

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).133-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).133-137)О. А. Ярова¹, Я. І. Єлейко²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oksana.yarova@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6284-1193>

² Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2200-8447>

ПОБУДОВА ЙМОВІРНІСНОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Дана стаття присвячена побудові ймовірнісних просторів для випадкових еволюцій. Розглядається випадковий процес з впливом зовнішнього середовища. Досліджуються випадки залежних та незалежних просторів. Побудовано ймовірнісний простір та розглянуто приклад використання ймовірнісного простору для випадкової еволюції.

Ключові слова: випадковий процес, випадкове середовище, ймовірнісний простір, випадкова еволюція, ймовірнісна міра.

1. Вступ. В сучасному світі дуже багато процесів описується випадковими процесами та математичними моделями, побудованими на їх основі. Але на процеси, які відбуваються, має великий вплив зовнішнє середовище. При чому, можливі й такі випадки, коли й на випадкове середовище впливає інше випадкове середовище, і їх може бути як завгодно багато. Тоді виникає потреба в побудові випадкової еволюції, яка залежить від випадкових середовищ, які впливають на випадковий процес. Зазвичай випадкові процеси та випадкові середовища знаходяться в різних ймовірнісних просторах, тому потрібно розширювати простір для випадкової еволюції або ж побудувати новий ймовірнісний простір. Мета даної роботи полягає в побудові ймовірнісних просторів для випадкових еволюцій у випадку залежних та незалежних випадкових середовищ.

2. Основний результат. Розглянемо випадковий процес $\xi(t)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , де Ω — простір елементарних подій, F — σ -алгебра, P — ймовірнісна міра. Нехай на даний процес впливає деяке випадкове середовище $X_1(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_1, F_1, P_1) .

Задамо випадкову еволюцію $\zeta(t)$ для випадкового процесу $\xi(t)$ з впливом випадкового середовища $X_1(t)$. Тоді $\zeta(t) = \xi(X_1(t))$. Але $\xi(t)$ та $X_1(t)$ задані на різних ймовірнісних просторах, тому потрібно розширити ймовірнісний простір так, щоб він узгоджувався з ймовірнісними просторами (Ω, F, P) та (Ω_1, F_1, P_1) .

Для початку побудуємо простір елементарних подій. Нехай ω — елементарна подія з простору елементарних подій Ω , а ω_1 — з простору Ω_1 , тобто $\omega \in \Omega$, $\omega_1 \in \Omega_1$. Тоді задамо простір елементарних подій $\tilde{\Omega}_1 = \{\omega, \omega_1\}$.

Далі побудуємо σ -алгебру. Нехай подія $A \in F$, а подія $A_1 \in F_1$. Тоді σ -алгебра випадкової еволюції буде породжена подіями A та A_1 , тобто $\tilde{F}_1 = \sigma(A, A_1)$.

Тепер перейдемо до ймовірнісних мір. Тут потрібно розглянути два випадки, оскільки $\xi(t)$ та $X_1(t)$ можуть бути, як незалежними, так і залежними. У випадку незалежності

$$P(A \times A_1) = P(A) \cdot P(A_1). \quad (1)$$

Якщо ж $\xi(t)$ та $X_1(t)$ — залежні, то задаємо ймовірнісну міру наступним чином

$$P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x\} \cdot P\{X_1(t) = x\}. \quad (2)$$

Таким чином, ймовірнісний простір для випадкової еволюції можна задати наступною трійкою

$$(\tilde{\Omega}_1, \tilde{F}_1, \tilde{P}_1),$$

де ймовірнісна міра $\tilde{P}_1$ визначається формулою (1) для незалежних просторів та формулою (2) для залежних.

Даний ймовірнісний простір побудовано для випадкової еволюції, у якій випадкове середовище $X_1(t)$ впливає на випадковий процес $\xi(t)$. Але ж на випадкове середовище $X_1(t)$ може впливати ще одне випадкове середовище, позначимо його $X_2(t)$. В такому випадку ймовірнісний простір знову зміниться.

Нехай випадковий процес $\xi(t)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , на даний процес впливає деяке випадкове середовище $X_1(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_1, F_1, P_1) , а на це випадкове середовище впливає випадкове середовище $X_2(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_2, F_2, P_2) .

Задамо випадкову еволюцію $\zeta(t)$ для випадкового процесу $\xi(t)$ з впливом випадкових середовищ $X_1(t)$ та $X_2(t)$. Тоді $\zeta(t) = \xi(X_1(X_2(t)))$. Побудуємо новий ймовірнісний простір.

Почнемо з простору елементарних подій. Нехай ω — елементарна подія з простору елементарних подій Ω , ω_1 — з простору Ω_1 , а ω_2 — з простору Ω_2 , тоді простір елементарних подій $\tilde{\Omega}_2 = \{\omega, \omega_1, \omega_2\}$.

