0^t E\|\sigma(y(s)) - \sigma(z(s)))\|^2_{z_2^0} ds \leq$$

$$\leq E\left\|y_0-y_1\right\|^2+C_{28}\int_0^t E\left\|y(s)-z(s)\right\|^2 ds+\int_0^t \left\|y(s)-z(s)\right\|^2_{z_2^0} ds, \quad C_{28}>0.$$

Тоді нерівність (5) випливає з леми Гронуолла, що і доводить теорему.

4. Висновки. В даній роботі нами отримано достатні умови існування та єдиності слабких розв'язків стохастичних рівнянь параболічного типу, збурених нескінченновимірним процесом білого шуму. Основною відмінністю даної роботи від раніше відомих є те, що наші умови допускають зростання нелінійностей швидше степеневого, наприклад, одностороннє експоненційне. Тому ці умови розширюють коло застосувань отриманих теоретичних результатів до конкретних математичних моделей. Зокрема, стає можливим вивчення рівняння Франка–Каменського [7].

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект 2023, 03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою".

Список використаної літератури

1. McKean H. P. Nagumo's Equation. *Advances in Mathematics.* 1970. Vol. 4, No. 3. P. 209–223. DOI: https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90023-X
2. Dawcon D. A. Stochastic Evolution Equations. *Mathematical Biosciences.* 1972. Vol. 15, No. 3-4. P. 287–316.
3. Vishik M. I., Chepyzhov V. V. Attractors for Equations of Mathematical Physics. AMS. Providence : Rhode Island, 2002. 363 p.
4. Evans L. C. Partial Differential Equations. AMS. University of California. Berkeley : CA, 2010. Vol. 19. 662 p.
5. Liu W., Rocher M. Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction. Springer International Publishing : Springer, 2015. 272 p. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-22354-4 (date of access: 18.07.2024).
6. Liu W., Rockner M. Local and Global Well-Posedness of SPDE with Generalized Coercivity Conditions. *Journal of Differential Equations.* 2013. Vol. 254, No. 2. P. 725–755. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.09.014
7. Frank-Kamenetskii D. A., Salnikov I. E. Journal Physical Chemistry. 1943. Vol. 17, No. 2. P. 79–86.
8. Casas E., Wachsmuth D. A note on existence of solutions to control problems of semilinear partial differential equations. *SIAM Journal of Control and Optimization.* 2023. Vol. 61, No. 3. P. 1095–1112. DOI: https://doi.org/10.1137/22M1486418
9. Casas E., Kunisch K. Infinite Horizon Optimal Control for a General Class of Semilinear Parabolic Equations. *Applied Mathematics & Optimization.* 2023. Vol. 88, No. 47. P. 46–84. DOI: https://doi.org/10.1007/s00245-023-10006-4
10. Manthey R., Zausinger T. Stochastic Evolution Equations in $L_0^{2\nu}$. *Stochastic Reports.* 1999. Vol. 66, No. 1-2. P. 37–85. DOI: https://doi.org/10.1080/17442509908834186
11. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press : Cambridge, 1992. 454 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781107295513
12. Chow P.-L. Stochastic Partial Differential Equations. Chapman Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman Hall/CRC : Boca Raton, FL, 2007. 281 p. URL: https://www.routledge.com/Stochastic-Partial-Differential-Equations/Chow/p/book/9780367453121?srsltid=AfmBOorpp6c3u2w_zCII7BB0N1hW6zGx-dL_YWdgmp__vUzInGfvlDzlk (date of access: 15.07.2024).
13. Ondrejat M. Uniqueness for Stochastic Evolution Equations in Banach spaces : Dissertations Mach 426 / Institute of Mathematics of The Polish Academy of Sciences. Warsaw. 2004. P. 1–63. DOI: https://doi.org/10.4064/dm426-0-1
14. Skorokhod A. Random Linear Operators. Institute of Mathematics : Kiev GSP, 1984. 230 p. URL: https://link.springer.com/book/9789027716699 (date of access: 15.07.2024).

