

С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², В. Ф. Лазар³, Ю. Ю. Млавець⁴

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yaretskano@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат технічних наук
vflazar@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
зам. декана факультету математики та цифрових технологій,
доцент кафедри кібербезпеки та прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ ТА КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА

В статті представлено аналітичний розв'язок контактної задачі для двох пружних півпросторів з початковими напруженнями та попередньо напруженого кільцевого штампа без врахування сил тертя. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту кільцевого штампа та півпросторів залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу.

Припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружних півпросторів однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами. Крім того, вплив кільцевого штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У випадку ортотропних тіл будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи алгебраїчних рівнянь. Для дослідження задачі використовується велика кількість фундаментальних результатів таких як: перетворення Ханкеля, потрібні інтегральні рівняння, та інші методи теорії контактних задач лінеаризованої теорії пружності.

У статті також встановлено зв'язок між осіданням та рівнодіючою силою навантаження. Отже, за допомогою отриманих розв'язків можна вивчити вплив початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних напружень та переміщень у двох пружних півпросторах та пружному кільцевому штампі.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір, інтегральні рівняння.

1. Вступ. Дослідження та розв'язок контактних задач теорії пружності є актуальним напрямком розвитку сучасної науки, враховуючи виклики та випробування сьогодення. Значна кількість практичних завдань зводиться до розв'язання задач механіки твердого деформованого тіла, наприклад: розрахунок та дослідження напружено-деформованого стану важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в межах дії гравітаційних сил, а також градирень, водонапірних веж, димових труб та інших інфраструктурних споруд та залізобетонних конструкцій [1–3]. Основна частина даних практичних задач формулюється для таких тіл як півпростір або шар з областями контакту різноманітної форми та складності.

Поява нових матеріалів, необхідність підвищення якості їх характеристик також вимагає все більшої уваги науковців до напрямку досліджень в рамках механіки твердого деформованого тіла.

Особливу увагу в цьому напрямку, слід приділити впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл. Враховуючи те, що початкові напруження присутні практично в усіх елементах конструкцій, і можуть бути викликані різного роду причинами, такими як: виробничі процеси (при виготовленні цілого ряду матеріалів), технологічні операції або складання конструкцій. Внаслідок дії геостатичних та геодинамічних сил початкові напруження виникають у земній корі. Також, вони виникають у композитних матеріалах — в результаті технологічних процесів при їх створенні. Присутність початкових напружень існує навіть у кровоносних судинах живих організмів. Початкові напруження необхідно враховувати й при розв'язуванні задач про деформацію мерзлих ґрунтів. Крім того, у пружно-пластичних тілах також можуть існувати внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Іноді доречно навмисно створювати початкові (залишкові або технологічні) напруження для компенсації тих напружень, які виникають у елементах конструкцій у процесі їх роботи.

У багатьох публікаціях періодичних наукових видань та працях навчального і монографічного характеру [4, 5] досить детально вивчені питання, що стосуються контактних задач для пластичних, пружних та в'язко пружних тіл без дії на них початкових напружень. Але запити сучасної інженерно-технічної практики висувають до науковців ряд задач, які потребують використання більш ускладнених моделей, що дозволятимуть враховувати вплив початкових (технологічних або залишкових) напружень, поверхневі властивості матеріалу, вплив тертя, жорсткість поверхні, тепловиділення, зносостійкість поверхні тіл тощо [6–8]. Аналіз результатів цих досліджень дозволяє сформулювати умови на межі поверхонь контактуючих деформованих тіл, що відповідають дійсності.

Отже, враховуючи виклик інженерно-технічної практики, можна пояснити тенденцію збільшення кількості опублікованих робіт з нелінійної теорії пружності та лінеаризованої механіки деформованих тіл (яку застосовують при досить великих початкових (залишкових) напруженнях). Розв'язки таких задач до-

звояють краще описувати та враховувати фізичні характеристики матеріалів і дію на них сил тертя. До праць даного напрямку належать оглядові статті та праці монографічного характеру [9–13].

Фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності, на якій ґрунтуване дане дослідження, були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. Гузем О. М. [6, 8–10, 13]. Ним вперше було розв'язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями, що оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями отримала у працях його учнів [8, 9, 11, 12, 14, 15] та інших вітчизняних і зарубіжних вчених [7, 13, 15]. Існує також ряд узагальнюючих публікацій [1–3, 5, 10–12, 14–18], які повністю або частково пов'язані з тематикою цієї статті.

На думку авторів статті, перевага підходу, запропонованого О. М. Гузем полягає в тому, що цей підхід дозволяє розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. А необхідні графіки та числові результати для конкретних пружних потенціалів можуть бути отримані лише на завершальному етапі. Це дозволяє більш широко використовувати отримані аналітичні залежності.

Тому у даній статті дослідження контактної задачі для попередньо напружених ідентичних півпросторів та пружного кільцевого штампу з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку рівних коренів визначального рівняння [9] виконано у межах підходу запропонованого Гузем О. М.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного кільцевого штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однакові. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [4].

2. Постановка задачі. Нехай пружний кільцевий штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою віссесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним кільцевим штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R_1 та R_2 — відповідно внутрішній та зовнішній радіуси кільцевого штампа, $h = 0.5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1. величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11} , S_0^{22} компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або

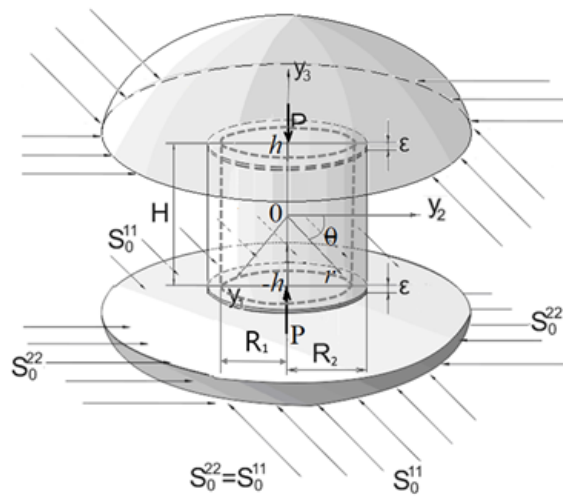


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями.

нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. Причому, пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [9]. Крім того, дія штамп викликає у півпросторах мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану y_i , які пов'язані з лагранжевими координатами (початкового стану) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1, 3}$).

У даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ($\xi_2^2 \neq \xi_3^2$) характеристичного (визначального) рівняння [9].

У системі колових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = 1, 2$), $n_1 = \xi_2^2$, $n_2 = \xi_3^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружного кільцевого штамп в області контакту $z_i = \pm h/v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, \quad Q'_{33}{}^{(3)} = Q'_{33}{}^{(i)}, \quad Q'_{3r}{}^{(3)} = 0, \quad Q'_{3r}{}^{(i)} = 0, \quad (R_1 \leq r \leq R_2) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

- 2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h/v_i$, де ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q'_{33}{}^{(i)} = 0, \quad Q'_{3r}{}^{(i)} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad (0 < r < R_1 \text{ або } r > R_2) \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

- 3) на боковій поверхні пружного кільцевого штамп $r = R_1$ або $r = R_2$:

$$Q'_{rr}{}^{(3)} = 0, \quad Q'_{3r}{}^{(3)} = 0, \quad (|z_i| \leq h/v_i) \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодією навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r |Q'_{33}{}^{(3)}| dr, \quad |Q'_{33}{}^{(3)}| = |Q'_{3r}{}^{(3)}|_{z_i=\pm H/v_i} \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова (5) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

