УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).164-171

А. Ю. Глухов[1], С. Ю. Бабич[2], Ю. Ю. Млавець[3], О. К. Рейтій[4]

[1] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-0579-9046

[2] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2642-9115

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
oleksandr.reity@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6727-5418

ХВИЛІ КРУЧЕННЯ В ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ПРОКОВЗУВАННІ ШАРІВ

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних нестисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль та їх довгохвильові наближення.

Ключові слова: шаруватий композитний нестисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.

1. Вступ. Концепція хвильового руху — одне з найширших наукових понять. Хвилі можна вивчати на будь-якому науково-технічному рівні. Важливими в практичному аспекті є дослідження закономірностей поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями.

Огляд наявних в цій області робіт і детальний аналіз отриманих результатів до певної міри представлений в оглядових статтях [1, 2] та інших, а також в узагальнюючих монографіях [3–5] та інших.

Для композитних матеріалів періодичної структури в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями отримала розвиток теорія поширення пружних хвиль у випадку однорідного початкового напружено-деформованого стану. Для дослідження задач застосовувалися загальні розв'язки, що приведені в монографіях [3–6] та інших.

Відповідно до класифікації О. М. Гузя [1], отримані результати можна об'єднати в три групи.

До першої групи відносяться публікації О. М. Гузя [3] та інші, в яких розглянуті методи приведення шаруватих композитних матеріалів з початковими напруженнями до однорідного середовища.

До другої групи відносяться публікації О. М. Гузя, Ле Мінь Кханя та О. М. Панасюка [7–9] та інші, в яких розглянуті питання поширення плоских хвиль в шаруватих матеріалах.

До третьої групи відносяться публикації О. М. Гузя, О. М. Жука, Н. А. Сітенка, А. Ю. Глухова [10–14] та інші про поширення в радіальному напрямку вісесиметричних хвиль та хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури.

В роботах [7, 9–12] результати отримані для випадку повного контакту шарів.

У найбільш повній формі вищевказані результати представлені в монографіях О. М. Гузя [3, 5].

В реальних композитних матеріалах, як правило, існують різного роду дефекти на межі розділу шарів. Для оцінки впливу таких дефектів на закономірності поширення плоских гармонічних хвиль в композитних матеріалах О. М. Панасюк [8] розглянув такий граничний випадок контакту шарів як повне проковзування.

Задача про поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з однорідними початковими напруженнями при проковзуванні шарів досліджувалась в робота [13, 14].

З огляду літератури можна зробити висновок про те, що поширення плоских та вісесиметричних гармонічних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями вивчено достатньо повно. Дослідження даного класу задач проведені для випадку повного контакту шарів та для випадку повного проковзування шарів.

Для хвиль кручення аналогічні задачі розглядалися тільки для випадку повного контакту шарів.

В даній роботі досліджуються закономірності поширення пружних хвиль кручення в шаруватих нестисливих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

2. Постановка задачі і метод досліджень. Розглядається шаруватий композитний матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються, в кожному з яких матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими для розглянутого типу шарів.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3, які в початковому напруженодеформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами.

Декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) в початковому напружено-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3.

Під хвилями кручення будемо розуміти нормальні хвилі, що поширюються в радіальному напрямку і відповідають крутильним коливанням нескінченного шару.

Вважаємо початковий напружений стан однорідним

$$u_m^0 = (\lambda_m - 1)\, x_m; \quad \lambda_m = const. \tag{1}$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів реалізується вісесиметричний напружено-деформований стан

$$\begin{gathered} S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{2}$$

При вище вказаних умовах будемо досліджувати переміщення, що відповідають умовам [3, 4]

$$u_{r'}^{(j)} \equiv 0; \quad u_\theta^{(j)} = u_\theta^{(j)}\, (r', y_3, \tau)\,; \quad u_3^{(j)} \equiv 0; \quad u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} \equiv 0. \tag{3}$$

У цьому випадку в поданні спільних рішень просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності стосовно до загального рішення задачі в циліндричних координатах можна прийняти

$$\Psi'^{(j)} = \Psi'^{(j)}\, (r', y_3, \tau)\,; \quad \mathrm{X}'^{(j)} \equiv 0. \tag{4}$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u_\theta^{(j)}$ в кожному з шарів маємо наступні співвідношення [3, 4]

$$u_\theta^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \Psi'^{(j)}. \tag{5}$$

