

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).35-43](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).35-43)О. О. Курченко¹, О. О. Синявська², І. В. Шестаковська³

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри математики, доктор фізико-математичних наук, доцент
olkurchenko@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

³ Приватний загальноосвітній навчальний заклад «МІДГАРД»,
вчитель математики
i.v.shestakovskaya@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5654-3653>

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕРІВНОСТІ ФЕЙЄРА ДЛЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

У статті узагальнено нерівність Фейєра для покоординатно опуклих функцій двох змінних. За допомогою нерівності Ерміта–Адамара для покоординатно опуклих функцій двох змінних отримані інтервальні оцінки подвійних інтегралів по прямокутнику.

Ключові слова: нерівність Фейєра, нерівність Ерміта–Адамара, опукла функція, неперервна функція, інтегровна за Ріманом функція.

1. Вступ. У 1906 р. угорський математик Л. Фейєр [1], відомий своїми дослідженнями у теорії рядів Фур'є, отримав оцінку інтеграла від деякої опуклої функції. Цю нерівність пізніше було названо на його честь.

Наведемо нерівність Фейєра у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. [1] *Нехай функції $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють наступні умови:*

- 1) *функція f опукла вниз на відрізку $[a, b]$;*
- 2) *функція g неперервна і невід'ємна на відрізку $[a, b]$;*
- 3) *$\forall t \in [0, \frac{b-a}{2}] : g(a+t) = g(b-t)$.*

Тоді

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

Подвійна нерівність (1) називається нерівністю Фейєра. У випадку $g(x) = 1$ ця нерівність переходить у відому нерівність Ерміта–Адамара оцінки середнього значення на відрізку опуклої функції. Так для опуклої вниз на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$, $x \in [a, b]$ виконується нерівність Ерміта–Адамара [6]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Така нерівність є першим фундаментальним результатом для опуклих функцій, визначених на інтервалі дійсних чисел із природною геометричною інтерпретацією та значною кількістю застосувань для окремих нерівностей [2].

Узагальнення та застосування нерівності Фейєра, а також нерівності Ерміта–Адамара для побудови різних оцінок для інтегралів від опуклих функцій досліджувались багатьма авторами. Так, у монографії [2] подано основні факти, пов’язані з нерівностями Ерміта–Адамара для опуклих функцій, велику кількість результатів для спеціальних середніх, а також нерівності для інших понять опуклостей. У статті [3] автори встановили деякі нові нерівності типу Фейєра для опуклих функцій. Нерівності Ерміта–Адамара, Фейєра та подібні нерівності для s -опуклих функцій у другому сенсі було отримано у статтях [4], [5]. У 2022 році в роботі З. Екен [6] отримано нерівність Фейєра для s -опуклих функцій у четвертому значенні, а також приклади застосування цих нерівностей для оцінки функції похибки Гаусса, різниці між двома неповними гамма-функціями та інтеграла Френеля. У статті Р. Делавар [7] були також одержані узагальнення та уточнення нерівності Фейєра з деякими новими застосуваннями, зокрема пов’язані з функціями Ейлера.

Зауважимо, що якщо функція f опукла вгору на відрізку $[a, b]$, то знак нерівності в (1) змінюється на протилежний. Опукла вниз на відрізку $[a, b]$ функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на інтервалі (a, b) [8]. На кінцях відрізка ця функція має скінченні границі, причому границя справа у точці $a : f(a+0) \leq f(a)$, границя зліва у точці $b : f(b-0) \leq f(b)$ [8]. Тому підінтегральні функції у нерівності (1) інтегровні за Ріманом.

2. Нерівність Фейєра для функцій двох змінних. Нехай $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямокутник у $\mathbb{R}^2$, $h = h(x, y), (x, y) \in \Delta$ — дійсна функція двох змінних.

Означення 1. Функція $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ називається *покоординатно опуклою вниз* на прямокутнику $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, якщо:

- 1) $\forall x \in [a_1, b_1]$ функція $h(x, \cdot) : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ опукла вниз на відрізку $[a_2, b_2]$;
- 2) $\forall y \in [a_2, b_2]$ функція $h(\cdot, y) : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ опукла вниз на відрізку $[a_1, b_1]$.

Аналогічно визначають *покоординатно опуклість вгору* функції на прямокутнику.