3. Основні співвідношення та метод розв'язку. Напружено-деформований стан в ділянках контакту у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [9]

$$\begin{aligned} Q'_{33}{}^{(i)}(\rho; 0) &= \frac{C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0)}{R_1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \\ Q'_{3r}{}^{(i)}(\rho; \xi) \Big|_{\xi=0} &= \\ &= -\frac{C_{44}(1+m_1)}{v_1} \left(\xi - \frac{h}{R_1} \right) \int_0^\infty \eta F(\eta) e^{(\xi-h/R_1)\eta/v_1} J_1(\eta\rho) d\eta \Big|_{\xi=0} = 0, \quad (6) \\ U'_3{}^{(i)}(\rho; 0) &= -\frac{m_1(s_1-s_0)}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta, \\ U'_r{}^{(i)}(\rho; 0) &= -(1-s_0) \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta\rho) d\eta, \end{aligned}$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111}n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}, \\ \frac{\lambda_1 q_1 n_i}{\lambda_3 q_3}; \end{cases} \quad l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}, \\ \frac{\kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\lambda_3 q_3}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases}$$

$\xi = \frac{z_i v_i}{R_1}$, $\zeta_i = \frac{\xi}{v_i} = \frac{z_i}{R}$, $\eta = \xi R_1$, ($i = 1, 2$), $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1}$, $s_1 = (m_1-1)m_1^{-1}$, $s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}$, $s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1}$, $F(\eta)$ — шукана функція, $J_\nu(x)$ — функції Бесселя дійсного аргументу.

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у кільцевому пружному штампі з початковими напруженнями у випадку рівних коренів ($\xi_2'^2 = \xi_3'^2$) характеристичного рівняння [9] приймемо у вигляді:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + v_i z_i \tilde{\chi}_2, \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1 &= C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + A_0 (r^2 - 2z_1^2) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r) \right) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left(T_k^{(2)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(1)} Y_0(\alpha_k r) \right) S_2(\alpha_k z_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_2 = & C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + A_0 (r^2 - 2z_1^2) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r) \right) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \\ & \left. + \left(T_k^{(2)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(1)} {}_2Y_0(\alpha_k r) \right) S_3(\alpha_k z_1) \right], \end{aligned}$$

$I_\nu(x)$ — функція Бесселя уявного аргументу, $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, T_k^{(1)}, T_k^{(2)}$ — деякі сталі коефіцієнти, α_k, γ_k — власні значення задачі (2)–(5). Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому кільцевому штампі для стисливих (нестисливих) тіл та рівних коренів рівняння [14], із врахуванням граничних умов (2)–(5), представимо у вигляді

$$\begin{aligned} U'_r{}^{(3)} = & \frac{\varepsilon \omega_2}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -2\tilde{A}_0 r + \alpha_k \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\alpha_k}{v_1} (E_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) + (1 + \alpha_k z_1) M_k (\operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) \right) \right\} T_k, \\ Q'_{3r}{}^{(3)} = & \frac{C_{44}}{v_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^2 \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \left\langle (1 + m_1) \alpha_k \left(\frac{1}{v_1} (E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) + (\operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) M_k \right) + (1 + m_2) (\operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) M_k \right\rangle \right\} T_k, \\ U'_3{}^{(3)} = & \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \times \right. \\ & \times \left\langle (m_1 h \alpha_k - (m_2 - 1) v_1) (\operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) M_k - \right. \\ & \left. - m_1 \alpha_k (F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) + \right. \\ & \left. + \frac{4}{n_1} [m_1 (\alpha_k^2 - h) + (1 - m_2) h] \tilde{A}_0 \right\rangle \right\} T_k, \tag{8} \\ Q'_{33}{}^{(3)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left\langle \frac{\alpha_k^3}{v_1} (1 + m_1) l_1 \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \times \right. \right. \\ & \left. \times (F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) T_k + (1 + m_2) l_2 \alpha_k^2 (\operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) M_k \right\rangle + \\ & \left. + 4 l_2 (1 + m_2) \tilde{A}_0 \right\} T_k, \end{aligned}$$

