УДК 519.7+517
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).172-187

Г. М. Гнатієнко[1], О. Г. Гнатієнко[2]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
заступник декана факультету інформаційних технологій з наукової роботи,
кандидат технічних наук
g.gna5@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0465-5018

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри інформаційних систем та технологій
oleksii.hnatiienko@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8546-5074

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НЕЧІТКИХ ЗНАЧЕНЬ ВІДНОСНОЇ ВАЖЛИВОСТІ ХАРАКТЕРИСТИК АЛЬТЕРНАТИВ З ВИКОРИСТАННЯМ СПОСОБУ НАШАРУВАННЯ

Дослідження присвячене розробці інструментарію, призначеного для аналізу та агрегування інтервальних значень вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив. Слабкоструктуровані предметні області характеризуються невизначеністю і у конкретних ситуаціях прийняття рішень це проявляється в розмитому оцінюванні експертами характеристик альтернатив у вигляді інтервальних значень. У статті пропонується метод агрегування інтервальних значень вагових коефіцієнтів характеристик, одержаних від групи експертів, у вигляді функції належності нечіткій множині. В основу методу покладено запропонований авторами спосіб нашарування. Описано алгоритм визначення кількості шарів при дослідженні взаємного попарного розташування інтервалів на прямій. Наводяться також результати експерименту виявлення відносної важливості ролей керівників організаційної системи для забезпечення її функціональної стійкості.

Ключові слова: інтервальні значення, вагові коефіцієнти, функція належності, аналіз розташування інтервалів, важливість ролей в організації, функціональна стійкість.

1. Вступ. У багатьох практичних ситуаціях особа, яка приймає рішення, закономірно змушена діяти в слабкоструктурованих предметних областях. До того ж, побудова структури переваг у формалізованому вигляді є складною задачею для людини [1, 2]: для експертів у предметних областях складно будувати метризовані відношення на множині об'єктів. Зокрема, людина не може задавати достовірні вагові коефіцієнти відносної важливості характеристик альтернатив чи критеріїв, коефіцієнти компетентності експертів, числові значення елементів метризованих матиць попарних порівнянь, побудувати обґрунтовану достовірну функцію належності тощо. Тим часом такі проблеми регулярно виникають у багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень в різних напрямках людської життєдіяльності і вимагають свого вирішення.

Багатоатрибутний вибір є одним з напрямків, який сприяє адекватній формалізації ситуацій прийняття рішень та допомагає експертам і особам, що приймають рішення, вирішувати слабкоструктуровані та неструктуровані проблеми, які характеризуються значною кількістю критеріїв, атрибутів та цілей. При описі процесу прийняття рішень зазвичай розглядаються:

- альтернативи — набір об'єктів, варіантів, продуктів, дій, виборів, планів, проєктів, стратегій тощо;

- атрибути — набір характеристик, ознак, показників, факторів тощо, які визначають кожну альтернативу;
- цілі — бажаний стан альтернативи, бажані значення набору атрибутів альтернативи, які обриться особою, що приймає рішення;
- ваги — відносні коефіцієнти важливості, значущості кожного атрибуту альтернатив, відносної важливості критеріїв, вагомості альтернатив, числові показники компетентності експертів.

Зазвичай розрізняють багатоцільове прийняття рішень, багатоатрибутне прийняття рішень та багатокритеріальне прийняття рішень. Багатоцільове прийняття рішень містить набір конфліктуючих цілей, які можуть бути досягнуті одночасно. Багатоатрибутне прийняття рішень здійснюється для завдань вибору набору альтернатив, що характеризуються їх атрибутами, найчастіше за наявності однієї мети. Багатокритеріальним прийняттям рішень зазвичай вважається прийняття рішень при багатьох атрибутах і за наявності кількох конфліктуючих критеріїв.

Часто експерти мають неоднозначну інформацію про переваги, нерідко бувають не впевнені у своїх оцінках та не можуть визначити їх точні числові значення. Тому реальніший підхід для вираження переваг полягає у використанні вербальних тверджень замість числових величин.

При груповому прийнятті рішень процес розвивається з використанням згортки, яка агрегує узагальнені переваги окремих експертів або за одержаними усередненими оцінками вибирається найкраща альтернатива. Водночас практично завжди існує проблема узгодження оцінок при груповому прийнятті рішень та визначенні властивостей об'єктів. Судження експертів найчастіше є різними і мають бути агреговані для того, щоб отримати єдиний висновок, який був би в якомусь сенсі близький до усіх експертних значень. Нечіткі моделі використовуються як основний засіб для агрегування індивідуальної експертної інформації в різних практичних ситуаціях прийняття рішень.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню та аналізу методів вирішення проблеми визначення структури переваг на множині об'єктів, зокрема, вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив, присвячено значну кількість робіт у вітчизняній та зарубіжній літературі. В деяких роботах [1, 3] відзначається складність отримання безпосередньої несуперечливої інформації від експерта про числові значення вагових коефіцієнтів атрибутів альтернатив. На основі проведених досліджень [1] доводиться, що експерт може адекватно визначити вагові коефіцієнти, тобто, коефіцієнти значущості, у випадках, коли кількість атрибутів, що характеризують альтернативи, не перевищує трьох. У випадках, коли альтернативи характеризуються більшою кількістю атрибутів, можливе застосування непрямих методів, в яких структура переваг відновлюється на основі попередньо прийнятих експертних рішень.

Серед поширених способів представлення значень вагових коефіцієнтів слід відзначити такі [1]:

- довільні дійсні чи натуральні числа $-\infty < x_i < \infty$, $i \in I$;
- дійсні числа з врахуванням обмежень (односторонніх чи двосторонніх), наприклад, $x_i > 0,\ i \in I$; $-5 \le x_i \le 5,\ i \in I$; $0 < x_i < 1,\ i \in I$;

- дійсні чи натуральні числа з урахуванням умови центрованості:

$$\sum_{i \in I} x_i = 0, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i \in I;$$

- дійсні числа з урахуванням умови нормованості:

$$\sum_{i \in I} x_i = 1, \quad x_i > 0, \quad i \in I.$$

Поширеною формою представлення нормованих вагових коефіцієнтів є інтервальна форма — гіперпаралелепіпед вагових коефіцієнтів [1]

$$x \in \left[x_i^H, x_i^B\right], \quad i \in I, \quad 0 < x_i^H \leq x_i^B < 1, \quad i \in I.$$

Причому, $I = \{1, \ldots, k\}$ — множина індексів експертів, k — кількість експертів.

