УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).56-64

Я. В. Варга[1], А. В. Корпош[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доц. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
iana.varga@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7842-248X

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь
andrii.korposh@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7473-0183

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

Проведено дослідження розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам з параметром. В основі методу лежить перехід від заданих інтегральних крайових умов до параметризованих умов модельного типу, які мають простий вигляд початкових умов. Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно–аналітична схема, яка базується на параметризованих послідовних наближеннях із покращеними характеристиками збіжності. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайових задач.

Цю техніку та її переваги продемонстровано на прикладі інтегральної крайової задачі.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, нелінійна інтегральна крайова задача, неперервно диференційовний розв'язок, параметризація, умова Ліпшиця, поділ сегменту інтеграції, збіжність послідовних наближень.

1. Вступ. У даній роботі досліджується нелінійна інтегральна крайова задача наступного вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \lambda\right), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

$$\int_a^b g(s, x(s), \lambda) ds = d, \tag{2}$$

$$x_1(a) = x_{1a}, \tag{3}$$

де $f : [a, b] \times D \times [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ і $g : [a, b] \times D \times [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ задані неперервні функції у деякій обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^n$, конкретний вигляд якої буде показано нижче в (9), $\lambda \in [a_1, b_1]$ — невідомий скалярний параметр, а $d \in \mathbb{R}^n$ — заданий вектор. Крім того, припускається локальна ліпшицевість в області D функції f і g для всіх $t \in [a, b]$ і $\{u, v\} \in D$ у наступному вигляді:

$$\left|f(t, u, \lambda) - f(t, v, \lambda)\right| \leq K_f \left|u - v\right|, \tag{4}$$

$$\left|g(t, u, \lambda) - g(t, v, \lambda)\right| \leq K_g \left|u - v\right|, \tag{5}$$

де K_f, K_p, невід'ємні матриці розмірності $n \times n$.

Для дослідження існування і наближеного розв'язку задачі (1)–(3) застосуємо техніку, запропоновану в [3–8].

На основі цього підходу замість інтегральних крайових умов (2) вводяться в розгляд параметризовані "модельні умови" простого вигляду

$$x(a) = z, \quad x(b) = \eta, \tag{6}$$

де

$$z = \begin{pmatrix} x_{1a} \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

є невідомими параметрами і спочатку замість інтегральної крайової задачі (1)–(3) досліджуються розв'язки наступної системи параметризованих двоточкових крайових задач "модельного типу"

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \lambda\right), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = z, \ x(b) = \eta. \tag{7}$$

2. Дослідження модельної задачі. Вихідними є дві обмежені області $D_a, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b. Будується множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)\, z + \theta \eta, \tag{8}$$

і для невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ визначимо покомпонентний векторний ρ-окіл множини $D_{a,b}$ наступним чином

$$D = B\left(D_{a,b}, \rho\right) = \bigcup_{y \in D_{a,b}} B\left(y, \rho\right), \tag{9}$$

де під векторним ρ-околом точки $y \in \mathbb{R}^n$ розуміємо множину

$$B\left(y, \rho\right) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - y| \leq \rho\right\}.$$

На основі множини D, і правої частини системи диференціальних рівнянь (1) побудуємо вектор

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x,\lambda)\in[a,b]\times D\times[a_1,b_1]} f(t,x,\lambda) - \min_{(t,x,\lambda)\in[a,b]\times D\times[a_1,b_1]} f(t,x,\lambda)\right]. \tag{10}$$

Умова 1. Існує невід'ємний вектор $\rho \in \mathbb{R}^n$ такий, що

$$\rho \geq \delta_{[a,b],D}(f).$$

Умова 2. Існують невід'ємні матриці K_f, K_g для яких локально в області D для функцій f і g виконуються умови Ліпшиця (4), (5).

Умова 3. Найбільше власне значення матриці

$$Q = \frac{3\,(b-a)}{10} K_f, \tag{11}$$

менше за одиницю

$$r(Q) < 1. \tag{12}$$

Для вивчення розв'язків модельної параметризованої задачі (7) введемо в розгляд параметризовану послідовність функцій

$$x_0\left(t, z, \eta, \lambda\right) := z + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a}\right]\; z + \frac{t-a}{b-a}\eta, \tag{13}$$

$$x_m\left(t, z, \eta, \lambda\right) := z + \int\limits_a^t f\left(s, x_{m-1}\left(s, z, \eta\right), \lambda\right) ds - \tag{14}$$

$$-\frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f\left(s, x_{m-1}\left(s, z, \eta\right), \lambda\right) ds + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right], t \in [a, b]\,,\; m = 1, 2, ...,$$

де $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ є параметрами. Зауважимо, що всі функції $x_m\left(t, z, \eta, \lambda\right)$ задовольняють "модельні крайові умови" для будь-яких значень параметрів $z, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (14) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються* ***Умова 1–Умова 3****.*

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z, \eta) \in D_a \times D_b$:

1.Всі функції послідовності (14) є неперервно диференційовні на відрізку $t \in [a, b]$, мають значення в область D і задовольняють умовам (6).

