

Д. І. Симонов

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України,

молодший науковий співробітник,

доктор філософії

denys.symonov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6648-4736>

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА КОНТРОЛЬ ХАОТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У
СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ**

У статті представлено узагальнений математичний підхід до ідентифікації та адаптивного контролю хаотичних процесів у нелінійних технічних системах з випадковими параметрами. Досліджується проблема стабілізації систем, що характеризуються високою чутливістю до початкових умов і стохастичними впливами, яка є актуальною для сучасної прикладної математики та інженерії. Побудовано нелінійну стохастичну модель хаотичної динаміки, формалізовано вплив хаосу на показники надійності технічних систем і розроблено адаптивний метод контролю на основі зворотного зв'язку. Представлено алгоритмічну реалізацію запропонованого методу та виконано його апробацію на реальних даних газових сенсорних систем. Отримані результати свідчать про суттєве підвищення стабільності, прогнозованості та надійності роботи систем за умов складних динамічних режимів. Запропонований метод може бути ефективно застосований у робототехніці, сенсорних мережах, енергетиці та автоматизованих системах керування, забезпечуючи стабілізацію та контроль нелінійних режимів функціонування в умовах параметричних і стохастичних невизначеностей.

Ключові слова: хаотичні процеси, нелінійні системи, надійність систем, контроль хаосу, адаптивний закон керування.

1. Вступ. Проблема стабілізації хаотичних режимів у нелінійних динамічних системах є однією з ключових задач сучасної прикладної математики, фізики та інженерії [1]. Особливої актуальності вона набуває у випадку систем, поведінка яких визначається не тільки складною нелінійною динамікою, але й впливом стохастичних факторів на функціонування цих систем [2]. Хаос, що характеризується високою чутливістю до початкових умов, експоненціальним розходженням траєкторій і складністю фазових просторів, призводить до суттєвого зниження прогнозованості, керованості та надійності технічних систем [3]. Традиційні методи стабілізації та контролю здебільшого не враховують нелінійних та адаптивних особливостей таких систем, що робить їх малоефективними для боротьби з хаотичними режимами. Саме тому розвиток узагальнених математичних підходів до стабілізації хаосу в стохастичних нелінійних системах є важливим теоретичним і практичним завданням. Особливий інтерес становлять адаптивні методи, здатні компенсувати невизначеність параметрів та забезпечувати асимптотичну стабілізацію станів системи [4, 5].

У цій статті запропоновано узагальнений підхід до аналізу та стабілізації хаосу в нелінійних системах з випадковими параметрами. Послідовно викладено математичні основи нелінійних стохастичних систем, розглянуто фундаментальні взаємозв'язки між хаосом і стохастичними процесами, описано основні методи стабілізації хаотичних режимів, а також наведено математичну формалізацію узагальнених підходів до керування стохастичними параметрами.

Представлені у статті результати мають не тільки теоретичне значення, але й безпосередню практичну цінність, оскільки дозволяють створювати ефективні алгоритми керування нелінійними динамічними системами, які функціонують в умовах невизначеності та стохастичних впливів. Викладений у роботі матеріал може бути основою для подальших теоретичних досліджень та практичних впроваджень у різноманітних галузях, де важливим є забезпечення стабільності, прогнозованості та надійності функціонування складних динамічних об'єктів і систем.

2. Мета та завдання роботи. Метою роботи є розробка математичного методу адаптивного контролю хаотичної динаміки для підвищення надійності технічних систем, що функціонують у нелінійних нестійких режимах.

Для досягнення поставленої мети планується розв'язати такі завдання:

- побудувати математичну модель технічної системи з елементами хаотичної динаміки;
- формалізувати вплив хаосу на показники надійності;
- формалізувати задачу стабілізації та розробити адаптивний закон керування;
- провести тестування методу на реальному наборі даних та проаналізувати ефективність запропонованого підходу.

3. Математичне моделювання технічної системи з елементами хаотичної динаміки. Для аналізу технічних систем, що демонструють елементи хаотичної поведінки, необхідно побудувати математичну модель, яка адекватно відображає складні нелінійні процеси, що визначають динаміку їх поведінки.

Розглянемо загальний підхід до побудови такої моделі. Нехай розглядається технічна система, яка описується нелінійною системою диференціальних рівнянь наступного типу:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

де $x(t) = (x_i(t))_i^T$, $i = \overline{1, n}$ – вектор стану системи; $\mu(t) = (\mu_j(t))_j^T$, $j = \overline{1, m}$ – вектор параметрів системи; $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нелінійне гладке відображення, що визначає динаміку системи.