Далі побудуємо σ -алгебру. Нехай подія $A \in F$, подія $A_1 \in F_1$, а подія $A_2 \in F_2$. Тоді σ -алгебра випадкової еволюції буде породжена цими подіями, тобто $\tilde{F}_2 = \sigma(A, A_1, A_2)$.

Перейдемо до ймовірнісних мір. Нехай $\xi(t)$, $X_1(t)$ та $X_2(t)$ — незалежні, тоді

$$P(A \times A_1 \times A_2) = P(A) \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \quad (3)$$

Якщо ж $\xi(t)$ та $X_1(t)$, а також $X_1(t)$ та $X_2(t)$ — залежні, то задаємо ймовірнісну міру наступним чином

$$P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x_1\} \cdot P\{X_1(t) = x_1 | X_2(t) = x_2\} \cdot P\{X_2(t) = x_2\}. \quad (4)$$

Тоді, ймовірнісний простір для випадкової еволюції можна задати наступною трійкою

$$(\tilde{\Omega}_2, \tilde{F}_2, \tilde{P}_2),$$

де ймовірнісна міра $\tilde{P}_2$ визначається формулою (3) для незалежних просторів та формулою (4) для залежних.

Аналогічним чином визначаються ймовірнісні простори для більшої кількості випадкових середовищ. Розглянемо випадок з впливом n випадкових середовищ.

Нехай випадковий процес $\xi(t)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , на даний процес впливає деяке випадкове середовище $X_1(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_1, F_1, P_1) , на це випадкове середовище впливає випадкове середовище $X_2(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_2, F_2, P_2) , на це випадкове середовище має вплив випадкове середовище $X_3(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_3, F_3, P_3) і так далі до випадкового середовища $X_n(t)$, заданого на ймовірнісному просторі (Ω_n, F_n, P_n) .

Тоді задаємо випадкову еволюцію $\zeta(t)$ для випадкового процесу $\xi(t)$ з впливом випадкових середовищ $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$. Таким чином $\zeta(t) = \xi(X_1(X_2(\dots X_n(t))))$.

Ймовірнісний простір задаємо трійкою

$$(\tilde{\Omega}_n, \tilde{F}_n, \tilde{P}_n),$$

де простір елементарних подій

$$\tilde{\Omega}_n = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

σ -алгебра

$$\tilde{F}_n = \sigma(A, A_1, A_2, \dots, A_n),$$

ймовірнісна міра у випадку незалежності випадкового процесу $\xi(t)$ та випадкових середовищ $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$

$$P(A \times A_1 \times A_2) = P(A) \cdot P(A_1) \cdot P(A_2),$$

а у випадку залежності

$$P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x_1\} \cdot P\{X_1(t) = x_1 | X_2(t) = x_2\} \cdot P\{X_2(t) = x_2 | X_3(t) = x_3\} \cdot \dots \cdot P\{X_n(t) = x_n\}.$$

Сформулюємо отримані результати у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай $\xi(t)$ — випадковий процес, заданий на (Ω, F, P) , на який впливають випадкові середовища $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, задані на (Ω_i, F_i, P_i) , $i = 1, \dots, n$. Тоді випадкова еволюція $\zeta(t) = \xi(X_1(X_2(\dots X_n(t))))$ задається на ймовірнісному просторі $(\tilde{\Omega}_n, \tilde{F}_n, \tilde{P}_n)$, де $\tilde{\Omega}_n = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ — простір елементарних подій, $\tilde{F}_n = \sigma(A, A_1, A_2, \dots, A_n)$ — σ -алгебра, $\tilde{P}_n = P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x_1\} \cdot P\{X_1(t) = x_1 | X_2(t) = x_2\} \cdot P\{X_2(t) = x_2 | X_3(t) = x_3\} \cdot \dots \cdot P\{X_n(t) = x_n\}$ — ймовірнісна міра.*

Розглянемо приклад використання ймовірнісних просторів.

Нехай $\xi(t)$ — випадковий процес, який описує щоденну зміну ціни акцій, а $X(t)$ — випадкове середовище, яке впливає на даний випадковий процес, тобто загальний стан ринку. Опишемо ймовірнісні простори для $\xi(t)$, $X(t)$ та випадкової еволюції.

Почнемо з випадкового середовища. Загальний стан ринку складається з трьох станів: зростання, спадання та стабільність. Нехай ймовірності цих станів дорівнюють 0.3, 0.3 та 0.4.

Тоді $\Omega_1 = \{\text{зростання, спадання, стабільність}\}$, $P\{\text{зростання}\} = 0.3$, $P\{\text{спадання}\} = 0.3$ та $P\{\text{стабільність}\} = 0.4$.