Методи визначення інтервальних значень вагових коефіцієнтів розглядалися, зокрема, в роботах [1, 4]. В роботі [7] запропоновано крім фіксованих та інтервальних значень вагових коефіцієнтів розглядати також відносні коефіцієнти важливості чи впливовості деяких величин.

На сьогодні підходи, які використовують методи теорії нечітких множин, дозволяють проводити обробку розмитих експертних оцінок, але такі підходи не враховують особливостей сприйняття експертами кількісних значень фізичних величин. Для обгрунтування та подальшого викладення матеріалу введемо кілька додаткових евристик.

Евристика E1. *Інтервали або сегменти значень більшою мірою відображують судження експертів про відношення переваги, ніж точкові значення вагових коефіцієнтів.*

Евристика E2. *Функція належності нечіткій множині містить більше інформації про відношення переваги групи експертів, ніж інтервали або сегменти, і краще відображає колективне судження групи експертів.*

Таким чином, акумульована (агрегована, узагальнена, узгоджена тощо) інформація, одержана від групи експертів, не втрачається, хоч і трансформується в інший аналітичний вигляд з деякими неминучими і закономірними похибками.

Наголосимо також на основному моменті для такого роду експертиз. Експерти працюють у звичній для себе предметній області і визначення інтервалів чи сегментів значень відносної важливості характеристик альтернатив здійснюється непрямими методами.

В роботі [8] розглянуто спосіб нашарування для агрегування інтервалів або сегментів значень вагових коефіцієнтів та визначення структури переваг експертів у вигляді функцій належності нечіткій множині.

3. Постановка задачі. Основна мета цього дослідження полягає у розробці підходу, який дозволяв би агрегувати задані експертами інтервали або сегменти відносної важливості характеристик альтернатив і, за можливості, мінімізував би при цьому втрати інформації про переваги між характеристиками альтернатив, тобто максимально відображав би судження групи експертів про рівень впливу на прийняття рішення кожної характеристики альтернативи. В багатьох випадках експертові зручніше задавати переваги в нечіткій, розмитій формі у вигляді інтервалів зміни коефіцієнтів відносної важливості об'єктів, тобто гіперпаралелепіпеда значень у просторі вагових коефіцієнтів.

Постановки задач визначення відносної важливості критеріїв, ваги альтернатив, впливовості їх характеристик та компетентності експертів у більшості випадків схожі і відрізняються лише інтерпретацією. Тому будемо розглядати визначення вагових коефіцієнтів взагалі, маючи на увазі те, що ця задача може інтерпретуватися у будь-якому з чотирьох зазначених аспектів.

Нехай задано множину альтернатив (об'єктів, варіантів, планів, проєктів тощо) $a_i \in A$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, кожна з яких характеризується m ознаками (атрибутами, характеристиками, факторами тощо) $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^m)$, $i \in I$.

Для побудови моделі конкретної задачі нерідко виникає необхідність у визначенні відносної вагомості характеристик та їх впливу на прийняття рішення — для збільшення визначеності та підвищення структурованості предметної області. Оскільки людина у більшості випадків не спроможна адекватно призначати відносну вагу [1], перспективним напрямком для вирішення проблеми визначення вагових коефіцієнтів характеристик є непрямі методи.

У практичних випадках нерідко існує історія переваг між об'єктами (гравцями, проектами, підрозділами тощо) — проведення серії турнірів, за результатами неоднаразового вимірювання переваг експертів, будь-якої іншої природної інформації. На основі одержаної таким чином інформації необхідно визначити відносні рівні впливу одержаних в результаті експертизи інтервальних значень в числовому виразенні. При цьому слід забезпечити максимальне збереження початкової інформації про відношення переваги, яка надійшла від експертів.

4. Математична модель. Для побудови математичної моделі визначення нечітких значень відносних вагових коефіцієнтів розглянемо ситуацію прийняття рішення.

Нехай за участі кожного експерта непрямими методами задано інтервали відносної важливості вагових коефіцієнтів:

$$\left[x_i^{Hj}, x_i^{Bj}\right], \quad i = 1, \dots, \quad k, j = 1, \dots, m,$$

де:

k — кількість експертів;

m — кількість атрибутів альтернатив.

При цьому слід зазначити, що є не важливою конфігурація заданих інтервалів. Тобто, інтервали можуть співпадати, перетинатися, бути вкладеними один в одного. Деякі інтервали можуть бути представлені єдиною точкою, коли

$$\exists i, j : x_i^{Hj} = x_i^{Bj}, \quad i = 1, \dots, \quad k, j = 1, \dots, m.$$

Задача полягає у здійсненні агрегування інтервалів, заданих або обчислених за участі експертів. Тобто, інформація про відношення переваги експертів, представлена у вигляді K наборів інтервалів, має бути представлена у вигляді функції належності нечіткій множині, яка б зберігала інформацію про задані експертами відношення, на скільки це можливо.

Евристика Е3. *Множина значень відносної важливості характеристик альтернатив, утворена на основі інтервалів значень вагових коефіцієнтів, одержаних від експертів, є нечіткою.*

Введемо такі позначення відповідно для сегментів та інтервалів вагових значень коефіцієнтів:

$$P^i = \left[\min_{j=1,\dots,k} x_i^{Hj}, \max_{j=1,\dots,k} x_i^{Bj}\right], \quad i = 1, \dots, m, \tag{1}$$

$$P^i = \left(\min_{j=1,\dots,k} x_i^{Hj}, \max_{j=1,\dots,k} x_i^{Bj}\right), \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Означення 1. *Для множин P^i, $i = 1, \dots, m$ та функцій належності $\mu^i : P^i \to [0, 1]$ нечіткі множини визначаються як*

$$\tilde{A}^i = \left\{ \left(x, \mu^i A\left(x\right)\right) \middle| x \in P^i \right\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Функції належності для вагових коефіцієнтів, які відображують нечітку важливість характеристик альтернатив, будемо будувати з урахуванням того, що з ними асоціюється властивість відображати міру належності вагових коефіцієнтів до деяких визначених значень, тобто властивість мати кількісно заданий рівень відносної важливості.