У системах з характерною ознакою хаотичної динаміки є чутливість до початкових умов. Для аналізу характеру поведінки розглянемо лініаризацію системи поблизу деякої точки фазового простору x^* , яка відповідає стаціонарному стану або рівновазі системи, що визначається умовою:

$$F(x^*, \mu) = 0. \quad (2)$$

Використовуючи лінійне наближення, ми отримуємо наступну систему лінеаризованих рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = J(x^*, \mu)y, \quad y = x - x^*, \quad (3)$$

де $J(x^*, \mu)$ – матриця Якобі відображення F , що визначається співвідношенням:

$$J(x^*, \mu) = \left. \frac{dF}{dt} \right|_{x=x^*, \mu}.$$

Суттєву інформацію про динаміку системи [6, 7] в околі точки рівноваги системи x^* несе спектр матриці Якобі. Якщо хоча б одне власне число матриці $J(x^*, \mu)$ має додатну дійсну частину, то система може демонструвати складні динамічні режими.

Розглянемо далі приклад побудови математичної моделі, типової для класу технічних систем, що характеризуються складною, потенційно хаотичною динамікою. Особливої актуальності проблема набуває в системах, що працюють з малими сигналами або в умовах низької концентрації інформаційного чи фізичного впливу, як-от у масивах газових сенсорів [8]. Для аналізу використаємо відкритий набір даних «Gas Sensor Array: Low-Concentration» з репозиторію UCI Machine Learning Repository, який містить дані щодо реакції сенсорних елементів на нелінійні, складні та чутливі до малих змін концентрації газові середовища [9].

Реакції сенсорів на низькі концентрації газів мають виражений нелінійний характер, що може бути описаний динамічною моделлю у вигляді нелінійної системи диференціальних рівнянь, подібних до системи Лоренца:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (4)$$

де $x(t), y(t), z(t)$ – змінні, що відповідають узагальненим станам газочутливих елементів, що характеризують внутрішню динаміку реакції на зміну концентрації газів; $\sigma \in \mathbb{R}_+$ – параметр системи, що визначає інтенсивність перенесення сигналу між сусідніми компонентами сенсорної системи, пов'язану із швидкістю реакції та тепловим або концентраційним переносом; $r \in \mathbb{R}_+$ – параметр системи, що описує зовнішні умови експерименту, такі як концентрація газу та потенціал активації сенсорів (зі зростанням r система сенсорів переходить від простих, передбачуваних режимів до складних, нелінійних та потенційно хаотичних реакцій); $b \in \mathbb{R}_+$ – параметр системи, що характеризує геометричні чи конструктивні параметри самих сенсорів та їх взаєморозташування, що впливають на просторово-часову динаміку процесу.

Система (4) характерна для прикладних задач, які включають елементи нестабільності та нелінійних взаємодій. Для оцінки наявності хаотичних елементів у динаміці сенсорних реакцій, представлених у наборі даних, ефективним інструментом є аналіз показників Ляпунова [10, 11]. Обчислення цих показників дозволяє кількісно оцінити чутливість реакції сенсорів до початкових умов та визначити можливість існування режимів хаотичної динаміки:

$$|\delta x(t)| \approx |\delta x(0)| e^{\lambda t}.$$

Відповідно, формула, яка враховує чутливість сенсорної системи до початкових умов (реакції газових сенсорів), для визначення найбільшого показника Ляпунова λ має вигляд:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|}, \quad (5)$$

де $\delta x(0)$ – початкове, мале збурення сенсорної системи в момент часу t_0 ; $\delta x(t)$ – еволюція цього збурення з плином часу t ; $\|\cdot\|$ – норма вектору у фазовому просторі станів системи.

Якщо $\lambda > 0$, то це свідчить про наявність хаотичної поведінки, що проявляється у високій чутливості сенсорної системи до мінімальних змін початкових умов.

4. Надійність технічних систем. Надійність технічних систем, у яких проявляється хаотична динаміка, визначається здатністю системи підтримувати задані функціональні характеристики в умовах нелінійних та потенційно нестійких режимів роботи [12, 13]. Хаотична динаміка безпосередньо впливає на надійність системи, спричиняючи непередбачувані зміни станів та суттєве погіршення прогнозованості поведінки.

Позначимо через $R(t)$ функцію надійності технічної системи, визначену ймовірністю того, що система не покине допустиму множину станів $D \subset \mathbb{R}^n$ протягом проміжку часу $\tau \in [0, n]$:

$$R(t) = P\{x(\tau) \in D, \forall \tau \in [0, n]\}. \quad (6)$$

Зважаючи на чутливість хаотичних систем до початкових умов та параметрів, аналіз надійності таких систем потребує використання імовірнісних характеристик їх поведінки. Для формального опису впливу хаотичних явищ доцільно розглянути стохастичну модель, що враховує можливі невизначеності або випадкові збурення в початкових умовах чи параметрах.