Перейдемо до випадкового процесу $\xi(t)$. В даному випадку

$$\Omega = \{\xi(t) : t = 1, 2, \dots, 365, \xi(t) \in \mathbb{R}\}.$$

Розподіл випадкового процесу буде відрізнятись, в залежності від того, в якому стані буде знаходитись фінансовий ринок. Розглянемо наступні випадки:

1. При умові зростання цін акцій на ринку $\xi(t)$ — нормально розподілений з параметрами $a = 0.2$ та $\sigma^2 = 0.01$;
2. При умові спадання цін акцій на ринку $\xi(t)$ — нормально розподілений з параметрами $a = -0.2$ та $\sigma^2 = 0.01$;
3. При умові стабільності цін акцій на ринку $\xi(t)$ — нормально розподілений з параметрами $a = 0$ та $\sigma^2 = 0.01$;

Тоді ймовірнісний простір для еволюції задаємо трійкою $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{F}_1, \tilde{P}_1)$, де $\tilde{\Omega}_1 = \{\omega, \omega_1\}$, $\omega \in \Omega$, $\omega_1 \in \Omega_1$. σ -алгебра випадкової еволюції буде породжена подіями A та A_1 , тобто $\tilde{F}_1 = \sigma(A, A_1)$. Ймовірнісна міра задається формулою $\tilde{P}_1 = P\{\xi(t) \in A | X(t) = x\} \cdot P\{X(t) = x\}$.

Розглянемо подію A , яка полягає в тому, що ціна на акцію в перший день зросла більше, ніж на 0.3 та знайдемо ймовірність даної події. Почнемо з умовних ймовірностей

$$P\{\xi(1) > 0.3 | \text{зростання}\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.3 - 0.2}{0.1}\right) = 0.1587,$$

$$P\{\xi(1) > 0.3 | \text{спадання}\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.3 + 0.2}{0.1}\right) = 0.000001,$$

$$P\{\xi(1) > 0.3 | \text{стабільність}\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.3}{0.1}\right) = 0.00135.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P(A) &= P\{\xi(1) > 0.3 | \text{зростання}\} \cdot P\{\text{зростання}\} + \\ &+ P\{\xi(1) > 0.3 | \text{спадання}\} \cdot P\{\text{спадання}\} + \\ &+ P\{\xi(1) > 0.3 | \text{стабільність}\} \cdot P\{\text{стабільність}\}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$P(A) = 0.1587 \cdot 0.3 + 0.000001 \cdot 0.3 + 0.00135 \cdot 0.4 = 0.048153$$

Тобто, ймовірність зростання ціни більше, ніж на 0.3 дорівнює 0.048153.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В результаті проведеного дослідження, побудовано ймовірнісний простір для випадкової еволюції з урахуванням впливу зовнішнього середовища. Розглянуто залежні та незалежні випадкові середовища.

В подальшому дослідженні виникає потреба в побудові ймовірнісних просторів з урахуванням гіпотез про розподіли або параметри розподілів, якими визначається випадковий процес. На основі цього, і вже проведеного аналізу, можна буде побудувати ймовірнісні простори та розглянути суміші розподілів для випадкових еволюцій.

Список використаної літератури

1. Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. Mixture of distributions based on the Markov Chain. *Cybernetics and System Analysis*. 2022. Vol. 58, No. 5. P. 754–757. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00508-4>
2. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів.: Навч. посібник. Львів: Либідь, 1990. 168 с. URL: https://probability.knu.ua/userfiles/myus/Skorohod_Lekcii_z_teorii_vypadkovykh_procesiv.pdf (дата звернення 25.11.2024).
3. Korolov L. B., Sinai Y. G. Theory of Probability and Random Processes. 2nd edition. Berlin : Springer-Verlag, 2007. 358 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-68829-7>
4. Єлейко Я. І., Базилевич І. Б. Лекції з теорії Випадкових процесів. Видавництво Львівського університету. 2016, 160 с.
5. Турчин В. М. Математична статистика в прикладах і задачах. Київ : НМК ВО, 1993. 164 с.

Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. Construction of a Probability Space for Random Evolution.

This article is devoted to the construction of probability spaces for random evolutions. A random process with the influence of the external environment are considered. The cases of dependent and independent spaces are studied. A probability space is constructed and an example of using a probability space for random evolution are considered.

Keywords: random process, random environment, probability space, random evolution, probability measure.

References

1. Yarova, O. A., & Yeleyko, Ya. I. (2022). Mixture of distributions based on the Markov Chain. *Cybernetics and System Analysis*. 58(5), 754–757. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00508-4>
2. Skorohod, A. V. (1990). *Lectures on the theory of random processes: Textbook*. Lviv: Lybid. Retrieved from https://probability.knu.ua/userfiles/myus/Skorohod_Lekcii_z_teorii_vypadkovykh_procesiv.pdf [in Ukrainian].
3. Korolov, L. B., & Sinai, Y. G. (2007). *Theory of Probability and Random Processes. 2nd edition*. Berlin: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-68829-7>
4. Yeleyko, Ya. I., & Bazilevych, I. B. (2016). *Lectures on the theory of random processes*. Lviv University Publishing House [in Ukrainian].
5. Turchyn, V. M. (1993). *Mathematical statistics in examples and problems*. Kyiv: NMK VO [in Ukrainian].

Одержано 31.01.2025