Для кожного вагового коефіцієнта x_i, $i = 1, \dots, m$ універсумом є інтервал $X = (0, 1)$. Функція $\mu^i\left(x\right), i = 1, \dots, m$ є функцією належності, а її значення — ступенем належності значення x_i, $i = 1, \dots, m$ нечіткій множиі $\tilde{A}^i \subset X$, $i = 1, \dots, m$. Носієм нечіткої множини $\tilde{A}^i$, $i = 1, \dots, m$, називається така множина, яка містить лише ті елементи множини $\tilde{A}^i$, $i = 1, \dots, m$, ступінь належності яких $\mu^i\left(x\right) > 0$, $i = 1, \dots, m$, тобто носієм нечіткої множини значень вагових коефіцієнтів x_i, $i = 1, \dots, m$ є сегменти або інтервали виду (1) чи (2).

Евристика Е4. *Будемо вважати, що нечіткі множини значень вагових коефіцієнтів та відповідних функцій належності є унімодальними.*

Евристика Е5. *Вважатимемо, що функції належності для усіх вагових коефіцієнтів є нормальними, тобто $\mu^i\left(x\right) = 1$, $i = 1, \dots, m$.*

4.1. Спосіб нашарування. Коротко розглянемо суть ідеї нашарування. Будемо умовно вважати, що кожному заданому чи обчисленому інтервалу або сегменту відповідає деяка геометрична фігура з такими ж координатами, але ця фігура має деяку товщину. При визначенні чергового інтервалу чи сегменту для кожного вагового коефіцієнта характеристик альтернатив такі фігури нашаровуються одна на одну. Але таке нашарування здійснюється особливим чином — як при грі в «Тетріс». Фрагменти інтервалів заповнюють порожнини між шарами так, що чергова утворена конфігурація шарів є цілісною, без порожнин. В результаті на основі нашарування k шарів утворюється деяка фігура, яка може бути для зручності використання апроксимована функцією належності усталеного виду — трикутною, трапецієподібною, S-подібною, Z-подібною, П-подібною, Гаусовою тощо.

5. Одержані результати дослідження.

5.1. Аналіз варіантів взаємного попарного розташування інтервалів на прямій. Розглянемо та проілюструємо можливі комбінації взаємного попарного розташування інтервалів вагових коефіцієнтів на прямій. Для реалізації підходу нашарування слід врахувати ситуації, які можуть виникнути при включенні в систему кожного чергового інтервалу.

Зрозуміло, що оскільки експерти вільні у визначенні значень відносної важливості характеристик альтернатив, то вони можуть запропонувати найрізноманітніші варіанти власних індивідуальних уявлень про нормовані вагові коефіцієнти. Для загального аналізу визначення комплексного розташування усіх індивідуальних розташувань експертних вагових інтервалів, розглянемо усі можливі варіанти взаємного попарного розташування цих інтервалів.

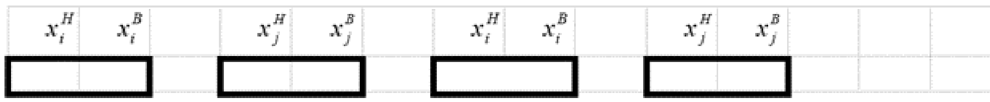

Рис. 1. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ не перетинаються, $\left[x_i^H, x_i^B\right] < \left[x_j^H, x_j^B\right]$.

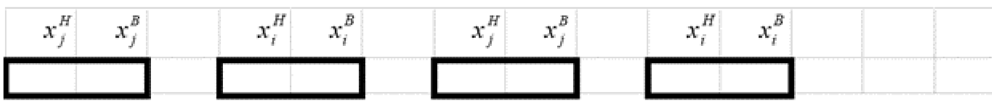

Рис. 2. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ не перетинаються, $\left[x_j^H, x_j^B\right] < \left[x_i^H, x_i^B\right]$.

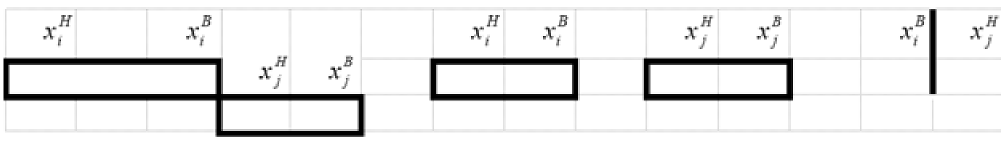

Рис. 3. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ дотичні, $x_i^B = x_j^H$.

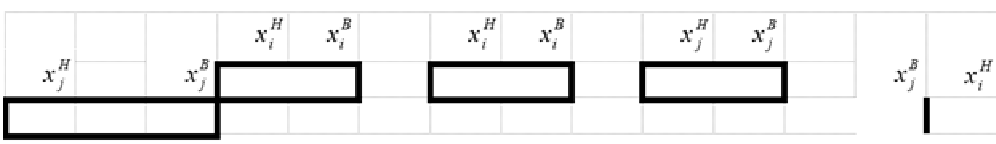

Рис. 4. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ дотичні, $x_j^B = x_i^H$.

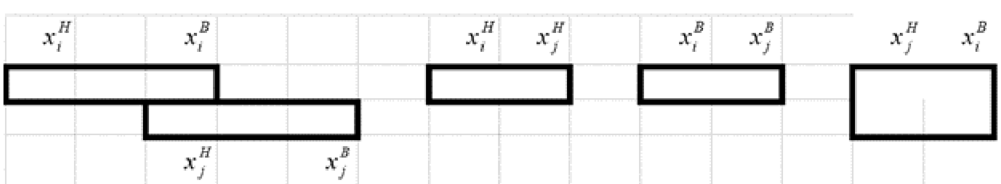

Рис. 5. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ перетинаються, $x_j^H = x_i^B$.

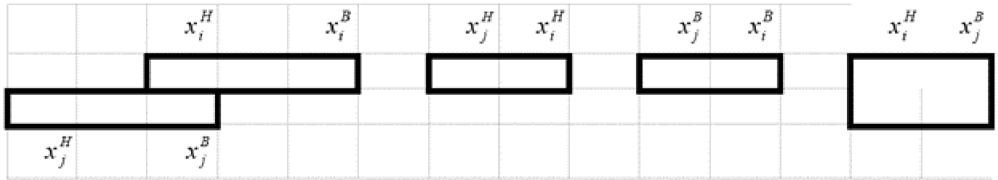

Рис. 6. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ перетинаються, $x_i^H = x_j^B$.