Опукла на прямокутнику функція є *покоординатно опуклою*, але не навпаки. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 1. Функція $h(x, y) = -x \cdot y, x, y \in \Delta = [-1, 1]^2$ є *покоординатно опуклою вниз*. Дійсно, для довільного фіксованого $x \in [-1, 1]$ функція $h = -x \cdot y, y \in \Delta = [-1, 1]$ опукла вниз на відрізку $[-1, 1]$. Аналогічно, для довільного фіксованого $y \in [-1, 1]$ функція $h = -x \cdot y, x \in \Delta = [-1, 1]$ опукла вниз на відрізку $[-1, 1]$.

Але ця функція не є *опуклою вниз* на квадраті Δ як функція двох змінних. Дійсно, для точок $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ маємо: $(0, 0) = \frac{(1, 1) + (-1, -1)}{2}$, але

$$h(0, 0) = 0 > \frac{1}{2} (h(1, 1) + h(-1, -1)) = -1.$$

Теорема 2. Нехай функції $h, g : \Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють умови:

- 1) функція h опукла вниз на прямокутнику Δ ;
- 2) функція g неперервна і невід'ємна на прямокутнику Δ ;
- 3) $\forall y \in [a_2, b_2] : g(a_1 + t, y) = g(b_1 - t, y), t \in [0, \frac{b_1 - a_1}{2}]$;
 $\forall x \in [a_1, b_1] : g(x, a_2 + s) = g(x, b_2 - s), s \in [0, \frac{b_2 - a_2}{2}]$.

Тоді

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy \leq \\ & \leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Зауваження 1. Геометрична інтерпретація умови 3) теореми (2) полягає у тому, що поверхня $z = g(x, y), (x, y) \in \Delta$ симетрична відносно кожної з площин $x = \frac{a_1 + b_1}{2}, y = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Доведення. Доведемо теорему (2). Зафіксуємо $x \in [a_1, b_1]$ і покладемо

$$h_1(y) = h(x, y), y \in [a_2, b_2],$$

$$g_1(y) = g(x, y), y \in [a_2, b_2].$$

Функція h_1 опукла вниз на відрізку $[a_2, b_2]$. Функція $g_1 \in C([a_2, b_2])$ і невід'ємна на відрізку $[a_2, b_2]$. Крім того,

$$g_1(a_2 + s) = g(x, a_2 + s) = g(x, b_2 - s) = g_1(b_2 - s), s \in \left[0, \frac{b_2 - a_2}{2}\right].$$

Внаслідок нерівності Фейєра для функцій h_1, g_1 на відрізку $[a_2, b_2]$,

$$\begin{aligned} & h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy \leq \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy \leq \\ & \leq \frac{h(x, a_2) + h(x, b_2)}{2} \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Далі, функції $h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right), h(x, a_2), h(x, b_2), x \in [a_1, b_1]$ опуклі вниз на відрізку $[a_1, b_1]$. Функція $\bar{g}(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy, x \in [a_1, b_1]$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a_1, b_1]$. Внаслідок умови 3),

$$\bar{g}(a_1 + t) = \int_{a_2}^{b_2} g(a_1 + t, y) dy = \int_{a_2}^{b_2} g(b_1 - t, y) dy = \bar{g}(b_1 - t), t \in \left[0, \frac{b_1 - a_1}{2}\right].$$

Внаслідок нерівності Фейєра для функцій $h(\cdot, \frac{a_2 + b_2}{2}), \bar{g}(\cdot)$ на відрізку $[a_1, b_1]$ маємо:

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy = \\ & = h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} \bar{g}(x) dx \leq \end{aligned} \quad (4)$$

$$\leq \int_{a_1}^{b_1} h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \bar{g}(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) g(x, y) dy.$$

Подвійну нерівність (3) почленно проінтегруємо на відрізку $[a_1, b_1]$ за змінною x і отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) g(x, y) dy &\leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy \leq \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} \frac{h(x, a_2) + h(x, b_2)}{2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Із нерівностей (4) та (5) слідує

$$h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy \leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy. \quad (6)$$

Тепер застосуємо нерівність Фейєра для функцій $\frac{h(\cdot, a_2) + h(\cdot, b_2)}{2}$, $\bar{g}(\cdot)$ на відрізку $[a_1, b_1]$:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \frac{h(x, a_2) + h(x, b_2)}{2} \bar{g}(x) dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right) \int_{a_1}^{b_1} \bar{g}(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Із нерівностей (5) та (7) слідує нерівність:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Нерівність (2) еквівалентна нерівностям (6) і (8). Теорема доведена.

Нерівність (2) будемо називати нерівністю Фейєра для функцій двох змінних. Якщо функція $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ покоординатно опукла вгору на прямокутнику Δ , то знаки нерівності у подвійній нерівності (2) потрібно замінити на протилежні.