Для складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3 = const$ отримуємо вирази

$$Q'^{(j)}_{3\theta} = \kappa'^{(j)}_{3113} \frac{\partial}{\partial y_3} u_\theta^{(j)}. \tag{6}$$

В співвідношеннях (5) функції $\Psi'^{(j)}$ визначаються із рівнянь

$$\left(\Delta' + \kappa'^{(j)}_{3113} \kappa'^{(j)-1}_{1221} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho'^{(j)} \kappa'^{(j)-1}_{1221} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi'^{(j)} = 0. \tag{7}$$

Тут $\Delta'_1 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'}$; $\rho'^{(j)}$ — щільність матеріалів кожного з шарів в попередньо напруженому стані; τ — час. Складові тензорів $\kappa'^{(j)}$ визначаються для конкретних постановок задач [3, 5].

Таким чином, відповідно до вище викладеного дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (7) при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів і умов періодичності, відповідно теорії Флоке.

Розглянемо поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів. У цьому випадку за аналогією з [3, 5] для визначення "істинної" фазової швидкості поширення хвиль кручення у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями приймемо

$$\Psi'^{(j)}(r', y_3, \tau) = \Psi'^{(j)(0)}(y_3)\, H_0^{(1)}(r'k)\, e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

В (8) k і ω — хвильове число і кругова частота; C — "істина" фазова швидкість хвиль кручення; $H_0^{(1)}(x)$ — функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення хвиль кручення, що йдуть на "нескінченність"; $\Psi'^{(j)(0)}(y_3)$ — амплітудна функція. Надалі індексами (0) відзначені всі амплітудні величини при представленнях типу (8).

Підставляючи (8) в (5), для визначення переміщень отримуємо наступні вирази:

$$\begin{gathered} u_\theta^{(j)}(r', y_3, \tau) = u_\theta^{(j)(0)}(y_3)\, \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k)\, e^{-i\omega\tau}; \\ u_\theta^{(j)(0)}(y_3) = -\Psi'^{(j)(0)}(y_3). \end{gathered} \tag{9}$$

Аналогічно, підставляючи (8) в (6), для визначення складових тензора напружень $\tilde{Q}'^{(j)}$, при $y_3 = const$ отримуємо

$$\begin{gathered} Q'^{(j)}_{3\theta}(r', y_3, \tau) = Q'^{(j)(0)}_{3\theta}(y_3)\, \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k)\, e^{-i\omega\tau}; \\ Q'^{(j)(0)}_{3\theta}(y_3) = -\kappa'^{(j)}_{3113} \frac{\partial}{\partial y_3} \Psi'^{(j)(0)}(y_3). \end{gathered} \tag{10}$$

Підставлючи (8) в рівняння (7), отримаємо рівняння для визначення функції $\Psi'^{(j)(0)}$ в наступному вигляді

$$\left(\kappa'^{(j)}_{3113} \kappa'^{(j)-1}_{1221} \frac{d^2}{dy_3^2} + \rho'^{(j)} \omega^2 \kappa'^{(j)-1}_{1221} - k^2 \right) \Psi'^{(j)} = 0. \tag{11}$$

Оскільки в (8)–(11) всі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин. Для цього виділимо два сусідні шари і будемо вважати, що шар, величини якого відмічені індексом 1, займає по вісі Oy_3 область $0 \le y_3 \le h'^{(1)}$ і шар, всі величини якого відмічені індексом 2, займає по вісі Oy_3 область $-h'^{(2)} \le y_3 \le 0$.

За умови проковзування при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності

$$Q'^{(1)(0)}_{3\theta}(0) = 0; \quad Q^{(2)(0)}_{3\theta}(0) = 0; \tag{12}$$

і умови періодичності

$$Q'^{(1)(0)}_{3\theta}\left(h^{(1)}\right) = 0; \qquad Q^{(2)(0)}_{3\theta}\left(-h^{(2)}\right) = 0. \tag{13}$$

Таким чином, для нестисливого тіла необхідно знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння (11), що задовольнить умовам (12) і (13) з урахуванням позначень (9) і (10).

