УДК 517.5
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).119-132

Р. В. Хаць[1], В. П. Ярмошик[2]

[1] Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри математики та економіки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
khats@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

[2] Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
аспірант кафедри математики та економіки
valentyn.yarmoshyk@dspu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7851-0863

ДВОЧЛЕННА АСИМПТОТИКА ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З ПОКРАЩЕНИМ РОЗПОДІЛОМ НУЛІВ НА ПРОМЕНІ

Досліджено двочленну асимптотику цілих функцій скінченного порядку за умови умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції їх нулів на промені. Зокрема, встановлено зв'язок між покращеним регулярним зростанням логарифма (логарифма модуля) цілої функції скінченного порядку та покращеним розподілом її нулів на промені в термінах двочленних асимптотик. Отримано нові двочленні асимптотичні рівності для лічильних функцій послідовностей нулів цілих функцій скінченного порядку.

Ключові слова: ціла функція скінченного порядку, лічильна функція нулів, двочленна асимптотика, покращене регулярне зростання, покращений розподіл нулів, виняткова множина.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність додатних чисел таких, що $0<\lambda_n\nearrow+\infty$, $n\to+\infty$, $n(t):=\sum\limits_{\lambda_n\le t}1$ і $N(r):=\int\limits_0^r t^{-1}n(t)dt$, $r>0$, — лічильна і усереднена лічильна функції ([1: 14], [2: 10]) послідовності $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, відповідно, та ([1: 24], [2: 26])

$$f(z)=e^{Q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{\lambda_n};p\right),\quad f(0)=1, \tag{1}$$

— ціла функція порядку $\rho\in(0;+\infty)$, де $Q(z)=\sum\limits_{k=1}^{\nu}Q_kz^k$ — поліном степеня $\nu\le\rho$, $p\le\rho$ — найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-p-1}<+\infty$ і $E(w;p)=(1-w)\exp\left(w+w^2/2+\cdots+w^p/p\right)$ — первинний множник Вейєрштраса роду p. Функцію $\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg f(z)$, $\log f(0)=0$, вважатимемо визначеною за формулою [10]

$$\log f(z)=\int\limits_0^z\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[\lambda_1;+\infty).$$

Однією з центральних задач теорії цілих функцій є вивчення зв'язку між регулярністю зростання функції та розподілом її нулів. Цей зв'язок для спеціальних класів цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1–3] та цілих функцій покращеного регулярного зростання [4–22], виражається в термінах одночленної асимптотики. Зокрема, [2: 81], якщо $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho), \quad t \to +\infty, \Delta \in [0;+\infty), \tag{2}$$

то для цілої функції (1) нецілого порядку ρ, $p = [\rho] < \rho < p+1$ (тут $[\rho]$ – ціла частина числа $\rho > 0$), асимптотичне співвідношення

$$\left|\log f(re^{i\varphi}) - \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}r^\rho\right|\sin\frac{\varphi}{2} = o(r^\rho), \quad r \to +\infty, \tag{3}$$

виконується рівномірно за $\varphi \in (0;2\pi)$. Крім цього, (див. [1: 64], [2: 91], [3: 69]), для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi-\delta]$ співвідношення

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to +\infty, \tag{4}$$

виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність (2). Якщо умова (2) виконується з натуральним ρ, то для цілої функції (1) порядку $\rho \in \mathbb{N}$ (див. [1: 66], [3: 78–82])

$$\log f(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + o(r^\rho), \quad r \to +\infty, \tag{5}$$

рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi-\delta]$, $\delta > 0$, де

$$\Lambda(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^\rho e^{i\rho\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\sum\limits_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho} + Q_\rho\right) - \Delta\left(\frac{1}{\rho} - i(\varphi-\pi)\right)e^{i\rho\varphi}r^\rho, \ p = \rho, \\ Q_\rho r^\rho\cos\rho\varphi, \ p = \rho - 1. \end{cases} \tag{6}$$

В багатьох працях (див., наприклад, [4–32]) вивчались точніші, ніж (2)–(5) асимптотики цілої функції (1) та лічильної функції $n(t)$ її нулів. Зокрема, якщо для деякого $\rho_5 \in (0;\rho)$ виконується умова

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_5}), \quad t \to +\infty, \quad \Delta \in [0;+\infty), \tag{7}$$

то [10] для цілої функції (1) порядку $\rho \in (0;+\infty)$ при $r \to +\infty$ виконуються співвідношення

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}r^\rho + \frac{o(r^{\rho_5})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}, \quad \rho_5 \in ([\rho];\rho), \tag{8}$$

$$\log f(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_5})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad \rho_5 \in (\rho-1;\rho), \tag{9}$$

рівномірно за $\varphi \in (0;2\pi)$, де функція $\Lambda(re^{i\varphi})$ визначена формулою (6). Крім того [5], для того щоб для цілої функції (1) нецілого порядку $\rho \in (0;+\infty)$ за деякого $\rho_6 \in (0;\rho)$ існувала послідовність (r_k) така, що $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_6})$, $k \to +\infty$, і рівномірно за $\varphi \in [0;2\pi]$ виконувалось

$$\log\left|f(r_k e^{i\varphi})\right| = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}r_k^\rho\cos\rho(\varphi-\pi) + o(r_k^{\rho_6}), \quad k \to +\infty, \tag{10}$$

необхідно й достатньо, щоб для деякого $\rho_5 \in (0;\rho)$ виконувалась умова (7).