де

$$\omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1 (s_3 - s_2)},$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{2(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[Y_1(\alpha_k R_1) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k R_1) \right],$$

$$M_k = \frac{(1 + m_1) \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \left\langle (1 + m_2) + (1 + m_1) \left(\alpha_k - \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_0)} \right) \right\rangle},$$

$$F_k = -\frac{v_1}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} - \frac{v_1(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} M_k,$$

$$E_k = \frac{v_1}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} - \frac{v_1(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} M_k,$$

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'^{-1}_{1122}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'^{-1}_{1122}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \end{cases}$$

($i = \overline{1, 2}$), T_k — шукані сталі.

Використовуючи розв'язок для штампa (8) та задовольняючи третій умові (2), другій умові (3), знаходимо власні значення задачі (2)–(5) для рівних коренів визначального рівняння [9] ($n_1 = n_2$):

$$\gamma_k - \text{розв'язок рівняння } I_1(\gamma_k v_1 R_2) K_1(\gamma_k v_1 R_1) - I_1(\gamma_k v_1 R_1) K_1(\gamma_k v_1 R_2) = 0,$$

$$\alpha_k = \frac{\mu_k}{R_1} (J_1(\mu_k) Y_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) - Y_1(\mu_k) J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1})) = 0,$$

де μ_k — розв'язок рівняння $J_1(\mu_k) = 0$.

Із граничних умов (3) маємо $C_0 = C_k = 0$. Також, задовольнивши першу умову (1), визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (6) з потрібних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta &= 0, \quad (R_2 < r < \infty), \\ \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta &= f(r), \quad (R_1 < r < R_2), \\ \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta &= 0, \quad (0 < r < R_1), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} f(r) = \varepsilon + \frac{\alpha_k}{n_1} &\left[(\alpha_k h m_1 - v_1(m_1 - 1)) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) M_k - \right. \\ &- m_1 \alpha_k \left(F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \cdot \left[Y_0(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k r) \right] T_k + \\ &\left. + \frac{4}{n_1} [m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 + m_2)h] \tilde{A}_0 T_k. \right. \end{aligned}$$

Далі з потрібних інтегральних рівнянь (9) та перших граничних умов (2)–(3) визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (6) через нескінченну систему кон-

стант T_k

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} = & \frac{2}{\pi} \left(\varepsilon \psi_0(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{\alpha_k}{m_1} T_k \left[\left(\alpha_k h m_1 - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - v_1(m_1 - 1) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right) M_k \psi_0(\eta, 0) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_k m_1 \left(F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right] \left(\psi_0(\eta, 0) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} \psi_0(\eta, \mu_k) \right) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4}{n_1} [m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 - m_2)h] \tilde{A}_0 T_k \psi_0(\eta, 0) \right\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta}, \quad \psi(\eta, \mu_k) = \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}.$$

З другої умови (2) отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = & \frac{R_1}{(1 + m_1) l_1 (s - s_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[Y_0(\alpha_k \rho) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k \rho) \right] \times \right. \\ & \times \left(\frac{\alpha_k^3 (1 + m_1) l_1}{v_1} \cdot \left[F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \right. \\ & \left. \left. + \alpha_k^2 (1 + m_2) l_2 M_k \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + 4(1 + m_2) l_2 \tilde{A}_0 \right\} T_k, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\rho = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$ – безрозмірна координата.