За аналогією з результатами, викладеними в [1], розв'язок рівняння (11) представимо в такій формі:

$$\Psi'^{(j)(0)}(y_3) = A_5^{(j)} e^{ik\alpha_3^{(j)} y_3} + A_6^{(j)} e^{-ik\alpha_3^{(j)} y_3}; \quad A_n^{(j)} = const. \tag{14}$$

Введемо в розв'язок (14) для кожного шару нові константи $B_n^{(j)}$ і запишемо його відносно середини кожного із шарів. В цьому випадку (14) можна записати у формі

$$\begin{aligned} \Psi'^{(1)(0)}(y_3) &= B_5^{(1)} e^{ik\alpha_3^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h'^{(1)}\right)} + B_6^{(1)} e^{-ik\alpha_3^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h'^{(1)}\right)}; \\ \Psi'^{(2)(0)}(y_3) &= B_5^{(2)} e^{ik\alpha_3^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h'^{(2)}\right)} + B_6^{(2)} e^{-ik\alpha_3^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h'^{(2)}\right)}. \end{aligned} \tag{15}$$

В (14) і (15) через $\alpha_3^{(j)}$ відповідно до (11) позначені наступні величини

$$\alpha_3^{(j)} = \sqrt{\kappa'^{(j)-1}_{3113} \left(\rho'^{(j)} C^2 - \kappa'^{(j)}_{1221}\right)}; \quad C = \omega k^{-1}. \tag{16}$$

У розглянутому випадку для шаруватих композитних нестисливих матеріалів з початковими напруженнями вихідну задачу можна розділити на дві незалежні задачі: симетрична хвиля кручення (в кожному шарі $u_\theta^{(j)}$ симетричні відносно середини кожного шару), що поширюється уздовж вісі Or'; антисиметрична хвиля кручення (в кожному шарі $u_\theta^{(j)}$ антисиметричні відносно середини кожного шару), що поширюється уздовж вісі Or'. Надалі розглянемо окремо симетричні та антисиметричні хвилі кручення.

Симетричні хвилі кручення. Для розглянутого випадку в (15) приймемо такі залежності:

$$B_5^{(j)} = B_6^{(j)}. \tag{17}$$

Із (17), (15) і (9) випливає, що $u_\theta^{(j)}$ будуть симетричними відносно середини кожного із шарів.

В цьому випадку із (17), (15), (9), (10), (12), (13) слідує, що умови неперервності і періодичності співпадають.

У випадку нежорсткого контакту між шарами композитного матеріалу умови неперервності і періодичності мають вигляд

$$\begin{aligned} B_5^{(1)} k\alpha_3^{(1)} \kappa'^{(1)}_{3113} \sin \frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} = 0; \\ B_5^{(2)} k\alpha_3^{(2)} \kappa'^{(2)}_{3113} \sin \frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Дисперсійне рівняння при нежорсткому контакті має вигляд

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} \kappa'^{(1)}_{3113} \kappa'^{(2)}_{3113} \sin \frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} \sin \frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \tag{19}$$

Рівняння (19) можна розв'язати аналітично. Чотири розв'язки рівняння (19) мають вигляд

$$\begin{gathered} C_1^{(1)} = \sqrt{\frac{\kappa'^{(1)}_{1221}}{\rho'^{(1)}}}; \quad C_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\kappa'^{(2)}_{1221}}{\rho'^{(2)}}}; \quad C_2^{(1)} = \sqrt{\frac{\kappa'^{(1)}_{1221}}{\rho'^{(1)}} + \frac{4\pi^2 n^2 \kappa'^{(1)}_{3113}}{\rho'^{(1)} k^2 h'^{(1)2}}}; \\ C_2^{(2)} = \sqrt{\frac{\kappa'^{(2)}_{1221}}{\rho'^{(2)}} + \frac{4\pi^2 n^2 \kappa'^{(2)}_{3113}}{\rho'^{(2)} k^2 h'^{(2)2}}}; \quad n = 0, 1, ... \end{gathered} \tag{20}$$

Із (19) і (20) слідує, що між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження симетричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

Для довгохвильового наближення швидкості поширення симетричних хвиль кручення для кожного з шарів будуть визначатися першими двома формулами (20).