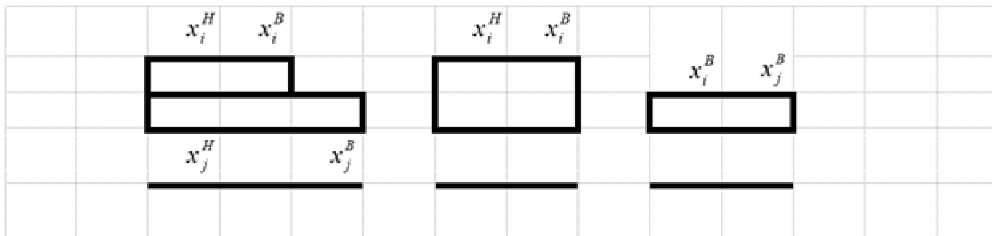

Рис. 7. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ перетинаються, $x_i^H = x_j^H$, $x_i^B < x_j^B$.

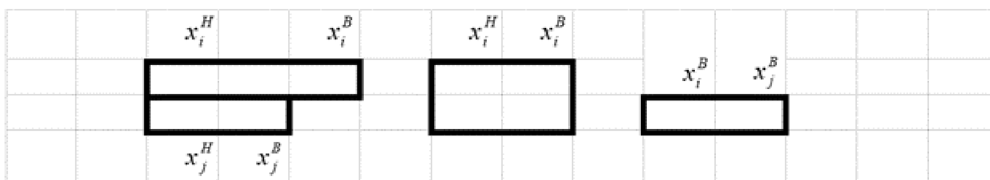

Рис. 8. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ перетинаються, $x_i^H = x_j^H$, $x_j^B < x_i^B$.

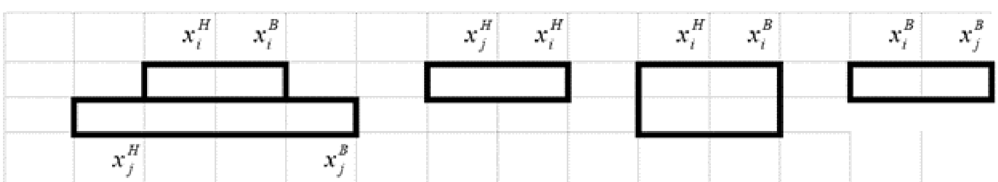

Рис. 9. Інтервал $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ включається в інтервал $\left[x_j^H, x_j^B\right]$, $\left[x_i^H, x_i^B\right] \subset \left[x_j^H, x_j^B\right]$.

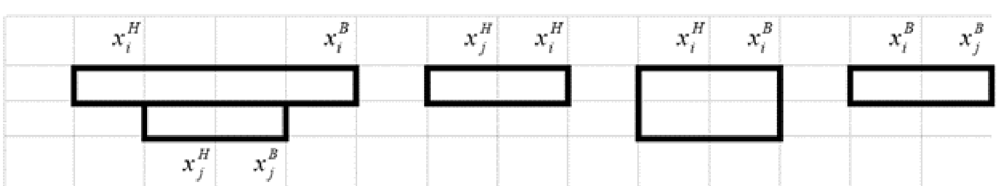

Рис. 10. Інтервал $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ включається в інтервал $\left[x_i^H, x_i^B\right]$, $\left[x_j^H, x_j^B\right] \subset \left[x_i^H, x_i^B\right]$.

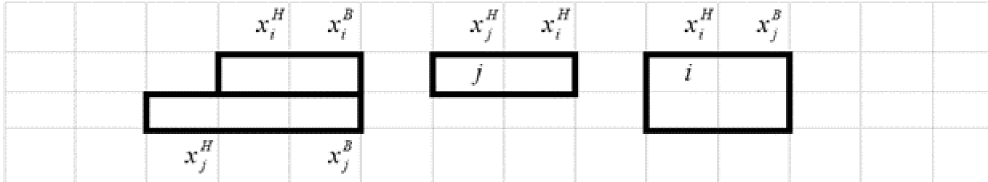

Рис. 11. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ перетинаються, $x_j^H < x_i^H$, $x_i^B = x_j^B$.

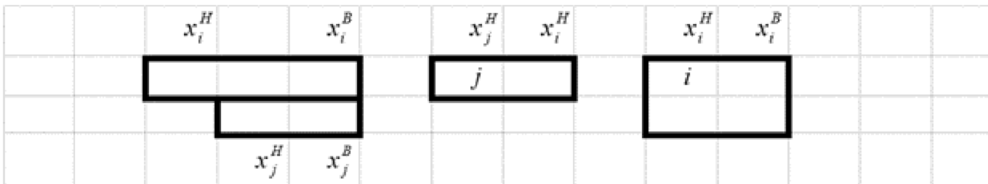

Рис. 12. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ перетинаються, $x_i^H < x_j^H$, $x_i^B = x_j^B$.

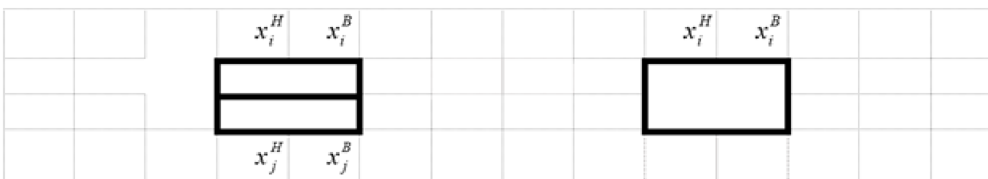

Рис. 13. Інтервали $\left[x_i^H, x_i^B\right]$ та $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ співпадають, $\left[x_i^H, x_i^B\right] = \left[x_j^H, x_j^B\right]$.
Вилучення інтервалу з індексом j.

Зведемо в таблицю 1 усі можливі варіанти взаємного розташування інтервалів і визначимо зміни у нашаруваннях залежно від попарної конфігурації інтервалів.

Таблиця 1.