Проінтегруємо рівність (11) по $\rho J_0(\mu_n \rho) d\rho$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = & \frac{R_1}{(1 + m_1) l_1 (s - s_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[t_{nk}^{(1)} - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} t_{nk}^{(2)} \right] \times \right. \\ & \times \left(\frac{\alpha_k^3 (1 + m_1) l_1}{v_1} \cdot \left[F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_k^2 (1 + m_2) l_2 M_k \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + \\ & \left. + 4(1 + m_2) l_2 \tilde{A}_0 \frac{R_2 J_1(\mu_n R_2) - R_1 J_1(\mu_n R_1)}{\mu_n} \right\} T_k, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} t_{nk}^{(1)} = & \frac{R_1 \alpha_k J_0(\mu_n R_1) Y_1(\alpha_k R_1) - R_1 \mu_n J_1(\mu_n R_1) Y_0(\alpha_k R_1)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2} + \\ & + \frac{R_2 \mu_n J_1(\mu_n R_2) Y_1(\alpha_k R_2) - R_2 \alpha_k J_0(\mu_n R_2) Y_1(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2}, \end{aligned}$$

$$t_{nk}^{(2)} = \frac{R_1 \alpha_k J_0(\mu_n R_1) J_1(\alpha_k R_1) - R_1 \mu_n J_1(\mu_n R_1) J_0(\alpha_k R_1)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2} + \\ + \frac{R_2 \mu_n J_1(\mu_n R_2) J_1(\alpha_k R_2) - R_2 \alpha_k J_0(\mu_n R_2) J_1(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2}.$$

При обчисленні (12) використовуємо значення інтегралів:

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^\infty \eta \psi_0(0, \eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \psi_0(0, \mu_k), \\ \int_0^\infty \eta \psi(\eta, \mu_k) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\eta \rho) d\rho d\eta = \psi(\mu_n, \mu_k).$$

А для відшукування невідомих T_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$), що входять до (6), (7) та (10) отримаємо нескінченну систему

$$\tilde{\alpha}_k T_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} T_n = \tilde{\beta}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

де

$$\tilde{\beta}_k = -\frac{2\varepsilon\varpi_k}{\pi}; \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{8}{\pi n_1} (m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 - m_2)) \tilde{A}_0 \varpi_k; \\ \tilde{\alpha}_{kn} = \frac{R_1}{(1 + m_1)l_1(s - s_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[t_{nk}^{(1)} - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} t_{nk}^{(2)} \right] \left(\frac{\alpha_k^3(1 + m_1)l_1}{v_1} \times \right. \right. \\ \times \left. \left[F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \alpha_k^2(1 + m_2)l_2 M_k \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + 4(1 + m_2)l_2 \tilde{A}_0 \frac{R_2 J_1(\mu_n R_2) - R_1 J_1(\mu_n R_1)}{\mu_n} \left. \right\} - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{\alpha_k}{m_1} \left[(\alpha_k h m_1 - v_1(m_1 - 1)) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) M_k \varpi_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_k m_1 \left(F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right] \left(\varpi_k - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} \psi_0(\mu_n, \mu_k) \right) \right\rangle, \\ \varpi_k = \frac{(-1)^k \left[R_2^{2(k+1)} \tau_k(R_2) - R_1^{2(k+1)} \tau_k(R_1) \right]}{2^{2n+1} (k+1) k! (k+1)},$$

де

$$\tau_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \Gamma(2+k) \Gamma(0.5+n) \Gamma(n+1+k)}{n! \Gamma(2+n+k) \Gamma(0.5) \Gamma(1+k)}.$$

Відмітимо, що коефіцієнти системи (13) залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоти і радіусів кільцевого штамп.

Використавши умову рівноваги (5), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодійною навантаження у вигляді

$$P = 4\pi\epsilon C_{44}(1 + m_2)l_2(R_1^2 - R_2^2)\tilde{A}_0T_0.$$

Визначивши невідомі сталі T_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (13), обчислимо компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному кільцевому штампі за формулами (6) та (8).

4. Висновок. В статті представлено аналітичні розв'язки актуальної контактної задачі в рамках лінеаризованої теорії пружності для сучасного машинобудування та будівництва споруд, машин та інженерних конструкцій, а саме — задачу про тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями без врахування сил тертя. Розв'язки цієї задачі подані у вигляді рядів через нескінченну систему сталих величин χ_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$), які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (13) методом утинання.