У багатьох застосуваннях виникає потреба у дослідженні поведінки основних характеристик цілих функцій в термінах точніших багаточленних асимптотик [23–32]. Зокрема, в [23, 24] встановлено, що за умови

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t), \quad t \to +\infty,$$

де $\Delta \in [0;+\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$, $\rho_1 \in ([\rho];\rho)$ і

$$\int\limits_{T}^{2T} |\varphi(t)|^q \, dt = o\left(T^{\rho_1 q+1}\right), \quad T \to +\infty, \quad q \in [1;+\infty),$$

для цілої функції (1) порядку ρ правильна двочленна асимптотична формула

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\pi\rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} r^{\rho_1} + \psi(re^{i\varphi}), \tag{11}$$

причому $\psi(re^{i\varphi}) = o(r^{\rho_1})$, $r \to +\infty$, зовні деякої малої виняткової множини $E = E_f$, яка містить нулі f. Для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку аналогічні двочленні асимптотичні рівності отримано в [31, 32]. З огляду на сказане вище, актуальним є встановлення, подібних до (8)–(11), двочленних асимптотичних формул для цілих функцій покращеного регулярного зростання.

Метою статті є дослідження двочленної асимптотики цілих функцій скінченного порядку з покращеним розподілом нулів на промені (див. нижче умову (12)), що передбачає розв'язання таких задач: отримання нових рівномірних (та зовні деякої малої виняткової множини) асимптотичних оцінок логарифма цілої функції (1) в термінах двочленних співвідношень; встановлення нових двочленних асимптотичних рівностей для лічильних функцій послідовностей нулів; вивчення зв'язку між покращеним регулярним зростанням на деяких колах логарифма модуля цілої функції (1) нецілого порядку та покращеним розподілом її нулів на промені в термінах двочленних асимптотик.

2. Основні результати. Основними результатами даної статті є наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай $\Delta \in [0;+\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p+1$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову*

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

Тоді для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in (0;2\pi)$ виконується

$$\left|\log f(re^{i\varphi}) - \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^{\rho} - \frac{\pi\Delta_1}{\sin\pi\rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} r^{\rho_1}\right| \sin\frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2}), \quad r \to +\infty. \tag{13}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що у зображенні (1) $Q(z) \equiv 0$. Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $\varphi \in (0;2\pi)$. Оскільки (див. [1: 64], [2: 81], [3: 67], [5, 10])

$$\log f(re^{i\varphi}) = -z^{p+1} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t-z)} dt,$$

то

$$S := \log f(re^{i\varphi}) + r^{p+1}e^{i\varphi(p+1)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(t-re^{i\varphi})}dt = \\ = -\, z^{p+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(t-z)}dt. \tag{14}$$

Враховуючи (12), для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ і всіх $N > N(\varepsilon)$ отримуємо

$$|S| \le r^{p+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1}\,|t-re^{i\varphi}|}dt < r^{p+1} \int\limits_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1}\,|t-re^{i\varphi}|}dt + \\ + \varepsilon r^{p+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_2 - p-1}}{|t-re^{i\varphi}|}dt := J_1(r,\varphi) + J_2(r,\varphi). \tag{15}$$

Тоді [2: 82]

$$J_1(r,\varphi) = r^{p+1} \int\limits_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1}\,|t-re^{i\varphi}|}dt = O(r^p) = o(r^{\rho_2}), \quad r \to +\infty, \tag{16}$$

рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$. Нехай $t = ur$. Використовуючи нерівність [5, 10] $u^2 - - 2u\cos\varphi + 1 \ge (u^2+1)\min\{1-\cos\varphi; 1\}$, подібно як в [10], одержимо

$$J_2(r,\varphi) = \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{|u-e^{i\varphi}|}du = \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{\sqrt{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}}du \le$$

$$\le \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{\sqrt{(u^2+1)\min\{1-\cos\varphi; 1\}}}du < \varepsilon c(\rho_2)\frac{r^{\rho_2}}{\sin(\varphi/2)}, \tag{17}$$

де $c(\rho_2)$ — стала, яка залежить від ρ_2. Окрім того, за формулою (5.2_1) з [3: 69] (див. також [2: 82], [4, 5]), матимемо

$$r^{p+1}e^{i\varphi(p+1)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(t-re^{i\varphi})}dt = \Delta r^{\rho} e^{i\varphi(p+1)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{u-e^{i\varphi}}du + \\ + \Delta_1 r^{\rho_1} e^{i\varphi(p+1)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-p-1}}{u-e^{i\varphi}}du = -\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}r^{\rho} - \frac{\pi\Delta_1}{\sin\pi\rho_1}e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}r^{\rho_1}. \tag{18}$$

Отож, з (14)–(18) випливає (13). Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *За умов теореми 1, рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$ маємо*

$$\log\left|f(re^{i\varphi})\right| = \frac{\pi\Delta r^{\rho}}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\pi) + \frac{\pi\Delta_1 r^{\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}\cos\rho_1(\varphi-\pi) + \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty,$$

$$\arg f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin\pi\rho}\sin\rho(\varphi-\pi) + \frac{\pi\Delta_1 r^{\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}\sin\rho_1(\varphi-\pi) + \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r\to+\infty,$$

і для кожного $\gamma\in(0;\rho_1-\rho_2)$

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\varphi-\pi)}r^\rho + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\pi\rho_1}e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2+\gamma}),\ E_\gamma\not\ni z=re^{i\varphi}\to\infty,$$

де $E_\gamma=\{z=re^{i\varphi}:|\varphi|<r^{-\gamma}\}$ *і* $\varphi\in(0;2\pi)$.