Усі можливі варіанти взаємного розташування сегментів

№ рисунка	**Умови**	**Лічильник сегментів**	**Нові значення границь**	**Нова висота**
Рис. 1	$x_i^H < x_j^H$ & $x_i^B < x_j^H$	$s = s$	$\left[x_i^H, x_i^B\right]$, $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 2	$x_j^H < x_i^H$ & $x_j^B < x_i^H$	$s = s$	$\left[x_i^H, x_i^B\right]$, $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 3	$x_i^H < x_j^H$ & $x_i^B = x_j^H$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_s^B = x_i^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$\left[x_i^H, x_i^B\right]$, $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 4	$x_j^H < x_i^H$ & $x_j^B = x_i^H$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_s^B = x_j^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$\left[x_i^H, x_i^B\right]$, $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 5	$x_i^H < x_j^H$ & $x_j^H < x_i^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_j^H$, $x_s^B = x_i^B$	$h_s = h_i + h_j$

			$x_i^H = x_i^H$, $x_i^B = x_j^H$, $x_j^H = x_i^B$, $x_j^B = x_j^B$	h_i, h_j без змін
Рис. 6	$x_j^H < x_i^H$ & $x_i^H < x_j^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_i^H$, $x_s^B = x_j^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$x_j^H = x_j^H$, $x_j^B = x_i^H$, $x_i^H = x_j^B$, $x_i^B = x_i^B$	h_i, h_j без змін
Рис. 7	$x_i^H = x_j^H$ & $x_i^H < x_j^B$	$s = s$	$x_j^H = x_i^B$, $x_j^B = x_j^B$	$h_j = h_j$ без змін
			$\left[x_i^H, x_i^B\right]$, $\left[x_j^H, x_j^B\right]$ без змін	$h_i = h_i + h_j$
Рис. 8	$x_i^H = x_j^H$ & $x_j^H < x_i^B$	$s = s$	$x_i^H = x_i^H$, $x_i^B = x_i^B$ без змін	$h_i = h_i + h_j$
			$x_j^H = x_j^B$, $x_j^B = x_i^B$	$h_j = h_j$ без змін
Рис. 9	$x_j^H < x_i^H$ & $x_i^B < x_j^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_i^H$, $x_s^B = x_i^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$x_i^B = B$, $x_i^H = x_j^H$, $x_i^B = x_i^H$	$h_i = h_i$ без змін
			$x_j^H = B$, $x_j^B = x_j^B$	$h_j = h_j$ без змін
Рис. 10	$x_i^H < x_j^H$ & $x_j^B < x_i^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_j^H$, $x_s^B = x_j^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$x_i^B = B$, $x_i^H = x_i^H$, $x_i^B = x_j^H$	$h_i = h_i$ без змін
			$x_j^H = x_j^B$,$x_j^B = B$	$h_j = h_j$ без змін
Рис. 11	$x_j^H < x_i^H$ & $x_i^B = x_j^B$	$s = s$	$x_j^H = x_j^H$, $x_i^B = x_i^H$	$h_j = h_j$ без змін
			$x_i^H = x_i^H$, $x_i^B = x_j^B$	$h_i = h_i + h_j$
Рис. 12	$x_i^H < x_j^H$ & $x_i^B = x_j^B$	$s = s$	$x_j^H = x_i^H$, $x_j^B = x_i^B$	$h_j = h_j$ без змін
			$x_i^H = x_j^H$, $x_i^B = x_j^B$	$h_i = h_i + h_j$
Рис. 13	$x_i^H = x_j^H$ & $x_i^B = x_j^B$	$s = s - 1$ вилучення сегмента з індексом j	$x_i^H = x_i^H$, $x_i^B = x_i^B$ без змін	$h_i = h_i + h_j$

На наступному етапі застосування методу нашарувань слід використати закономірності, представлені в Таблиці 1, для побудови єдиної цілісної фігури з заданими координатами, про яку йшлося в підпункті 4.1 при описанні ідеї способу нашарування. Розглянемо алгоритм, який реалізує такий підхід.

5.2. Алгоритм визначення кількості шарів при дослідженні взаємного розташування сегментів на прямій. Для ситуації, коли виникла необхідність аналізу взаємного розташування одночасно кількох сегментів k, можна застосувати такий алгоритм.

1. Цикл по $l = 1, \ldots, m$, тобто, організація повторюваності дій для кожного окремого вагового коефіцієнта характеристик альтернатив.
2. Встановити лічильник поточної кількості сегментів $s = k$.
3. Цикл по $i = 1, \ldots, k - 1$.
4. Вкладений цикл $j = i + 1, \ldots, k$.

5. Визначення попарної конфігурації сегментів та побудова системи нашарування залежно від наявної інформації.
6. Завершення циклів по j та по i.
7. Вилучення сегментів з індексами, які виявлено для ситуації, відображеної на Рис. 13, та переіндексація номерів сегментів.
8. Присвоєння нового значення кількості сегментів $k = s$.
9. Упорядкування сегментів за неспаданням нижніх границь та зростанням верхніх границь.
10. Завершення циклу по l.

5.3. Обчислювальний експеримент. Для перевірки роботи описаного у цій роботі методу нашарування було проведено обчислювальний експеримент за участі експертів та менеджерів однієї з бізнесових компаній.

Множина ролей, якими для забезпечення функціональної стійкості формалізується діяльність підрозділів організаційної системи та взаємодія між елементами системи складається з ролей, які будемо позначати:

$$R = \{r_1, \dots, r_{p1}\}, \tag{3}$$

де $p1$ — кількість ролей елементів системи, які будуть використані при моделюванні забезпечення функціональної стійкості організаційної системи та визначенні рівня критичності її елементів.

Множину елементів організаційної системи позначимо через:

$$B = \{b_1, \dots, b_{p2}\}, \tag{4}$$

де $p2$ — кількість елементів організаційної системи, які забезпечують виконання множини функцій і, відповідно, забезпечують їй властивість функціональної стійкості;

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{p3}\}, \tag{5}$$

де $p3$ — кількість функцій, які виконуються елементами системи з множини (5), і які слід підтримувати заради функціональної стійкості організації.

Зазначимо, що потужність множини елементів організаційної системи (4) у загальному випадку є значно більшою, ніж потужність множини ролей (3), які виконуються елементами системи для забезпечення підтримки функціональної стійкості і виконання множини функцій (5), тобто $p3 >> p1$.

Евристика Е6. *Будемо виходити з припущень, що для кожної конкретної функції виду* (5)*, яка виконується елементами системи, можна визначити:*

- *ролі* (3) *елементів системи* (4)*, завдяки яким виконується функція* (5)*;*
- *важливість ролей* (3) *для кожної функції* (5) *у вигляді інтервалів вагових коефіцієнтів, а відтак, відносну важливість кожного елемента системи* (4) *для виконання кожної функції та функціональної стійкості.*

Тобто, відносна важливість ролей (3) в організаційній системі не є константою, а має змінний характер, залежно від того, яка роль виконується елементами системи (4) для забезпечення функціональної стійкості.

Експерти надають свої висновки про відношення переваги між ролями у звичних для них термінах предметної області. Інтервали вагових коефіцієнтів ролей обчислюються на основі непрямих методів визначення відносної важливості ролей [8, 9].