Приклад 2. За допомогою нерівності Фейєра оцінимо інтеграл

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy.$$

Позначимо:

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}}, (x, y) \in [-1, 1]^2;$$

$$g(x, y) = x^2 y^4, (x, y) \in [-1, 1]^2.$$

Функція g задовольняє умови 2)-3) теореми (2). Доведемо, що функція $h(x, y)$ покоординатно опукла вгору на квадраті $[-1, 1]^2$. Функція h симетрична відносно змінних x, y . Тому достатньо довести, що $\forall y \in [-1, 1]$ функція $h(x, y)$, $x \in [-1, 1]$ опукла як функція змінної x . Маємо:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{2} (9 + x^4 + y^4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x^3 = -2x^3 (9 + x^4 + y^4)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -6x^2(9 + x^4 + y^4)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(9 + x^4 + y^4)^{-\frac{5}{2}} \cdot 4x^3 = \\
&= (9 + x^4 + y^4)^{-\frac{5}{2}} \left(12x^6 - 6x^2(9 + x^4 + y^4) \right) = \\
&= 6x^2(9 + x^4 + y^4)^{-\frac{5}{2}} (2x^4 - 9 - x^4 - y^4) = \\
&= -6x^2 \frac{9 - x^4 + y^4}{(9 + x^4 + y^4)^{\frac{5}{2}}} < 0, x \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Тому $\forall y \in [-1, 1]$ функція $h(x, y)$, $x \in [-1, 1]$ опукла вгору. Внаслідок нерівності Фейєра

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 x^2 y^4 dy &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq \\
&\geq \frac{1}{4} \frac{4}{\sqrt{11}} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 x^2 y^4 dy,
\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq \frac{4}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}, \\
\frac{4}{45} &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq \frac{4}{20\sqrt{11}}, \\
0,0(8) &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq 0,0603.
\end{aligned}$$

У випадку $g(x, y) = 1$, $(x, y) \in \Delta$ нерівність Фейєра (2) для функцій двох змінних переходить у нерівність Ерміта–Адамара [8] для функцій двох змінних. Сформулюємо відповідну теорему.

Теорема 3. Нехай $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, функція $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ покоординатно опукла вниз на прямокутнику Δ . Тоді

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) dy \leq \\
&\leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right). \tag{9}
\end{aligned}$$

Зазначимо, що таке узагальнення міститься у монографії [2, с. 316].

3. Інтервальні оцінки подвійних інтегралів покоординатно опуклих функцій. Наведені у цьому підрозділі результати отримані у третьому розділі магістерської роботи [9].

Нехай $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна і покоординатно опукла на прямокутнику $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ функція.

Для натурального числа n розглянемо розбиття прямокутника Δ на n^2 прямокутників Q_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$:

$$\lambda_n = \{Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \mid i, j = 1, \dots, n\},$$

де

$$x_k = a_1 + kh_{1n}, h_{1n} = \frac{b_1 - a_1}{n}, 0 \leq k \leq n;$$

$$y_k = a_2 + kh_{2n}, h_{2n} = \frac{b_2 - a_2}{n}, 0 \leq k \leq n.$$

Застосуємо нерівність Ерміта–Адамара на кожному прямокутнику Q_{ij} :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) &\leq \frac{1}{h_{1n}h_{2n}} \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right). \end{aligned}$$

Помножимо цю подвійну нерівність на $h_{1n}h_{2n}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n}h_{2n} &\leq \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n}h_{2n}. \end{aligned}$$

Підсумуємо ці нерівності по $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n}h_{2n} &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy \leq \tag{10} \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n}h_{2n}. \end{aligned}$$

Внаслідок адитивності подвійного інтеграла Рімана,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy = \int_{\Delta} f(x, y) dx dy. \tag{11}$$

Покладемо

$$A_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n}h_{2n}, \tag{12}$$

$$B_n = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n}h_{2n}. \tag{13}$$

Теорема 4. Нехай функція $f : \Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови:

- 1) $f \in C([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$;
- 2) функція f по координатно опукла вниз на прямокутнику Δ .

Тоді

$$1) \quad \forall n \geq 1 : A_n \leq \int_{\Delta} f(x, y) dx dy \leq B_n; \tag{14}$$

2) $B_n - A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, де A_n, B_n визначені рівностями (12), (13).