Теорема 2. *Нехай* $\Delta\in[0;+\infty)$, $\Delta_1\in\mathbb{R}$, $\rho\in\mathbb{N}$, $\rho-1<\rho_2<\rho_1<\rho$ *і послідовність додатних чисел* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умову (12). Тоді для цілої функції* (1) *рівномірно за* $\varphi\in(0;2\pi)$ *виконується*

$$\left|\log f(re^{i\varphi})-\tilde\Lambda(re^{i\varphi})\right|\sin\frac{\varphi}{2}=o(r^{\rho_2}),\quad r\to+\infty, \tag{19}$$

де

$$\tilde\Lambda(re^{i\varphi})=\begin{cases} r^\rho e^{i\rho\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\sum\limits_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho}+Q_\rho\right)+\Delta\left(-\frac{1}{\rho}+i(\varphi-\pi)\right)r^\rho e^{i\rho\varphi}+\frac{\pi\Delta_1 r^{\rho_1}e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}}{\sin\pi\rho_1}+\\ +\frac{\Delta_1\rho_1 r^{\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}e^{i\rho\varphi},\ p=\rho,\\ Q_\rho r^\rho e^{i\rho\varphi}+\frac{\pi\Delta_1 r^{\rho_1}e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}}{\sin\pi\rho_1},\ p=\rho-1.\end{cases}$$

Доведення. Нехай $z=re^{i\varphi}$, $\varphi\in(0;2\pi)$ і $p=\rho$. Позаяк ([1: 67], [3: 79], [6, 10])

$$\log f(re^{i\varphi})=Q(z)+\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho}-z^\rho\int\limits_0^r\frac{n(t)dt}{t^\rho(t-z)}-\frac{z^\rho}{\rho r^\rho}n(r)-z^{\rho+1}\int\limits_r^{+\infty}\frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)},$$

то

$$\begin{aligned}\tilde S:=\log f(re^{i\varphi})-Q_\rho r^\rho e^{i\rho\varphi}-\frac{r^\rho e^{i\rho\varphi}}{\rho}\sum_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho}+\frac{e^{i\rho\varphi}}{\rho}(\Delta r^\rho+\Delta_1 r^{\rho_1})+\\ +r^\rho e^{i\rho\varphi}\int\limits_0^r\frac{\Delta t^\rho+\Delta_1 t^{\rho_1}}{t^\rho(t-re^{i\varphi})}dt+r^{\rho+1}e^{i(\rho+1)\varphi}\int\limits_r^{+\infty}\frac{\Delta t^\rho+\Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{\rho+1}(t-re^{i\varphi})}dt=\\ =\sum_{k=1}^{\rho-1}Q_k z^k-\frac{z^\rho}{\rho r^\rho}(n(r)-\Delta r^\rho-\Delta_1 r^{\rho_1})-\\ -z^\rho\int\limits_0^r\frac{n(t)-\Delta t^\rho-\Delta_1 t^{\rho_1}}{t^\rho(t-z)}dt-z^{\rho+1}\int\limits_r^{+\infty}\frac{n(t)-\Delta t^\rho-\Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{\rho+1}(t-z)}dt.\end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи (12), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\begin{aligned}\left|\tilde S\right|\le&\varepsilon r^{\rho_2}+\frac{1}{\rho}\left|n(r)-\Delta r^\rho-\Delta_1 r^{\rho_1}\right|+\\ &+r^\rho\int\limits_0^r\frac{|n(t)-\Delta t^\rho-\Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^\rho\,|t-re^{i\varphi}|}dt+r^{\rho+1}\int\limits_r^{+\infty}\frac{|n(t)-\Delta t^\rho-\Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{\rho+1}\,|t-re^{i\varphi}|}dt<\end{aligned}$$

$$< \varepsilon r^{\rho_2} + \frac{\varepsilon}{\rho} r^{\rho_2} + \varepsilon r^{\rho} \int\limits_0^r \frac{t^{\rho_2-\rho}}{|t-re^{i\varphi}|} dt + \varepsilon r^{\rho+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{t^{\rho_2-\rho-1}}{|t-re^{i\varphi}|} dt <$$

$$< o(r^{\rho_2}) + \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_0^1 u^{\rho_2-\rho} \frac{du}{\sqrt{u^2-2u\cos\varphi+1}} + \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_1^{+\infty} u^{\rho_2-\rho-1} \frac{du}{\sqrt{u^2-2u\cos\varphi+1}} <$$

$$< o(r^{\rho_2}) + \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_0^1 \frac{u^{\rho_2-\rho}}{\sqrt{(u^2+1)\min\{1-\cos\varphi; 1\}}} du +$$

$$+ \varepsilon r^{\rho_2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-\rho-1}}{\sqrt{(u^2+1)\min\{1-\cos\varphi; 1\}}} du \le \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}. \tag{21}$$