15. Lions J. L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Dunod, Cauthier-Vallars : Paris, 1965. 554 p.

Kapustyan O. V., Stanzhytskiy A. O., Stanzhytskiy O. M. Weak solutions of stochastically perturbed parabolic equations with rapidly growing external perturbations.

This paper studies stochastic evolution equations in infinite-dimensional spaces. These equations are mathematical models of real natural science processes with distributed parameters and those that are influenced by random factors in the process of their evolution. These factors can be considered as the total result of a large number of independent random variables. Then, by virtue of the central limit theorem, we obtain that random disturbances are described by an infinite-dimensional white noise process, which leads to stochastic equations of the Ito type. The characteristic example of such equations are stochastic parabolic equations with nonlinear wear. The main differential operator here is, as a rule, a second-order operator of elliptic type. Previously known results related to the existence and unity of weak solutions of such equations under the condition of power-law growth of nonlinearities and certain conditions of monotonicity. However, nonlinearities of exponential growth often occur in applications, for example, the well-known Frank–Kamensky equation.

In this work, the conditions of existence, unity and continuous dependence of weak solutions on the right parts and initial data are obtained. At the same time, non-linearities can allow growth above the exponent. Also, for the solutions, estimates were obtained in special Sobolev's norms.

Keywords: Wiener process, Laplacian, ellipticity, Sobolev space, boundary value problem.

References

1. McKean, H. P. (1970). Nagumo's Equation. *Advances in Mathematics,* 4(3), 209–223. https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90023-X
2. Dawcon, D. A. (1972). Stochastic Evolution Equations. *Mathematical Biosciences,* 15(3-4), 287–316.
3. Vishik, M. I., & Chepyzhov, V. V. (2002). *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* AMS. Providence: Rhode Island.
4. Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations.* AMS. University of California. Berkeley: CA, 19.
5. Liu, W., & Rocher, M. (2015). Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction. Springer International Publishing: Springer. Retrieved from https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-22354-4
6. Liu, W., & Rockner, M. (2013). Local and Global Well-Posedness of SPDE with Generalized Coercivity Conditions. *Journal of Differential Equations,* 254(2), 725–755. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.09.014
7. Frank-Kamenetskii, D. A., & Salnikov, I. E. (1943). Journal Physical Chemistry. 17(2), 79–86.
8. Casas, E., & Wachsmuth, D. (2023). A note on existence of solutions to control problems of semilinear partial differential equations. *SIAM Journal of Control and Optimization,* 61(3), 1095–1112. https://doi.org/10.1137/22M1486418
9. Casas, E., & Kunisch, K. (2023). Infinite Horizon Optimal Control for a General Class of Semilinear Parabolic Equations. *Applied Mathematics & Optimization,* 88(47), 46–84. https://doi.org/10.1007/s00245-023-10006-4
10. Manthey, R., & Zausinger, T. (1999). Stochastic Evolution Equations in $L_0^{2\nu}$. *Stochastic Reports,* 66(1-2), 37–85. https://doi.org/10.1080/17442509908834186
11. Da Prato, G., & Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press: Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781107295513
12. Chow, P.-L. (2007). *Stochastic Partial Differential Equations.* Chapman Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman Hall/CRC : Boca Raton, FL. Retrieved from https://www.routledge.com/Stochastic-Partial-Differential-

Equations/Chow/p/book/9780367453121?srsltid=AfmBOorpp6c3u2w_zCII7BB0N1hW6zGx-dL_YWdgmp__vUzInGfvlDzlk
13. Ondrejat, M. (2004). *Uniqueness for Stochastic Evolution Equations in Banach spaces:* (Doctor's thesis). Institute of Mathematics of The Polish Academy of Sciences. Warsaw. https://doi.org/10.4064/dm426-0-1
14. Skorokhod, A. (1984). *Random Linear Operators.* Institute of Mathematics: Kiev GSP. Retrieved from https://link.springer.com/book/9789027716699
15. Lions, J. L. (1965). *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires.* Dunod, Cauthier-Vallars: Paris.

Одержано 07.09.2024