Отже, розв'язок даної задачі дає змогу розширити коло наукових досліджень у межах механіки деформованого твердого тіла.

Список використаної літератури

1. Чеканович М. Г. Метод одночасного попереднього напруження і пересування залізобетонних конструкцій. *Таврійський науковий вісник. Серія: Технічні науки.* № 3. С. 198–204. DOI: <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.3.22>
2. Zharko L., Tarasiuk V., Ovchar V., Boretskaia N., Belokon A., Tashchilova A. Ризики та дефекти стикування арматурних стрижнів опресовуванням муфт. *Наука та будівництво.* Т. 18, № 4. С. 60–64. DOI: <https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v18i4.58>
3. Veliyev Q. J., Ipek C. The Influence of the Material Properties of an Inhomogeneous Pre-Stressed Hollow Cylinder Containing an Inviscid Fluid on the Dispersion of Quasi-Scholte Waves. *Int Appl Mech.* 2023. Vol. 59. P. 619–629. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01246-0>
4. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов : Вища шк., 1981. 136 с.
5. Semenyuk N. P., Zhukova N. B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics.* 2020. Vol. 56, No. 1. P. 40–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
6. Guz A. N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics.* 2022. Vol. 58, No. 1. P. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
7. Kaminsky A. O., Kurchakov E. E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics.* 2022. Vol. 58, No. 2. P. 154–159. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
8. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Saarbrücken : LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
9. Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст]. Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
10. Guz A. N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. Cham : Springer, 2021. 366 p.
11. Yarets'ka N. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses : Edited by: Guz A. N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V. M. *Advances in Mechanics.* Vol. 191. Advanced Structured Materials. Springer : Cham, 2023. P. 517–546. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29
12. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed

- cylindrical punch and elastic layer. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. P. 261–295. DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
13. Altenbach H., Bogdanov V., Bulat A., Guz A., Nazarenko V. A Brief Review of the Development of Mechanics in the National Academy of Sciences of Ukraine : Advances in Mechanics. Vol. 191. Advanced Structured Materials. Springer : Cham, 2023. P. 1–19. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_1
 14. Babich S. Yu., Glukhov Y. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No. 1. P. 43–52. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>
 15. Діхтярук М. М., Кравчук О. А. Дослідження поля впливу пружних переміщень і напружень для попередньо напруженої смуги від дії зосередженої сили. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 146–154. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).146-154)
 16. Habrusiev H., Habrusieva I., Shelestovskyi B. Simulation of a pre-deformed plate compression by two indenters of complex shape. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 2023. Vol. 112, No. 4. P. 91–101.
 17. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., В. Ф. Лазар, Н. П. Щекань. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 41, № 2. С. 91–102. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102)
 18. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Т. 39, № 2. С. 116–124. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124)
 19. Шелестовський Б., Габрусєва І. Стиснення двома жорсткими кільцевими штампами ізотропного шару з наявними залишковими деформаціями. *Вісник ТНТУ*. 2012. Т. 66, № 2. С. 82–88.

Babich S. Yu., Yaretska N. O., **Lazar V. F., Mlavets Yu. Yu.** Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp.

The article presents an analytical solution to the contact problem for two elastic half-spaces with initial stresses and a prestressed ring stamp, without considering frictional forces. We will assume that the surfaces outside the contact boundary of the ring stamp and the half-spaces remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The problem is solved in the case of equal roots of the defining equation. The study is presented in a general form for the theory of large initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential.

It is assumed that the initial states of the elastic ring stamp and the elastic bases are homogeneous and equal. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates. In addition, the influence of the ring stamp causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic ring stamp and the elastic half-spaces are made of different isotropic, transversally isotropic or composite materials. In the case of orthotropic bodies, we will assume that the elastically equivalent directions coincide with the direction of the coordinate axes in the deformed state. As a result, the solutions of the given problem are presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite quasi-regular system of algebraic equations. Several fundamental results, such as the Hankel transformation, triple integral equations, and other methods of the theory of contact problems of the linearized theory of elasticity, are used to study this problem.