Окрім того, ([1: 67], [6, 10])

$$\Delta e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \int\limits_0^r \frac{dt}{t-re^{i\varphi}} + \Delta e^{i(\rho+1)\varphi} r^{\rho+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{dt}{t(t-re^{i\varphi})} = -\Delta i(\varphi-\pi) e^{i\rho\varphi} r^{\rho}, \tag{22}$$

і, згідно з [3: 69] (див. також [2: 82], [5, 6]), одержимо

$$\Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \int\limits_0^r \frac{t^{\rho_1-\rho}}{t-re^{i\varphi}} dt + \Delta_1 e^{i(\rho+1)\varphi} r^{\rho+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{t^{\rho_1-\rho-1}}{t-re^{i\varphi}} dt =$$

$$= \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \left(\int\limits_0^r \frac{t^{\rho_1-\rho}}{t-re^{i\varphi}} dt - \int\limits_r^{+\infty} t^{\rho_1-\rho} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-re^{i\varphi}} \right) dt \right) =$$

$$= \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1-\rho}}{t-re^{i\varphi}} dt - \int\limits_r^{+\infty} t^{\rho_1-\rho-1} dt \right) =$$

$$= \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-\rho}}{u-e^{i\varphi}} du + \frac{\Delta_1}{\rho_1-\rho} e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1} = \Delta_1 r^{\rho_1} \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\rho_1}} e^{i\varphi\rho_1} + \frac{\Delta_1}{\rho_1-\rho} e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1} =$$

$$= -\Delta_1 r^{\rho_1} \frac{\pi e^{-\pi i\rho_1}}{\sin\pi\rho_1} e^{i\varphi\rho_1} - \frac{\Delta_1}{\rho-\rho_1} e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1}. \tag{23}$$

Таким чином, з (20)–(23) отримуємо (19). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді ([1: 67], [3: 81], [6, 10])

$$\log f(re^{i\varphi}) = Q_\rho z^\rho - \frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} - z^\rho \int\limits_0^r \frac{n(t)dt}{t^\rho (t-z)} - \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) -$$

$$- z^{\rho+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)} + o(r^{\rho_2}), \quad r \to +\infty.$$

Оскільки в даному випадку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\rho} < +\infty$, то ([3: 80], [6, 10]) $n(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2})$, $t \to +\infty$. Тому

$$-\frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} = -\frac{z^\rho}{\rho} \int\limits_r^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^\rho} = -\frac{z^\rho}{\rho} \left(t^{-\rho} n(t) \Big|_r^{+\infty} + \rho \int\limits_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt \right) =$$

$$= z^\rho \frac{n(r)}{\rho r^\rho} - z^\rho \int\limits_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt = \frac{z^\rho}{\rho} (\Delta_1 r^{\rho_1 - \rho} + o(r^{\rho_2 - \rho})) -$$

$$-z^\rho \int\limits_r^{+\infty} (\Delta_1 t^{\rho_1 - \rho - 1} + o(t^{\rho_2 - \rho - 1})) dt = -\frac{\Delta_1 \rho_1}{\rho(\rho - \rho_1)} r^{\rho_1} e^{i\rho\varphi} + \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty.$$

Отож, як і вище виконується (19). Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. *Теореми 1–2 можна узагальнити на випадок цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів.*

Теорема 3. *Нехай* $\Delta \in [0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty) \backslash \mathbb{N}$, $\rho_1 \in (\rho/2; \rho)$ *і за деякого* $\rho_3 \in (0; 2\rho_1 - \rho)$ *для цілої функції* (1) *існує така послідовність* (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, *що*

$$r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_3}), \quad r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1} = o(r_k^{\rho_3}), \quad k \to +\infty, \tag{24}$$

і рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$\log \left| f(r_k e^{i\varphi}) \right| = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + \frac{\pi \Delta_1}{\sin \pi\rho_1} r_k^{\rho_1} \cos \rho_1(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_3}), \quad k \to +\infty.$$

Тоді для деякого $\rho_2 \in (0; \rho_1)$ *виконується (12).*

Доведення. Позаяк $f(0) = 1$, то за формулою Єнсена ([1: 14], [2: 10])

$$N(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi,$$

маємо

$$N(r_k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} r_k^{\rho_1} \cos \rho_1(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_3}) \right) d\varphi =$$

$$= \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_3}), \quad k \to +\infty.$$

Для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k \le r < r_{k+1}$. Оскільки $N(r)$ є неспадною функцією, то за умовою (24), отримуємо

$$N(r) \le N(r_{k+1}) = \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_3}) =$$

$$= \frac{\Delta}{\rho}\left(r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho}\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1}\left(r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1}\right) + \frac{\Delta}{\rho} r_k^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^{\rho_3} r_k^{\rho_3}\right) =$$

$$= \frac{\Delta}{\rho} r_k^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_3}) \le \frac{\Delta}{\rho} r^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_3}), \quad r \to +\infty.$$