Доведення. Зауважимо, що дрібність розбиття $d(\lambda_n) = \sqrt{h_{1n}^2 + h_{2n}^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Суми

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n} h_{2n}, \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{i-1}, y_{j-1}) h_{1n} h_{2n}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{i-1}, y_j) h_{1n} h_{2n}, \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_{j-1}) h_{1n} h_{2n}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) h_{1n} h_{2n} \end{aligned}$$

містяться у подвійній нерівності (10) і є інтегральними сумами для функції f , розбиття λ_n і відповідних наборів проміжних точок. Отже, кожна з цих сум прямує до $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ при $n \rightarrow \infty$. Із рівностей (11), (12) слідує, що $A_n \rightarrow \int_{\Delta} f(x, y) dx dy, n \rightarrow \infty$ і $B_n \rightarrow \int_{\Delta} f(x, y) dx dy, n \rightarrow \infty$. Тому $B_n - A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Нерівність (14) з урахуванням позначень (13), (12) та рівності (11) безпосередньо слідує з нерівності (10). Теорема доведена.

Зауваження 2. Якщо умову покоординатної опуклості вниз замінити на умову покоординатної опуклості вгору, то нерівність (14) запишеться у вигляді:

$$\forall n \geq 1 : A_n \geq \int_{\Delta} f(x, y) dx dy \geq B_n; \quad (15)$$

Алгоритм обчислення подвійного інтеграла опуклої функції із заданою точністю $\varepsilon > 0$. Нехай функція $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна і покоординатно опукла вниз на прямокутнику $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Нехай, далі $\lambda_n^{(1)} = \{a_1 = x_0, x_1, \dots, x_n = b_1\}$ — рівномірне розбиття відрізка $[a_1, b_1]$ з кроком $h_{1n} = \frac{b_1 - a_1}{n}$ і $\lambda_n^{(2)} = \{a_2 = y_0, y_1, \dots, y_n = b_2\}$ — рівномірне розбиття $[a_2, b_2]$ з кроком $h_{2n} = \frac{b_2 - a_2}{n}$. Зауважимо, що

$$x_k = a_1 + k h_{1n}, 0 \leq k \leq n, \quad y_k = a_2 + k h_{2n}, 0 \leq k \leq n.$$

Послідовно обчислюємо

$$A_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n} h_{2n}, n \geq 1,$$

$$B_n = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n} h_{2n}, n \geq 1.$$

Нехай m — натуральне число, при якому $B_m - A_m < 2\varepsilon$. Тоді $\frac{A_m + B_m}{2}$ наближене значення подвійного інтеграла $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ з точністю до ε .

Якщо на n -тому кроці $B_n - A_n > 2\varepsilon$, то продовжуємо обчислення. Якщо $B_n - A_n \leq 2\varepsilon$, то $\frac{A_n + B_n}{2}$ — наближене значення подвійного інтеграла $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ з точністю до $\varepsilon > 0$.

Приклад 3. Обчислимо з точністю до однієї тисячної інтеграл

$$\int_{[0,1]^2} e^{xy} \cdot xy dx dy.$$

Функція $f(x, y) = e^{xy} \cdot xy$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ неперервна на $[0, 1]^2$. Ця функція симетрична відносно змінних x, y . Тому для доведення покоординатної опуклості вниз достатньо $\forall y \in [0, 1]$ дослідити опуклість функції $f(x, y) = e^{xy} \cdot xy$ відносно змінної x на відрізку $[0, 1]$.

Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x e^{xy} + y e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^3 x e^{xy} + y^2 e^{xy} + y^2 e^{xy} \geq 0, x \in [0, 1].$$

Отже, функція f опукла вниз відносно змінної x на відрізку $[0, 1]$. У нашому випадку

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \exp \left(\frac{(i - \frac{1}{2})(j - \frac{1}{2})}{n^2} \right) \cdot \frac{(i - \frac{1}{2})(j - \frac{1}{2})}{n^2}, n \geq 1, \\ B_n &= \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{i,j=1}^n \exp \left(\frac{(i-1)(j-1)}{n^2} \right) \cdot \frac{(i-1)(j-1)}{n^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \exp \left(\frac{(i-1)j}{n^2} \right) \cdot \frac{(i-1)j}{n^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \left(\exp \left(\frac{i(j-1)}{n^2} \right) \cdot \frac{i(j-1)}{n^2} + \exp \left(\frac{i \cdot j}{n^2} \right) \cdot \frac{i \cdot j}{n^2} \right) \right), n \geq 1. \end{aligned}$$

Наведемо результати обчислень:

n	A_n	B_n
10	0,399366	0,402418
15	0,399928	0,401283

$B_{15} - A_{15} < 0,002$, $\frac{A_{15}+B_{15}}{2} = 0,400$ — наближене значення інтеграла $\int_{[0,1]^2} e^{xy} \cdot xy dx dy$ з точністю до однієї тисячної.