2. Послідовність функцій (14) рівномірно збігається відносно $t \in [a, b]$ при $m \to \infty$ до граничної функції

$$x_\infty(t, z, \eta, \lambda) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, z, \eta, \lambda).$$

3. Гранична функція задовольняє „модельні умови"

$$x_\infty(a, z, \eta, \lambda) = z,\; x_\infty(b, z, \eta, \lambda) = \eta.$$

4. Функція $x_\infty\left(t, z, \eta, \lambda\right)$ є единим неперервно диферкнційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int\limits_a^t f(s, x(s), \lambda) ds - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f(s, x(s), \lambda) ds + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right], \, t \in [a, b]\,,$$

в області D.

Іншими словами, $x_\infty\left(t, z, \eta\right)$ задовольняє задачу Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda)\; + \frac{1}{b-a}\Delta(z, \eta, \lambda),\; x\left(a\right) = z,\; t \in [a, b]\,,$$

де $\Delta(z, \eta, \lambda) : D_a \times D_b \to \mathbb{R}^n$ це відображення, яке визначене формулою:

$$\Delta(z, \eta, \lambda) = \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta), \lambda) ds.$$

5.Справедлива оцінка

$$|x_\infty(\cdot, z, \eta, \lambda) - x_m(\cdot, z, \eta, \lambda)| \leqslant \frac{10}{9}\alpha_1(t, a, b-a) Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \tag{15}$$

для всіх $t \in [a, b]$ *і* $m \geq 0$, *де* $\delta_{[a,b],D}(f)$ *задається формулою (10),*

$$\alpha_1(t, a, b-a) = 2\,(t-a)\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right),$$

причому

$$\alpha_1(t, a, b-a) \leq \frac{b-a}{2},$$

а матриця Q *має вигляд (11).*

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремі 1 [8]. А саме, на основі Лем, що доведені у [2], встановлюється, що при умовах теореми для фіксованих $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ і всіх $t \in [a, b]$ послідовність функцій (14) належить області D і є послідовністю Коші, тобто рівномірно збіжною, у Банаховому просторі неперервних вектор-функцій $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ з стандартною рівномірною нормою.

Теорема 2. *В умовах Теореми 1 гранична функція*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*, \lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*, \lambda),$$

послідовності (14) є неперервно диференційовним розв'язком інтегральної крайової задачі (1)–(3) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) *задовольняє систему* $2n$ *алгебраїчних чи трансцендентних, так званих „визначальних рівнянь“:*

$$\begin{aligned} \Delta(z, \eta, \lambda) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta), \lambda) ds = 0, \\ \Lambda(z, \eta, \lambda) &= \int_a^b g(s, x_\infty(s, z, \eta), \lambda) ds - d = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремах 2, 3 [1].

Наступне твердження показує, що система „визначальних рівнянь“ (16) виявляє всі можливі розв'язки інтегральної крайової задачі (1)-(3), які належать області D і значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належать відповідно множинам D_a і D_b.

Теорема 3. *Нехай виконуються усі умови Теореми 1.*

1. Якщо, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$*, які задовольняють систему визначальних рівнянь (16), тоді інтегральна крайова задача (1)–(3) має неперервно диференційовний розв'язок* $x^0(\cdot)$ *такий, що*

$$x^0(a) = z^0,\ x^0(b) = \eta^0.$$

Крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (14)

$$x^0(t) = x_\infty(t, z^0, \eta^0, \lambda) \ = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^0, \eta^0, \lambda), \ t \in [a, b] .$$

2. І навпаки, якщо інтегральна крайова задача (1)–(3) має розв'язок $x^0(\cdot) \in D$, *то система „визначальних рівнянь“ (16) задовольняється при*

$$z = x^0(a), \ \eta = x^0(b).$$

Зауважимо, що розв'язність системи „визначальних рівнянь“ (16) може бути встановлена на основі властивостей „наближеної системи визначальних рівнянь“

$$\begin{aligned} \Delta_m(z, \eta, \lambda) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s, z, \eta), \lambda) ds, \\ \Lambda_m(z, \eta, \lambda) &= \int_a^b g(s, x_m(s, z, \eta), \lambda) ds - d = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

яка може бути побудована явно.

На основі нерівностей (4), (5) і (15), врахувавши що

$$\int_a^b \alpha_1(t, a, b-a) dt = \frac{(b-a)^2}{3},$$

прямим обчисленням можна довести справедливість наступного твердження.