З іншого боку, за умови (24), одержимо

$$N(r) \ge N(r_k) = \frac{\Delta}{\rho} r_k^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_3}) =$$

$$= \frac{\Delta}{\rho}\left(r_k^{\rho} - r_{k+1}^{\rho}\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1}\left(r_k^{\rho_1} - r_{k+1}^{\rho_1}\right) + \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_{k+1}^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_k}{r_{k+1}}\right)^{\rho_3} r_{k+1}^{\rho_3}\right) =$$

$$\ge \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_3}) \ge \frac{\Delta}{\rho} r^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_3}), \quad r \to +\infty.$$

З обох останніх нерівностей випливає співвідношення

$$N(r) = \frac{\Delta}{\rho} r^{\rho} + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_3}), \quad r \to +\infty.$$

Далі, оскільки [4, 5]

$$n(r)\log\frac{R}{r} \le N(R) - N(r) = \int_r^R \frac{n(t)}{t}dt \le n(R)\log\frac{R}{r}, \quad 0 < r < R < +\infty, \qquad (25)$$

то, взявши $R = re^{\frac{1}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}}}$, де $\rho-\rho_1 < \alpha < \rho_1-\rho_3$, $0 < \alpha_1 < \alpha$, $\max\{\rho-\alpha;\rho_3+\alpha\} < < \rho_2 < \rho_1$, у лівій нерівності (25), використовуючи формулу $e^x = 1 + x + O(x^2)$, $x \to 0$, отримуємо

$$n(r) \le \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^{\rho}\left(e^{\frac{\rho}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}}} - 1\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1}\left(e^{\frac{\rho_1}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}}} - 1\right) + o(r^{\rho_3})}{\frac{1}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}}} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^{\rho}\left(\frac{\rho}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(r^{\alpha}+r^{\alpha_1})^2}\right)\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(r^{\alpha}+r^{\alpha_1})^2}\right)\right) + o(r^{\rho_3})}{\frac{1}{r^{\alpha}+r^{\alpha_1}}} =$$

$$= \Delta r^{\rho} + \Delta_1 r^{\rho_1} + O\left(\frac{r^{\rho-\alpha}}{1 + r^{\alpha_1-\alpha}}\right) + O\left(\frac{r^{\rho_1-\alpha}}{1 + r^{\alpha_1-\alpha}}\right) + o\left(r^{\rho_3+\alpha}(1 + r^{\alpha_1-\alpha})\right) =$$

$$= \Delta r^{\rho} + \Delta_1 r^{\rho_1} + O\left(r^{\rho-\alpha}\left(1 - r^{\alpha_1-\alpha} + O\left(r^{2(\alpha_1-\alpha)}\right)\right)\right) +$$

$$+ O\left(r^{\rho_1-\alpha}\left(1 - r^{\alpha_1-\alpha} + O\left(r^{2(\alpha_1-\alpha)}\right)\right)\right) + o(r^{\rho_3+\alpha}) =$$

$$= \Delta r^{\rho} + \Delta_1 r^{\rho_1} + O(r^{\rho-\alpha}) + O(r^{\rho_1-\alpha}) + o(r^{\rho_3+\alpha}) = \Delta r^{\rho} + \Delta_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2}), \quad r \to +\infty.$$

З іншого боку, взявши $r = Re^{-\frac{1}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}}}$ у правій нерівності (25), аналогічно одержимо

$$n(R) \ge \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^{\rho}\left(1 - e^{\frac{-\rho}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}}}\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} R^{\rho_1}\left(1 - e^{\frac{-\rho_1}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}}}\right) + o(R^{\rho_3})}{\frac{1}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}}} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta}{\rho}R^{\rho}\left(\frac{\rho}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(R^{\alpha}+R^{\alpha_1})^2}\right)\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1}R^{\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(R^{\alpha}+R^{\alpha_1})^2}\right)\right) + o(R^{\rho_3})}{\frac{1}{R^{\alpha}+R^{\alpha_1}}} =$$

$$= \Delta R^{\rho} + \Delta_1 R^{\rho_1} + O\left(\frac{R^{\rho-\alpha}}{1+R^{\alpha_1-\alpha}}\right) + O\left(\frac{R^{\rho_1-\alpha}}{1+R^{\alpha_1-\alpha}}\right) + o\left(R^{\rho_3+\alpha}(1+R^{\alpha_1-\alpha})\right) =$$

$$= \Delta R^{\rho} + \Delta_1 R^{\rho_1} + O(R^{\rho-\alpha}) + O(R^{\rho_1-\alpha}) + o(R^{\rho_3+\alpha}) = \Delta R^{\rho} + \Delta_1 R^{\rho_1} + o(R^{\rho_2}), \quad R \to +\infty.$$

З обох останніх нерівностей, для деякого $\rho_2 \in (0;\rho_1)$ отримаємо (12). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $\Delta \in [0;+\infty)$, $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$, $\rho_4 \in (0;\rho)$ *і для цілої функції* (1) *існує послідовність* (r_k) *така, що* $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = o(r_k^{\rho_4})$, $k \to +\infty$, *і рівномірно за* $\varphi \in [0;2\pi]$

$$\log\left|f(r_k e^{i\varphi})\right| = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho} r_k^{\rho}\cos\rho(\varphi-\pi) + o(r_k^{\rho_4}), \quad k \to +\infty.$$