Відзначимо, що перші вирази у формулах (20) визначають швидкості поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

Антисиметричні хвилі кручення. Для розглянутого випадку в представленні розв'язку у формі (17) для двох сусідніх шарів приймемо наступні залежності

$$B_5^{(j)} = -B_6^{(j)}. \tag{21}$$

За умови (21) з (15) і (9) випливає, що $u_\theta^{(j)}$ будуть антисиметричними відносно середини відповідних шарів.

В цьому випадку із (21), (15), (9), (10), (12), (13) слідує, що умови неперервності і періодичності співпадають.

У випадку нежорсткого контакту між шарами композитного матеріалу умови неперервності і періодичності мають вигляд

$$\begin{gathered} B_5^{(1)} k\alpha_3^{(1)} {\kappa'}_{3113}^{(1)} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} = 0; \\ B_5^{(2)} k\alpha_3^{(2)} {\kappa'}_{3113}^{(2)} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Дисперсійне рівняння при нежорсткому контакті має вигляд

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} {\kappa'}_{3113}^{(1)} {\kappa'}_{3113}^{(2)} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(1)} h'^{(1)} \cos\frac{1}{2} k\alpha_3^{(2)} h'^{(2)} = 0. \tag{23}$$

Рівняння (23) можна розв'язати аналітично. Чотири розв'язки рівняння (23) мають вигляд

$$\begin{gathered} C_1^{(1)} = \sqrt{\frac{{\kappa'}_{1221}^{(1)}}{\rho'^{(1)}}}; \quad C_1^{(2)} = \sqrt{\frac{{\kappa'}_{1221}^{(2)}}{\rho'^{(2)}}}; \quad C_2^{(1)} = \sqrt{\frac{{\kappa'}_{1221}^{(1)}}{\rho'^{(1)}} + \frac{{\kappa'}_{3113}^{(1)}}{\rho'^{(1)}} \frac{\pi^2 \left(1+2n\right)^2}{k^2 h'^{(1)2}}}; \\ C_2^{(2)} = \sqrt{\frac{{\kappa'}_{1221}^{(2)}}{\rho'^{(2)}} + \frac{{\kappa'}_{3113}^{(2)}}{\rho'^{(2)}} \frac{\pi^2 \left(1+2n\right)^2}{k^2 h'^{(2)2}}}; \quad n = 0, 1, ... \end{gathered} \tag{24}$$

Із (23) і (24) слідує, що між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження антисиметричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

Для довгохвильового наближення швидкості поширення симетричних хвиль кручення для кожного з шарів будуть визначатися першими двома формулами (24).

Відзначимо, що перші вирази у формулах (24) визначають швидкості поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

3. Висновки. Таким чином, в даній роботі проведені дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів. Задача зводиться до побудови розв'язків рівняння відносно амплітудної функції при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів і умов періодичності, відповідно теорії Флоке. Для симетричних і антисиметричних хвиль кручення отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення.

Між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень. При довгохвильовому наближенні швидкості поширення симетричних і антисиметричних хвиль кручення для кожного з шарів рівні швидкостям поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення хвиль кручення у шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадок поширення хвиль уздовж шарів. Отримано дисперсійні рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль, а також їх довгохвильові наближення.