Лема 1. *Припустимо, що мають місце умови Теореми 1 і крім того виконуються умови Ліпшиця (4), (5).*

Тоді для точної і наближеної визначальних функцій (16) і (17) мають місце наступні оцінки для будь-яких пар векторів $(z, \eta) \ \in D_a \times D_b$ *і* $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\Delta(z, \eta, \lambda) - \Delta_m(z, \eta, \lambda)| &\leq \frac{10(b-a)^2}{27} K_f \ Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \\ |\Lambda(z, \eta, \lambda) - \Lambda_m(z, \eta, \lambda)| &\leq \frac{10(b-a)^2}{27} K \ Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f). \end{aligned} \tag{18}$$

3. Модельний приклад. Застосуємо чисельно-аналітичний підхід, що описаний вище на відрізку $[0, 1]$ до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{t}{8} x_2^3(t) - \frac{t}{5} x_1(t) + \frac{t^4}{216} + \frac{t^2}{50} - \frac{1}{10}, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{\lambda^2}{2} x_1(t) x_2(t) - \frac{t^2}{1200} - \frac{t}{240} + \frac{1}{3}, \quad t \in [0, 1] \,, \quad \lambda \in [-1, 0] \,, \end{aligned} \tag{19}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\begin{aligned} &\int_0^1 s\lambda^2 x_1(s)x_2(s)ds = \frac{7}{450}, \\ &\int_0^1 \frac{s^2}{3} x_2^2(s)ds = \frac{1}{135}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$x_1(0) = \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Очевидно, що (19)–(21) є окремим випадком (1)–(3) при $a := 0$, $b := 1$,

$$f(t, x_1, x_2, \lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{t}{8}x_2^3(t) - \frac{t}{5}x_1(t) + \frac{t^4}{216} + \frac{t^2}{50} - \frac{1}{10} := f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{\lambda^2}{2}x_1(t)x_2(t) - \frac{t^2}{1200} - \frac{t}{240} + \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$g(t, x_1, x_2, \lambda) := \begin{pmatrix} \int_0^1 t\lambda^2 x_1(t)x_2(t)dt \\ \int_0^1 \frac{t^2}{3}x_2^2(t)dt \end{pmatrix}, \qquad d := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{450} \\ \frac{1}{135} \end{pmatrix}.$$

Розв'язком крайової задачі (19)–(21) є пара функцій

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{t^2}{10} + \frac{1}{2}, \\ x_2^*(t) &= \frac{t}{3}. \end{aligned} \tag{22}$$

Введемо наступні параметри:

$$z := x(a) = x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ z_2 \end{pmatrix},$$
$$\eta := x(b) = x(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Виберемо області D_a і D_b:

$$D_a = D_b = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 0.8\}.$$

У цьому випадку, множина $D_{a,b}$ має вигляд

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

Виберемо вектор

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

тоді область D буде наступною:

$$D = \{(x_1, x_2) : -0.2 \leq x_1 \leq 1.2,\ -0.2 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (4) для правої частини (19) в області D виконується з матрицею

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{25} \end{pmatrix},$$

і маємо

$$Q = \frac{3}{20}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}, \quad r(Q) = 0.107321 < 1,$$

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2}\left(\max_{(t,x,\lambda)\in[a,b]\times D\times[a_1,b_1]} f(t,x,\lambda) - \min_{(t,x,\lambda)\in[a,b]\times D\times[a_1,b_1]} f(t,x,\lambda)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.25436 \\ 0.0865 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \geq \frac{1}{2}\delta_{[a,b],D}(f) = \begin{pmatrix} 0.12718 \\ 0.04325 \end{pmatrix}.$$

Всі умови Теореми 1 виконуються і тому послідовність функцій (14) для цього прикладу є збіжною.

Чисельні розрахунки показують, що розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь вигляду (17), при $m = 0, 1, 2, 3$ є числові значення, що представлені в Табл. 1.

Таблиця 1.

Наближені значення параметрів

m	λ	z_2	η_1	η_2
0	-0.4944144168	0.000006978058785	0.596969697	0.3333350778
1	-0.5000781257	9.577910704×10^{-7}	0.5999999995	0.3333344676
2	-0.5000035117	1.533681735×10^{-7}	0.6000020187	0.3333331722
3	-0.4999999154	2.623376717×10^{-9}	0.5999999939	0.3333333358

Похибка першої апроксимації ($m = 1$) наступна:

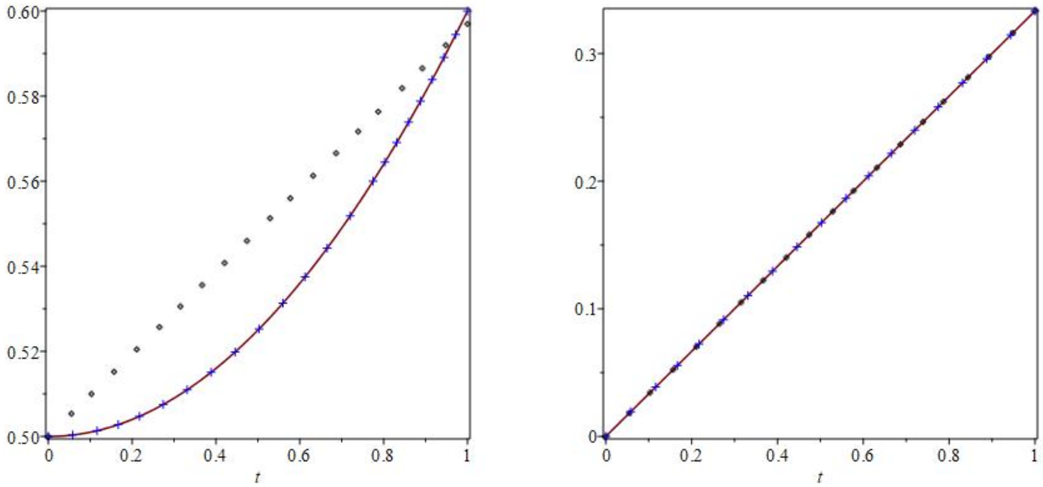
$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \approx 3\cdot10^{-4},$$

$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \approx 1.4\cdot10^{-5}.$$

Похибка третьої апроксимації ($m = 3$) наступна:

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \approx 3\cdot10^{-7},$$

$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \approx 1.5\cdot10^{-8}.$$



перша компонента друга компонента

Рис. 1. Точний розв'язок (22) (—) та його нульове ($\diamond$) і третє наближення ($\times$).

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Обґрунтовано ефективний підхід дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних крайових задач з параметром. Для модельної параметризованої задачі побудована оригінальна конструктивна чисельно-аналітична схема, яка основана на послідовних наближеннях із покращеними характеристиками рівномірної збіжності. Теоретичні викладки продемонстровано на прикладі задачі з нелінійними інтегральними крайовими умовами.

В подальшому можна буде провести дослідження систем диференціальних рівнянь, права частина яких задовольняє умови Каратеодорі.

Список використаної літератури

1. Ronto A., Ronto M., Varha Y. A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation.* 2015. Vol. 250. P. 689–700. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.021
2. Rontó M., and Mészáros J. Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations. *Ukrainian Math. J.* 1996. Vol. 48, No. 1. P. 101–107. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02390987
3. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes.* 2018. Vol. 19, No. 2. P. 1233–1241.
4. Ronto M., Varha Y. Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes.* 2014. Vol. 15, No. 2. P. 725–742.
5. Варга Я. В. Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2015. Вип. 26, № 1. С. 23–24.
6. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes.* 2018. Vol. 19, No. 2. P. 1221–1229.
7. Ronto A., Ronto M., Varga I. Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions. *Miskolc Mathematical Notes.* 2017. Vol. 18, No. 2. P. 1001–1014.
8. Варга Я. В., Рего В. Л., Семчишин Г. Я., Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач, *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика».* 2022. Т. 40, № 1. С. 33–50. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).33-50

Varga I. V., Korposh A. V. Investigation of solutions of integral boundary value problem with parameter.

The solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations subject to nonlinear integral boundary conditions with a parameter has been considered. At the heart of the method lies transition from given integral boundary conditions to parameterized conditions of model type, which have a simple appearance of the initial conditions. For a model parameterized problem, a constructive numerically-analytical scheme is constructed, which is built on parameterized approximations with improved convergence characteristics. The connection between the solutions of the model and transitional boundary value problems is established.

This technique and its advantages are illustrated by example of one integral boundary value problem.

Keywords: ordinary differential equations, nonlinear integral boundary value problems, continuously differentiated solution, parameterization, Lipshitz conditions, division of integration segment, convergence of successive approximations.

References

1. Ronto, A., Ronto, M., & Varha, Y. (2015). A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation,* 250, 689–700.
2. Ronto, M., & Mészáros, J. (1996). Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations. *Ukrainian Math. J.,* 48(1), 101–107. https://doi.org/10.1007/BF02390987
3. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes,* 19(2), 1233–1241.
4. Ronto, M., & Varha, Y. (2014). Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes,* 15(2), 725–742.
5. Varga, I. V. (2015). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics,* 26(1), 23–34 [in Ukrainian].
6. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes,* 19(2), 1221–1229.
7. Ronto, A., Ronto, M., & Varga, I. (2017). Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions. *Miskolc Mathematical Notes,* 18(2), 1001–1014.
8. Varga, I. V., Reho, V. L. & Semchyshyn, H. Y. (2022). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics,* 40(1), 33–50. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).33-50 [in Ukrainian].

Одержано 21.10.2024