Тоді

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + O\left(t^{\frac{\rho+\rho_4}{2}}\right), \quad t \to +\infty. \tag{26}$$

Доведення. За умов теореми, аналогічно, як у доведенні теореми 3, отримуємо (див. також [5: 142, лема 2])

$$N(r) = \frac{\Delta}{\rho} r^{\rho} + o(r^{\rho_4}), r \to +\infty.$$

Взявши $R = r\left(1 + r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)$ у лівій нерівності (25), одержимо

$$n(r) \le \frac{\frac{\Delta}{\rho}r^{\rho}\left(\left(1+r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)^{\rho} - 1\right) + o(r^{\rho_4})}{\log\left(1+r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho}r^{\rho}\left(\left(1+r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)^{\rho} - 1\right) + o(r^{\rho_4})}{r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta}{\rho}r^{\rho}\left(\rho r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})\right) + o(r^{\rho_4})}{r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})} = \frac{\Delta r^{\frac{\rho+\rho_4}{2}} + O(r^{\rho_4}) + o(r^{\rho_4})}{r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})} =$$

$$= \frac{\Delta r^{\rho} + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right)}{1 + O\left(r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} = \left(\Delta r^{\rho} + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right)\right)\left(1 + O\left(r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)\right) =$$

$$= \Delta r^{\rho} + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right) + O(r^{\rho_4}) = \Delta r^{\rho} + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right), \quad r \to +\infty.$$

З іншого боку, взявши $r = R\left(1 - R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)$ у правій нерівності (25), маємо

$$n(R) \ge \frac{\frac{\Delta}{\rho}R^{\rho}\left(1 - \left(1 - R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)^{\rho}\right) + o(R^{\rho_4})}{-\log\left(1 - R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta}{\rho}R^{\rho}\left(\rho R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(R^{\rho_4-\rho})\right) + o(R^{\rho_4})}{R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(R^{\rho_4-\rho})} = \frac{\frac{\Delta}{\rho}R^{\rho}\left(\rho + O\left(R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)\right) + O\left(R^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right)}{1 + O\left(R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} =$$

$$= \left(\Delta R^{\rho} + O\left(R^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right)\right)\left(1 + O\left(R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)\right) = \Delta R^{\rho} + O\left(R^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right), \quad R \to +\infty.$$

З обох останніх нерівностей випливає (26). Теорему 4 доведено.

Зауваження 2. *Теорема 4 уточнює необхідність теореми 1 з [5: 141].*

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті досліджено двочленну асимптотику логарифмів цілих функцій скінченного порядку за умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції їх нулів на промені (див. теореми 1, 2 та наслідок 1). Встановлено зв'язок між покращеним регулярним зростанням на деяких колах логарифма модуля цілої функції нецілого порядку та покращеним розподілом її нулів на промені в термінах двочленних асимптотик (теорема 3). Уточнено такий взаємозв'язок у випадку одночленної асимптотики логарифма модуля цілої функції нецілого порядку (теорема 4). При цьому, отримано нові двочленні асимптотичні співвідношення для лічильних функцій послідовностей нулів цілих функцій нецілого порядку (теорема 3).

Отримані результати доповнюють результати робіт [4–32]. Вони можуть бути використані в теорії зростання цілих та субгармонійних функцій, при дослідженні базисів і розв'язуванні деяких інтерполяційних задач [1–3].

Список використаної літератури

1. Levin B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions. Transl. Math. Monogr. V. 5: Amer. Math. Soc., Providence : R.I., 1964. 523 p.
2. Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. Transl. Math. Monogr. V. 150: Amer. Math. Soc., Providence : R.I., 1996. 248 p. DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/150
3. Gol'dberg A. A., Ostrovskii I. V. Value Distributions of Meromorphic Functions. Transl. Math. Monogr. V. 236: Amer. Math. Soc., Providence : R.I., 2008. 485 p. DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/236
4. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one. *Мат. студ.* 2003. Т. 19, № 1. С. 97–105. URL: http://matstud.org.ua/texts/2003/19_1/97_105.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
5. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 21, № 2. С. 140–150. URL: http://matstud.org.ua/texts/2004/21_2/21_2_140_150.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
6. Хаць Р. В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 22, № 1. С. 105–110. URL: http://matstud.org.ua/texts/2004/22_1/22_1_105_110.pdf (дата звернення: 12.01.2025).
7. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів. *Мат. студ.* 2005. Т. 24, № 1. С. 31–38. URL: http://matstud.org.ua/texts/2005/24_1/24_1_031_038.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
8. Khabibullin B. N. Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions. *Мат. студ.* 2004. Т. 21, № 1. С. 47–63. URL: http://matstud.org.ua/texts/2004/21_1/21_1_047_063.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
9. Khats' R. V. On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Мат. студ.* 2006. Т. 26, № 1. С. 17–24. URL: http://matstud.org.ua/texts/2006/26_1/26_1_017_024.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
10. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені. *Мат. студії.* 2010. Т. 33, № 2. С. 215—219. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/215-219.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
11. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic properties of entire functions, similar to the

entire functions of completely regular growth. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки».* 2011. Вип. 718, № 718. С. 5–9. URL: `https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12811` (дата звернення: 11.01.2025).