Евристика Е7. *При визначенні вагових коефіцієнтів непрямими методами може бути збільшена точність обчислення значень, оскільки у цьому випадку експерт надає інформацію про його переваги у звичній для нього ситуації прийняття рішень в знайомій предметній області. Такі рішення експерт або осола, що приймає рішення, приймають щодня і при цьому не прикладають зусиль для їх оцифровки. Числові значення вагових коефіцієнтів знаходяться шляхом застосування спеціально розроблених, досліджених та обгрунтованих алгоритмів.*

Евристика Е8. *Обмеження на ширину інтервалу не встановлюються: інтервали можуть бути як достатньо широкими, так і вироджуватися в точку. Величина визначеного інтервалу відображує не тільки компетентність експертів, але і його психологічні характеристики — схильність до ризику, темперамент тощо, особливості предметної області та деякі інші аспекти ситуації прийняття рішення.*

При цьому не порушуються вимоги теорії вимірювання для типів шкал вимірювання. Водночас немає вимог щодо ранжування альтернатив, тобто інтервали можуть перетинатися, як це проілюстровано на рисунках 1–13.

Оцінювалися 4 ролі топ-менеджерів ($p1 = 4$) компанії на основі непрямої інформації про переваги, одержаної в темінах предметної області управління персоналом від 10 експертів ($k = 10$). На основі відношень переваги, заданих 10 експертами у звичній для них предметній області, було обчислено нижні та верхні границі вагових коефіцієнтів ролей топ-менеджерів у компанії, у якій проводився консалтинг. Причому, рівень виконання ролей та їх відносної важливості є частиною загальної моделі оцінювання діяльності персоналу компанії.

Основні вимоги до інтервалів вагових коефіцієнтів альтернатив, визначених на основі експертних висновків у термінах предметної області, є природними і не обтяжливими:

- нижні границі інтервалів чи сегментів x_i^H, $i = 1, \dots, m$ мають бути в межах $0 < x_i^H \le 1$, $i = 1, \dots, m$;
- верхні границі інтервалів чи сегментів x_i^B, $i = 1, \dots, m$ також мають бути в межах $0 < x_i^B \le 1$, $i = 1, \dots, m$;
- верхні границі інтервалів чи сегментів x_i^B, $i = 1, \dots, m$ мають бути не меншими від нижніх границь інтервалів $0 < x_i^H \le x_i^B \le 1$, $i = 1, \dots, m$;
- сума верхніх границь інтервалів чи сегментів має задовольняти умові: $1 - \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^B < \min\limits_{j=1,\dots,m} x_j^H$;
- сума нижніх границь інтервалів чи сегментів має задовольняти умові: $1 - \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^H < \min\limits_{j=1,\dots,m} x_j^B$.

Причому, слід зазначити, що експертам не нав'язуються зайві обмеження — вони встановлюють свої відношення переваги на множині характеристик альтернатив у звичній для них предметній області. Методи визначення інтервалів або сегментів вагових коефіцієнтів передбачають виконання наведених вище вимог до границь зазначених інтервалів чи сегментів.

Результати визначення інтервалів вагових коефіцієнтів важливості ролей у організації на основі інформації, одержаної від експертів, представлено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Результати визначення інтервалів вагових коефіцієнтів важливості ролей у організації на основі інформації, одержаної від експертів

	Роль 1		**Роль 2**		**Роль 3**		**Роль 4**		**СУМА**	
	НВ	**ВВ**	**НВ**	**ВВ**	**НВ**	**ВВ**	**НВ**	**ВВ**	**НВ**	**ВВ**
Експерт 1	0,12	0,23	0,27	0,39	0,21	0,24	0,24	0,31	0,84	1,17
Експерт 2	0,15	0,25	0,31	0,34	0,24	0,35	0,18	0,19	0,88	1,13
Експерт 3	0,14	0,18	0,21	0,33	0,18	0,23	0,32	0,37	0,85	1,11
Експерт 4	0,11	0,16	0,33	0,33	0,15	0,25	0,24	0,27	0,83	1,01
Експерт 5	0,15	0,18	0,31	0,35	0,22	0,29	0,23	0,25	0,91	1,07
Експерт 6	0,11	0,14	0,22	0,36	0,32	0,33	0,3	0,34	0,95	1,17
Експерт 7	0,13	0,21	0,23	0,25	0,19	0,23	0,36	0,4	0,91	1,09
Експерт 8	0,17	0,17	0,26	0,3	0,25	0,26	0,2	0,29	0,88	1,02
Експерт 9	0,17	0,18	0,32	0,35	0,13	0,25	0,35	0,35	0,97	1,13
Експерт 10	0,16	0,27	0,3	0,3	0,3	0,31	0,2	0,23	0,96	1,11

У таблиці 2 в назвах стовпчиків літерами позначено:

НВ — нижні границі вагових коефіцієнтів ролей;

ВВ — верхні границі вагових коефіцієнтів ролей топ-менеджерів компанії.

5.4. Алгоритм побудови функції належності нечіткій множині на основі на основі гранулювання універсуму. Для вирішення проблеми агрегування інтервалів вагових коефіцієнтів можна також застосувати алгоритм дискретизації, який є дещо спрощеним, але менш точним від попереднього алгоритму.

1. Розбиття універсуму $X = (0, 1)$ на деяку кількість малих сегментів D, наприклад $D = 100$ або $D = 200$. Довжина кожного сегмента: $\delta = 1/D$.
2. Нумерація малих сегментів від 1 до D: $c_j = j/D$, $j = 1, \ldots, D$.
3. Визначаємо мінімальні та максимальні границі значень вагових коефіцієнтів сегментів (1) чи інтервалів (2).
4. Здійснюємо трансформацію інтервалів чи сегментів в характеристичні матриці $B^l = \left(b_{ij}^l\right)$, $l = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, D$, які визначають для кожної характеристики альтернативи з індексами $l = 1, \ldots, m$, чи співпадають значення вагових коефіцієнтів сегментів (1) або інтервалів (2) із значеннями малих сегментів за такими умовами:

$$b_{ij}^l = \left\{ \begin{matrix} 0, \quad \forall i = 1, \ldots, k, \quad j < x_j^H \cdot \delta \ \vee \ \forall i = 1, \ldots, k, \quad j > x_j^B \cdot \delta; \\ 1, \quad \forall i = 1, \ldots, k, \quad x_j^H \cdot \delta \leq j \leq x_j^B \cdot \delta \end{matrix} \right\}.$$

5. На основі визначених на кроці 4 матриць B^l, $l = 1, \ldots, m$ побудуємо табличні значення функцій належності вагових коефіцієнтів і зведемо їх в таблицю 3, де

$$\mu_j^l = \sum_{i=1}^{k} b_{ij}^l, \quad l = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, D.$$

6. На основі аналізу табличних значень функцій належності відновлюємо початкові координати вагових коефіцієнтів за формулою $x_j = c_j \cdot \delta$ і здійснюємо апроксимацію трикутними чи трапецієподібними функціями належності в аналітичному вигляді.
7. Перетворюємо обчислені на попередньому кроці функції належності у нормальну форму.