4. Висновки. У цій статті нерівність Фейєра узагальнена для функцій двох змінних на прямокутнику. Нерівність Ерміта–Адамара для функцій двох змінних застосовано для побудови інтервальних оцінок подвійних інтегралів по прямокутнику.

Список використаної літератури

1. Fejer L. Über die Fourierreihen, II, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* 1906. No. 24 pp. 369–390.
2. Dragomir S., Pearce C. Selected Topics on Hermite–Hadamard Inequalities and Applications. Science Direct Working Paper No S1574-0358(04)70845-X, 2003. 355 p. URL: <https://ssrn.com/abstract=3158351> (дата звернення: 18.03.2025).
3. Tseng KL., Hwang SR., Dragomir S. Fejér–Type Inequalities (I). *J Inequal Appl.* Vol. 2010, No. 531976 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1155/2010/531976>

4. Yildiz C. Some new inequalities of Hermite–Hadamard–Fejer type for s -convex functions, *Konuralp Journal of Mathematics*. 2016. Vol. 4, No. 2. pp. 70–78.
5. Sarıkaya M. Z., Ertuğral F., Yildırım F. On the Hermite–Hadamard–Fejér type integral inequality for s -convex function. *Konuralp Journal of Mathematics*. 2018. Vol. 6, No. 1. pp. 35–41.
6. Eken Z. Fejer inequality for s -convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*. 2022. Vol. 40, No. 1. pp. 19–34. DOI: <https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-02>
7. Delavar R. M. On Fejér's inequality: generalizations and applications. *J Inequal Appl*. 2023, No. 42. pp. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13660-023-02949-7>
8. Бридун А. М., Бродяк О. Я., Васильків Я. В. Опуклі, гармонійні та субгармонійні функції. Задачі і теореми: навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівського університету ім. І. Франка, 2011. 107 с.
9. Шестаковська І. В. Узагальнення нерівності Ерміта-Адамара: Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра математики / КНУ ім. Т. Шевченка. Київ, 2024. 40 с.

Kurchenko O. O., Syniavska O. O., Shestakovska I. V. Generalization of Fejer's inequality for functions of two variables.

The article generalizes Feuer's inequality for coordinate convex functions of two variables. Using the Hermite-Hadamard inequality for coordinate convex functions of two variables, interval estimates of double integrals over a rectangle are obtained.

Keywords: Feuer's inequality, Hermite-Hadamard inequality, convex function, continuous function, Riemann integrable function.

References

1. Fejer, L. (1906). Über die Fourierreihen. *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.*, (24), 369–390 [in Hungarian].
2. Dragomir, S., & Pearce, C. (2003). Selected topics on Hermite–Hadamard Inequalities and applications. *Science Direct Working Paper No S1574-0358(04)70845-X*. Retrieved from https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3158351
3. Tseng, K.L., Hwang, S.R., & Dragomir, S. (2010). Fejér–Type Inequalities (I). *Journal of Inequalities and Applications*, 2010(531976(1)). <https://doi.org/10.1155/2010/531976>
4. Yildiz, C. (2016) Some new inequalities of Hermite–Hadamard–Fejer type for s -convex functions. *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2), 70–78.
5. Sarıkaya, M. Z., Ertuğral, F., & Yildırım, F. (2018). On the Hermite–Hadamard–Fejér type integral inequality for s -convex function. *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(1), 35–41.
6. Eken, Z. (2022). Fejer inequality for s -convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*, 40(1), 19–34. <https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-02>
7. Delavar, R. M. (2023). On Fejér's inequality: generalizations and applications. *J Inequal Appl*, 42. 1–28. <https://doi.org/10.1186/s13660-023-02949-7>
8. Brydun, A. M., Brodyak, O. Ya., & Vasyukiv, Ya. V. (2011). *Convex, harmonic and subharmonic functions. Problems and theorems: Textbook*. Lviv: Publishing House of the Ivan Franko University of Lviv [in Ukrainian].
9. Shestakovska, I. V. (2024). *Generalization of the Hermite-Hadamard inequality*: (Thesis for a MA degree in Education). T. Shechenko National University of Kyiv, Kyiv [in Ukrainian].

Одержано 01.03.2025