12. Khats' R. V. Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки».* 2011. Вип. 718, № 718. С. 10–14. URL: `https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12813` (дата звернення: 11.01.2025).
13. Хаць Р. В. Регулярність зростання коефіцієнтів Фур'є цілих функцій покращеного регулярного зростання. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, № 12. С. 1717–1723. URL: `http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/2837` (дата звернення: 11.01.2025).
14. Khats' R. V. Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Карпатські матем. публ.* 2013. Т. 5, № 1. С. 129–133. DOI: `https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133`
15. Khats' R. V. Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Карпатські матем. публ.* 2013. Т. 5, № 2. С. 341–344. DOI: `https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344`
16. Khats' R. V. Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Буковин. матем. журн.* 2019. Т. 7, № 1. С. 114—120. DOI: `https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114`
17. Khats' R. V. Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Карпатські матем. публ.* 2020. Т. 12, № 1. С. 46—54. DOI: `https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54`
18. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання в $L^q[0; 2\pi]$-метриці. *Укр. мат. журн.* 2020. Т. 72, № 4. С. 557—564. DOI: `https://doi.org/10.37863/umzh.v72i4.500`
19. Khats' R. V. Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Буковин. матем. журн.* 2021. Т. 9, № 1. С. 49–55. DOI: `https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04`
20. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка спеціального канонічного добутку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика».* 2022. Т. 40, № 1. С. 82–93. DOI: `https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93`
21. Гірник М. О. Субгармонічні функції покращеного регулярного зростання. *Доп. НАН України.* 2009, № 4. С. 13–18. URL: `http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/8444` (дата звернення: 12.01.2025).
22. Chyzhykov I. E. Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth. *Мат. студії.* 2017. Т. 47, № 2. С. 169–178. DOI: `https://doi.org/10.15330/ms.47.2.169-178`
23. Логвиненко В. Н. О целых функциях с нулями на полупрямой. I. *Теория функций, функц. анализ и их прилож.* Харьков. 1972. Вып. 16. С. 154–158. URL: `https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2155` (дата звернення: 13.01.2025).
24. Логвиненко В. Н. О целых функциях с нулями на полупрямой. II. *Теория функций, функц. анализ и их прилож.* Харьков. 1973. Вып. 17. С. 84–99. URL: `https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2179` (дата звернення: 13.01.2025).
25. Agranovich P. Z., Logvinenko V. N. Analog of the Valiron-Titchmarsh theorem for two-term asymptotics of subharmonic functions with masses on a finite system of rays. *Sib. Math. J.* 1985. Vol. 26, № 5. P. 629–642. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF00969021`
26. Agranovich P. Z., Logvinenko V. N. Polynomial asymptotic representation of subharmonic functions in the plane. *Sib. Math. J.* 1991. Vol. 32, № 1. P. 1–16. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF00970153`
27. Agranovich P. Z., Logvinenko V. N. Exceptional sets for entire functions. *Мат. студ.* 2000. Т. 13, № 2. С. 149–156. URL: `http://matstud.org.ua/texts/2000/13_2/13_2_149-156.pdf` (date of access: 11.01.2025).
28. Agranovich P. Z. Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with masses on one ray in the space. *Мат. студ.* 2005. Т. 23, № 2. С. 169–178. URL: `http://matstud.org.ua/texts/2005/23_2/23_2_169_178.pdf` (date of access: 11.01.2025).
29. Azarin V. S. On the polynomial asymptotics of subharmonic functions of finite order and

their mass distributions. *J. Math. Phys. Anal., Geom.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 5–12. URL: https://jmag.ilt.kharkiv.ua/index.php/jmag/article/view/jm03-0005e/506 (date of access: 13.01.2025).

30. Borova O. I., Zabolots'kyi M. V. Polynomial asymptotics of entire functions of finite order. *Ukr. Math. J.* 2003. Vol. 55, № 6. P. 873–884. DOI: https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010590.47798.4f
31. Sheremeta M. M., Tarasyuk R. I., Zabolotskii M. V. On asymptotics of entire functions of finite logarithmic order. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* 1996. Vol. 3, № 1/2. P. 146–163. URL: http://mag.ilt.kharkiv.ua/index.php/mag/article/view/m03-0146e/146 (date of access: 12.01.2025).
32. Тарасюк Р. І. Теорема типу Валірона-Тітчмарша для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку. *Мат. студ.* 1995. Т. 5. С. 31–38. http://matstud.org.ua/texts/1995/5/5_031-038.pdfs (дата звернення: 12.01.2025).

Khats' R. V., Yarmoshyk V. P. A two-term asymptotics of entire functions with improved distribution of zeros on a ray.

The two-term asymptotics of entire functions of finite order under the condition of improved two-term asymptotics of the counting function of their zeros on a ray is studied. In particular, the connection between the improved regular growth of the logarithm (logarithm of the modulus) of entire function of finite order and the improved distribution of its zeros on a ray in terms of a two-term asymptotics is established. New two-term asymptotic equalities for the counting functions of the sequences of zeros of entire functions of finite order are obtained.

Keywords: entire function of finite order, counting function of zeros, two-term asymptotics, improved regular growth, improved distribution of zeros, exceptional set.