Список використаної літератури

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. *Прикл. механика.* 2002. Т. 38, № 1. С. 35–78.
2. Akbarov S. D. Recent Investigations on Dynamic Problems for an Elastic Body with Initial (Residual) Stresses (Review). *Int. Appl. Mech.* 2007. Vol. 41, No 12. P. 1305–1324. DOI: https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Київ : А.С.К., 2004. 672 с.
4. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Часть 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 501 с.
5. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Часть 2. Волны в частично ограниченных телах. Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 505 с.
6. Guz A. N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin : Springer-Verlag, 1999. 555 p.
7. Гузь А. Н., Кхань Л. М. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями. *Сов. прикл. механика.* 1976. Т. 12, № 1. С. 1–7. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01073873
8. Панасюк О. Н. Распространение плоских упругих волн в композитных слоистых материалах с начальными напряжениями при условии проскальзывания слоев. *Прикл. механика.* 2009. Т. 45, № 3. С. 120.
9. Khanh L. M. Propagation of Floquet waves in an elastic media with initial homogeneous deformations. *Rev. roum. sci. techn., Ser. mech. appl.* 1981. Vol. 26, No. 2. P. 233–247.
10. Гузь А. Н., Ситенок Н. А., Жук А. П. Осесимметричные упругие волны в слоистом сжимаемом композиционном материале с начальними напряжениями. *Прикл. механика.* 1984. Т. 20, № 7. С. 3–10.
11. Ситенок Н. А. Волны кручения в слоистых композитных материалах с начальними напряжениями. *Прикл. механика.* 1984. Т. 20, № 8. С. 112–116.
12. Guz A. N. Elastic Waves in Laminated Periodic Bodies with Initial (residual) Stresses. Book of Abst. of ICIAM 95 : Hamburg, 3–7 July 1995. 173 p.
13. Glukhov A. Yu. Axisymmetric Waves in Prestressed Incompressible Laminated Composi-

te Materials with Sliding Layers. *Int. Appl. Mech.* 2018. Vol. 54, No. 4. P. 399–410. DOI: https://doi.org/10.1007/s10778-018-0893-z

14. Guz A. N., Babich S. Yu., Glukhov A. Yu. Axisymmetric waves in highly elastic composite material with initial stresses. Long-wave approximation. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 2. P. 134–147. URL: http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001246803 (date of access: 18.04.2024).

Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu., Reity O. K. Torsion waves in layered composite incompresible materials with initial stresses at the slip of layers.

In the framework of the linearised theory of elasticity for bodies with initial stresses, the torsional wave propagation in layered composite incompressible materials with initial stresses at layer slippage is investigated. The case of wave propagation along the layers is considered. The dispersion equations for symmetric and antisymmetric waves and their long-wave approximations are obtained.

Keywords: laminated composite incompressible material, initial stresses, elastic waves, dispersive equation, long-wave approximation.

References

1. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Appl. Mechanics,* 38(1), 35–78.
2. Akbarov, S. D. (2007). Recent Investigations on Dynamic Problems for an Elastic Body with Initial (Residual) Stresses (Review). *Int. Appl. Mech.,* 43(12), 1305–1324. https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8
3. Guz, A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses.* Kyiv: A.S.K. [in Russian].
4. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 1. General questions. Waves in infinite bodies and surface waves.* Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].
5. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 2. Waves in partially constrained bodies.* Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].
6. Guz, A. N. (1999). *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies.* Berlin: Springer-Verlag.
7. Guz, A. N., & Khanh, L. M. (1976). Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations. *Soviet Applied Mechanics,* 12(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/BF01073873 [in Russian].
8. Panasiuk, O. N. (2009). Propagation of plane elastic waves in composite layered materials with initial stresses under the condition of slippage of layers. *Appl. Mechanics,* 45(3), 120 [in Russian].
9. Khanh, L. M. (1981). Propagation of Floquet waves in an elastic media with initial homogeneous deformations. *Rev. roum. sci. techn., Ser. mech. appl.,* 26(2), 233–247.
10. Guz, A. N., Sitenok, N. A., & Zhuk, A. P. (1984). Axisymmetric elastic waves in a layered compressible composite material with initial stress. *Appl. Mechanics,* 20(7), 3–10 [in Russian].
11. Sitenok, N. A. (1984). Torsional waves in layered composites with initial stresses. *Appl. Mechanics,* 20(8), 112–116 [in Russian].
12. Guz, A. N. (3–7 July, 1995). *Elastic Waves in Laminated Periodic Bodies with Initial (residual) Stresses.* Book of Abst. of ICIAM 95: Hamburg.
13. Glukhov, A. Yu. (2018). Axisymmetric Waves in Prestressed Incompressible Laminated Composite Materials with Sliding Layers. *Int. Appl. Mech.,* 54(4), 399–410. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0893-z
14. Guz, A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, A. Yu. (2021). Axisymmetric waves in highly elastic composite material with initial stresses. Long-wave approximation. *Int. Appl. Mech.,* 57(2), 134–147. Retrieved from http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001246803

Одержано 20.09.2024