Таблиця 3.

Табличні значення функцій належності вагових коефіцієнтів на універсумі $X = (0, 1)$

c_j	1	2	$\cdots$	D
$\mu_A^1(x)$	μ_1^1	μ_1^1	$\cdots$	μ_D^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\mu_A^m(x)$	μ_1^m	μ_1^m	$\cdots$	μ_D^m

Скориставшись наведеними у цій роботі алгоритмами, на основі таблиці 2, побудованої за результатами обчислювального експерименту, обчислимо аналітичні значення функцій належності вагових коефіцієнтів 4 ролей в організації і зведемо їх в таблицю 4.

Таблиця 4.

Числові показники агрегованих у вигляді функцій належності інтервальних значень вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив

	Нижня границя	**Максимум**	**Верхня границя**
Роль 1	0,11	0,17	0,27
Роль 2	0,21	0,33	0,39
Роль 3	0,13	0,22	0,35
Роль 4	0,18	0,24	0,40
СУМА	0,63	0,96	1,41

Таким чином, при апроксимації результатів обчислювального експеримента трикутними функціями належності одержимо такі значення вагових коефіцієнтів в аналітичному вигляді:

$$\mu^1\left(x_1; x_1^H; x_1^{\max}; x_1^B\right) = \left\{\begin{matrix} 0; \quad x_1 \le 0,11 \\ (x_1 - 0,11)/0,06; \quad 0,11 \le x_1 \le 0,17 \\ (0,27 - x_1)/0,1; \quad 0,17 \le x_1 \le 0,27 \\ 0; \quad 0,27 \le x_1 \end{matrix}\right\},$$

$$\mu^2\left(x_2; x_2^H; x_2^{\max}; x_2^B\right) = \left\{\begin{matrix} 0; \quad x_2 \le 0,21 \\ (x_2 - 0,21)/0,12; \quad 0,21 \le x_2 \le 0,33 \\ (0,39 - x_2)/0,06; \quad 0,33 \le x_2 \le 0,39 \\ 0; \quad 0,39 \le x_2 \end{matrix}\right\},$$

$$\mu^3\left(x_3; x_3^H; x_3^{\max}; x_3^B\right) = \left\{\begin{matrix} 0; \quad x_3 \leq 0,13 \\ \left(x_3 - 0,22\right)/0,09; \quad 0,13 \leq x_3 \leq 0,22 \\ \left(0,35 - x_3\right)/0,13; \quad 0,22 \leq x_3 \leq 0,35 \\ 0; \quad 0,35 \leq x_3 \end{matrix}\right\},$$

$$\mu^4\left(x_4; x_4^H; x_4^{\max}; x_4^B\right) = \left\{\begin{matrix} 0; \quad x_4 \leq 0,18 \\ \left(x_4 - 0,24\right)/0,06; \quad 0,18 \leq x_4 \leq 0,24 \\ \left(0,4 - x_4\right)/0,06; \quad 0,24 \leq x_4 \leq 0,4 \\ 0; \quad 0,4 \leq x_4 \end{matrix}\right\}.$$

Зауваження 1. *Апроксимація одержаних з використанням описаного методу характеристичних матриць може здійснюватися для S-подібних, Z-подібних, Гаусових та інших функцій належності.*

Зауваження 2. *Якість апроксимації може визначатися не тільки за критерієм середньоквадратичних відхилень, а й з використанням інших критеріїв, які доцільно застосовувати за логікою розв'язання задачі.*

Зауваження 3. *Описаний спосіб визначення функцій належності нечіткій множині вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив доцільно застосовувати для узгоджених експертних оцінок при наявності великої кількості результатів вимірювання.*

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій роботі ми обґрунтовано агрегували великий масив інформації з незначними втратами і представили у вигляді, зручному для подальшого використання. Запропонований у цій роботі підхід до визначення нечітких вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив має широкі перспективи. Він може бути застосований для визначення функцій належності нечіткій множині вагових коефіцієнтів не тільки атрибутів альтернатив, але й для визначення відносної важливості самих альтернатив, критеріїв або коефіцієнтів компетентності експертів у нечіткому вигляді. Для апроксимації одержаних агрегованих значень інтервалів можуть бути застосовані інші аналітичні види функцій належності нечіткій множині: трапецієподібні, S-подібні, Z-подібні, П-подібні, Гаусові тощо. Зрозуміло, що можуть бути використані комбінації цих функцій — для різних індексів вагових коефіцієнтів слід застосовувати ті види функцій, які найкращим чином апроксимують одержану в результаті обчислень агреговану множину експертних значень коефіцієнтів.

Список використаної літератури

1. Гнатієнко Г. М., Снитюк В. Є. Експертні технології прийняття рішень: Монографія. Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. 444 с.
2. Волошин О. Ф., Лавер В. О. Нечітка математика: навч. посіб. Київ : Київськ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2023. 111 с. URL: https://csc.knu.ua/media/filer_public/8f/e6/8fe65834-9cf5-4fec-a8ab-953c7745734d/fuzzy_metodichka.pdf (дата звернення: 12.04.2024).
3. Kadenko S. Defining Relative Weights of Data Sources during Aggregation of Pair-wise Comparisons. *In CEUR Workshop Proceedings.* 2017. Vol. 2067. P. 47–55. URL: https://ceur-ws.org/Vol-2067/paper7.pdf (date of access: 12.04.2024).
4. Маляр М. М. Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія. Ужгород : РА "АУТДОР-ШАРК", 2016. 222 с.
5. Гнатієнко Г. М., Маляр М. М., Поліщук А. В. Знаходження вагових коефіцієнтів для моделей задач багатокритеріального лінійного програмування. *Обчислювальний інтелект*

(результати, проблеми, перспективи) : праці міжнар. наук.-практ. конф. Київ-Черкаси : Київ ВПЦ «Київський університет», 16–18 травня 2017 р. С. 230–231.