References

1. Levin, B. Ja. (1964). *Distribution of Zeros of Entire Functions. Transl. Math. Monogr. V. 5*: Amer. Math. Soc., Providence: R.I.
2. Levin, B. Ya. (1996). *Lectures on Entire Functions. Transl. Math. Monogr. V. 150*: Amer. Math. Soc., Providence: R.I. https://doi.org/10.1090/mmono/150
3. Gol'dberg, A. A., & Ostrovskii, I. V. (2008). *Value Distributions of Meromorphic Functions. Transl. Math. Monogr. V. 236*: Amer. Math. Soc., Providence: R.I. https://doi.org/10.1090/mmono/236
4. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2003). On the asymptotic behavior of entire functions of order less than one. *Mat. Stud.,* 19(1), 97–105. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2003/19_1/97_105.pdf
5. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of entire functions of noninteger order. *Mat. Stud.,* 21(2), 140–150. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2004/21_2/21_2_140_150.pdf [in Ukrainian].
6. Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of canonical product of integer order. *Mat. Stud.,* 22(1), 105–110. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2004/22_1/22_1_105_110.pdf [in Ukrainian].
7. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2005). On the regularity of growth of an entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.,* 24(1), 31–38. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2005/24_1/24_1_031_038.pdf [in Ukrainian].
8. Khabibullin, B. N. (2004). Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions. *Mat. Stud.,* 21(1), 47–63. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2004/21_1/21_1_047_063.pdf
9. Khats', R. V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.,* 26(1), 17–24. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2006/26_1/26_1_017_024.pdf
10. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray. *Mat. Stud.,* 33(2), 215–219. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/215-219.pdf [in Ukrainian].

11. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2011). On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky,* 718(718), 5–9. Retrieved from https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12811
12. Khats', R. V. (2011). Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky,* 718(718), 10–14. Retrieved from https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12813
13. Khats', R. V. (2012). Regularity of growth of Fourier coefficients of entire functions of improved regular growth. *Ukr. Math. J.,* 63(12), 1953–1960. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0624-2
14. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ.,* 5(1), 129–133. https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133
15. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Carpathian Math. Publ.,* 5(1), 341–344. https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344
16. Khats', R. V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J.,* 7(1), 114–120. https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114
17. Khats', R. V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ.,* 12(1), 46–54. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54
18. Khats', R. V. (2020). Asymptotic behavior of the logarithms of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Ukr. Math. J.,* 72(4), 642–650. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01805-x
19. Khats', R. V. (2021). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Bukovinian Math. J.,* 9(1), 49–55. https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04
20. Khats', R. V. (2022). Asymptotic behavior of a special canonical product. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 40(1), 82–93. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93 [in Ukrainian].
21. Hirnyk, M. O. (2009). Subharmonic functions of improved regular growth. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine,* (4), 13–18. Retrieved from http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/8444 [in Ukrainian].
22. Chyzhykov, I. E. (2017). Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth. *Mat. Stud.,* 47(2), 169–178. https://doi.org/10.15330/ms.47.2.169-178
23. Logvinenko, V. N. (1972). On entire functions with zeros on the half-line. I. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 16, 154–158. Retrieved from https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2155 [in Russian].
24. Logvinenko, V. N. (1973). On entire functions with zeros on the half-line. II. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 17, 84–99. Retrieved from https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2179 [in Russian].
25. Agranovich, P. Z., & Logvinenko, V. N. (1985). Analog of the Valiron-Titchmarsh theorem for two-term asymptotics of subharmonic functions with masses on a finite system of rays. *Sib. Math. J.,* 26(5), 629–642. https://doi.org/10.1007/BF00969021
26. Agranovich, P. Z., & Logvinenko, V. N. (1991). Polynomial asymptotic representation of subharmonic functions in the plane. *Sib. Math. J.,* 32(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/BF00970153
27. Agranovich, P. Z., & Logvinenko V. N. (2000). Exceptional sets for entire functions. *Mat. Stud.,* 13(2), 149–156. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2000/13_2/13_2_149-156.pdf
28. Agranovich, P. Z. (2005). Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with masses on one ray in the space. *Mat. Stud.,* 23(2), 169–178. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2005/23_2/23_2_169_178.pdf
29. Azarin, V. S. (2007). On the polynomial asymptotics of subharmonic functions of finite order and their mass distributions. *J. Math. Phys. Anal., Geom.,* 3(1), 5–12. Retrieved from https://jmag.ilt.kharkiv.ua/index.php/jmag/article/view/jm03-0005e/506

30. Borova, O. I., & Zabolots'kyi, M. V. (2003). Polynomial asymptotics of entire functions of finite order. *Ukr. Math. J.,* 55(6), 873–884. https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010590.47798.4f
31. Sheremeta, M. M., Tarasyuk, R. I., & Zabolotskii, M. V. (1996). On asymptotics of entire functions of finite logarithmic order. *Mat. Fiz. Anal. Geom.,* 3(1/2), 146–163. Retrieved from http://mag.ilt.kharkiv.ua/index.php/mag/article/view/m03-0146e/146
32. Tarasyuk, R. I. (1995). Valiron-Titchmarsh type theorem for entire functions of finite logarithmic order. *Mat. Stud.,* 5, 31–38. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/1995/5/5_031-038.pdf [in Ukrainian].

Одержано 04.03.2025