In the article also establishes the connection between sinking and the corresponding

burden. Therefore, with the help of the obtained solutions, it is possible to study the influence of initial (residual) stresses on the distribution of contact stresses and displacements in two elastic half-spaces and an elastic ring stamp.

Keywords: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, ring stamp, half-space, integral equations.

References

1. Chekanovych, M. H. (2022). A method of prestressing reinforced concrete structures that increases their strength. *Taurida Scientific Herald. Series: Technical Sciences*, (3), 198–204. <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.3.22> [in Ukrainian].
2. Zharko, L., Tarasiuk, V., Ovchar, V., Boretskaia, N., Belokon, A., & Tashchilova, A. (2018). Risks and defects of reinforcement bars splicing by sleeves crimping. *Science and Construction*, 18(4), 60–64. <https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v18i4.58> [in Ukrainian].
3. Veliyev, Q. J., & Ipek, C. (2023). The Influence of the Material Properties of an Inhomogeneous Pre-Stressed Hollow Cylinder Containing an Inviscid Fluid on the Dispersion of Quasi-Scholte Waves. *Int Appl Mech.*, 59, 619–629. <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01246-0>
4. Hrilytskyi, D. V., & Kizyma, Ya. M. (1981). *Osesymetrychni kontaktni zadachi teorii pruzhnosti ta termoupruzhnosti* [Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity and thermoelasticity]. Lviv: Vyshcha shk. [in Ukrainian].
5. Semenyuk, N. P., & Zhukova, N. B. (2020). Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
6. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
7. Kaminsky, A. O., & Kurchakov, E. E. (2022). Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*, 58(2), 154–159. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
8. Guz, A. N., Babych, S. Iu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Mixed problems for an elastic foundation with initial stresses*. Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing.
9. Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2006). *Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses*. Khmelnytskyi: vyd. PP Melnyk.
10. Guz, A. N. (2021). *Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics*. Cham: Springer.
11. Yarets'ka, N. (2023). Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: Guz, A. N., Altenbach, H., Bogdanov, V., & Nazarenko, V. M. (eds.). *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. (Vol. 191). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29
12. Yaretska, N. O. (2022). *Mathematical model and solution of spatial contact problem for pre-stressed cylindrical punch and elastic layer*. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. Riga, Latvia: “Baltija Publishing”. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
13. Altenbach, H., Bogdanov, V., Bulat, A., Guz, A., & Nazarenko, V. (2023). A Brief Review of the Development of Mechanics in the National Academy of Sciences of Ukraine. *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. (Vol. 191). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_1
14. Babich, S. Yu., & Glukhov, Y. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(1), 43–52. <http://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>
15. Dikhtiaruk, M. M., & Kravchuk, O. A. (2022). Investigation of the field of influence of elastic displacements and stresses for a pre-stressed strip from concentrated force. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 146–154. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).146-154) [in Ukrainian].
16. Habrusiev, H., Habrusieva, I., & Shelestovskyi, B. (2023). Simulation of a pre-deformed plate compression by two indenters of complex shape. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, 112(4), 91–101.
17. Babych, S. Iu., Yaretska, N. O., Lazar, V. F., & Shchekan, N. P. (2022). Analytical solutions

- of the static problem on the pressure of pre-tensioned half-spaces and an elastic cylinder with initial stresses. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 41(2), 91–102. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102) [in Ukrainian].
18. Babych, S. Yu., Hlukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2021). Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 3. Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial stresses under the action of moving loads. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 39(2), 116–124. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124) [in Ukrainian].
19. Shelestovskyi, B., & Habrusieva, I. (2012). Pressing two hard ring stamps on an isotropic ball with obvious excessive deformations. *Visnyk TNTU*, 66(2), 82–88 [in Ukrainian].

Одержано 27.05.2024