6. Мавренков О., Матвійчук С. Вибір методу визначення коефіцієнтів вагомості показників технічної досконалості при оцінюванні технічного рівня зразків озброєння та військової техніки. *Збірник наукових праць Державного науково-дослідного інституту авіації.* 2023. Вип. 19, № 26. С. 71–79. URL: https://znp.dndia.org.ua/index.php/znp/issue/view/3 (дата звернення: 12.04.2024).
7. Гнатієнко Г. М. Визначення вагових коефіцієнтів критеріїв задачі багатокритеріальної оптимізації у вигляді функцій належності нечіткій множині. *Матеріали доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та взаємодії»* : (IT&I — 2018). Київ : Київ ВПЦ «Київський університет», 2018. С. 29–30.
8. Гнатієнко О. Г., Гнатієнко Г. М. Метод побудови функції належності нечіткій множині на основі інтервальних значень ознак об'єктів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі* : матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції. М-во освіти і науки України. Київськ. нац. ун-т культури і мистецтв. Київ : Видавничий центр КНУКіМ, 2024. С. 100–102.
9. Bozóki S., and Tsyganok V. The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices. *International Journal of General Systems.* 2019. Vol. 48, No. 3–4. P. 362–381 DOI: https://doi.org/10.1080/03081079.2019.1585432
10. Saaty T. L. Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. RWS Publications : Pittsburgh, 1988.
11. Гнатієнко О. Г. Метод визначення відносної важливості працівників організації на основі аналізу їх ролей. *Міжнародний науковий симпозіум «Інтелектуальні рішення-С». Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи). Теорія прийняття рішень* : праці міжнар. наук. симпозіуму. Київ-Ужгород, Україна / М-во освіти і науки України, КНУ імені Тараса Шевченка та [ін.]. Київ : Видавництво «Каравела», 28 вересня 2023. С. 123–128.
12. Hnatiienko O., Druzhynin V. A Web Application for Describing the Structure of Roles and Performers of an Organizational System to Ensure its Functional Sustainability. *Proceedings of the 1st international scientific and practical conference "Information Systems and Technology: Results and Prospects"* : (IST 2024). Kyiv: FIT TSNUK, March 6, 2024. P. 136–139.

Hnatiienko H. M., Hnatiienko O. H. Method of Determining Fuzzy Values of the Relative Importance Characteristics of Alternatives Using the Layering Method.

The study is devoted to the development of tools intended for the analysis and aggregation of interval values of the weighting coefficients of the characteristics of the alternatives. Weakly structured subject areas are characterized by uncertainty, and in specific decision-making situations, this is manifested in a blurred assessment by experts of the characteristics of alternatives in the form of interval values. The article considers some approaches to the expert assignment of interval values of the characteristics of alternatives. A method of aggregating the interval values of the weighting coefficients of the characteristics obtained from a group of experts in the form of a function of belonging to a fuzzy set is proposed. The basis of the method is the method of layering proposed by the authors. The algorithm for determining the number of layers during the study of the mutual location of intervals determined by experts on a straight line is described. The results of the experiment to identify the relative importance of the roles of managers of the organizational system to ensure its functional stability are also given.

Keywords: interval values, weighting factors, membership function, analysis of the location of intervals, relative importance of roles in the organization, functional stability.

References

1. Hnatiienko, H. M., & Snytyuk, V. Y. (2008). *Expert decision-making technologies: Monograph.* Kyiv: Maklaut LLC [in Ukrainian].

2. Voloshyn, O. F., & Laver, V. O. (2023). *Fuzzy mathematics: teaching. manual.* Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. Retrieved from https://csc.knu.ua/media/filer_public/8f/e6/8fe65834-9cf5-4fec-a8ab-953c7745734d/fuzzy_metodichka.pdf [in Ukrainian].
3. Kadenko, S. (2017). Defining Relative Weights of Data Sources during Aggregation of Pairwise Comparisons. *In CEUR Workshop Proceedings,* 2067, 47–55. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-2067/paper7.pdf
4. Malyar, M. M. (2016). *Models and methods of multi-criteria bounded rational choice: Monograph.* Uzhhorod: RA "OUTDOOR-SHARK" [in Ukrainian].
5. Hnatiienko, H. M., Malyar, M. M., & Polishchuk, A. V. (May 16–18, 2017). Finding weighting coefficients for multicriteria linear programming problem models. *Computational intelligence (results, problems, prospects): Proceedings of the International science and practice conference.* Kyiv-Cherkasy: Kyiv PPC "Kyiv University" [in Ukrainian].
6. Mavrenkov, O., & Matviychuk, S. (2023). The choice of the method of determining the weighting coefficients of indicators of technical excellence when evaluating the technical level of samples of weapons and military equipment. *Collection of scientific papers of the State Aviation Research Institute.* 19(26), 71–79 [in Ukrainian].
7. Hnatiienko, H. M. (2018). Determination of the weight coefficients of the criteria of the multicriteria optimization problem in the form of functions belonging to a fuzzy set. *Materials of reports of the 5th International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Interactions".* (IT&I — 2018). Kyiv: Kyiv PPC "Kyiv University" [in Ukrainian].
8. Hnatiienko, H. M. (2024). Determining the weight coefficients of parameters in the form of a membership function using the layering method. *Information technologies in culture, art, education, science, economy and business: materials of the International Scientific and Practical Conference.* Ministry of Culture of Ukraine, Kyiv. National University of Culture and Arts. Kyiv: KNUKiM Publishing Center [in Ukrainian].
9. Bozóki, S., & Tsyganok, V. (2019). The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices. *International Journal of General Systems,* 48(3–4), 362–381. https://doi.org/10.1080/03081079.2019.1585432
10. Saaty, T. L. (1988). *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process.* RWS Publications: Pittsburgh,
11. Hnatiienko, O. H. (September 28, 2023). The method of determining the relative importance of the employees of the organization based on the analysis of their roles. *International Scientific Symposium "Intelligent Solutions (s)". Computational intelligence (results, problems, prospects).* Theory of decision-making: works of the International of science of the symposium. Kyiv-Uzhgorod, Ukraine & Ministry of Education and Science of Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv and [oth.]. Kyiv: Karavela Publishing House [in Ukrainian].
12. Hnatiienko, O., & Druzhynin, V. (March 6, 2024). A Web Application for Describing the Structure of Roles and Performers of an Organizational System to Ensure its Functional Sustainability. *Proceedings of the 1st international scientific and practical conference "Information Systems and Technology: Results and Prospects"* (IST 2024. Kyiv, Ukraine). Kyiv: FIT TSNUK.

Одержано 25.10.2024