Нехай початковий стан системи $x(0)$ є випадковим вектором із щільністю розподілу $f_{x(0)}(x)$. Тоді функцію надійності можна записати як:

$$R(t) = \int_D f_{x(t)}(x) dx, \quad (7)$$

де $f_{x(t)}(x)$ – щільність розподілу стану системи у момент часу t , яка визначається еволюцією початкового розподілу згідно із нелінійним відображенням F :

$$f_{x(t)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{x(0)}(y) \delta(x - \Phi_t(y)) dy, \quad (8)$$

де $\Phi_t(\cdot)$ – фазовий потік, що описує еволюцію стану системи у часі; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

З математичної точки зору, ймовірність виходу стану системи за межі допустимої області D у хаотичних умовах швидко зростає зі збільшенням часу t , що можна приблизно описати як:

$$1 - R(t) \sim 1 - e^{-\gamma e^{\lambda t}}, \quad (9)$$

де γ – параметр, що визначає масштаб початкових збурень.

Формула (9) підкреслює стрімке погіршення надійності через вплив хаосу, навіть за незначних початкових невизначеностей. Враховуючи наведені математичні формулювання, необхідно розробляти спеціальні методи контролю та стабілізації нелінійних режимів роботи для забезпечення високого рівня надійності технічних систем.

5. Постановка задачі контролю хаотичної поведінки. Задача контролю хаотичної поведінки полягає в розробці керуючого впливу $u(t)$, що дозволяє стабілізувати систему навколо рівноважного стану x^* , періодичного циклу чи іншого регулярного режиму роботи, який задовольняє рівняння (2).

Враховуючи вплив керуючого сигналу $u(t) \in \mathbb{R}^k$, система набуває наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu) + Bu(t), \quad (10)$$

де $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ – матриця, яка описує розподіл керуючих впливів у фазовому просторі системи.

Формально задача контролю формулюється таким чином:

- 1) Знайти керуючий сигнал $u(t)$, який мінімізує критерій:

$$J(u) = \int_0^T \left[(x(t) - x^*)^T Q (x(t) - x^*) + u^T(t) R u(t) \right] dt \rightarrow \min_{u(t)}; \quad (11)$$

- 2) При заданих матрицях вагових коефіцієнтів $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$, забезпечити умову стабілізації:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (12)$$

Таким чином, задача контролю хаотичної поведінки зводиться до вибору оптимального керуючого сигналу $u(t)$, що забезпечує асимптотичну стабілізацію стану системи в околі бажаної траєкторії, що, своєю чергою, дозволяє істотно підвищити надійність функціонування технічної системи.

6. Огляд методів контролю хаосу. Для розв'язання задачі контролю хаотичної поведінки, описаної у розділі 3, можуть використовуватися різноманітні математичні підходи та алгоритми стабілізації нелінійних динамічних систем. Нижче наведено основні математичні методи контролю хаосу з їх формальним описом.

Метод Отта–Гребоджі–Йорка (OGY) базується на застосуванні малих коригувальних впливів на параметри системи в моменти перетину фазовою траєкторією перерізу Пуанкаре з метою стабілізації нестійкої періодичної орбіти. Нехай задано систему в дискретному вигляді:

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu_n), \quad x_n \in \mathbb{R}^n, \quad \mu_n \in \mathbb{R}^m.$$

Тоді метод OGY формулюється через наступний закон керування параметром:

$$\mu_n = \mu^* + K(x_n - x'), \quad (13)$$

де μ^* – номінальне значення параметра, відповідне «оптимальній» періодичній орбіті; x' – точка нестійкої періодичної орбіти в перерізі Пуанкаре, $x' = P(x)$; $P(\cdot)$ – оператор відображення Пуанкаре; K – матриця, що обчислюється на основі лінійного наближення системи поблизу точки x' .

Метод зворотного зв'язку за станом (State Feedback Control) Метод заснований на лінійній стабілізації навколо бажаного стану за допомогою керуючого сигналу вигляду:

$$u_s(t) = -L(x(t) - x'), \quad (14)$$

де L – матриця зворотного зв'язку, що визначається з умов стабільності відповідної лінеаризованої системи:

$$\frac{dy}{dt} = [J(x', \mu) - BL]y, \quad y = x - x',$$

та має забезпечувати виконання умови:

$$\operatorname{Re} \lambda_i [J(x', \mu) - BL] < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Метод керування за допомогою затриманого зворотного зв'язку (Pyragas Time-Delayed Feedback) використовує затриманий сигнал для стабілізації періодичних орбіт. Керуючий сигнал у цьому випадку має вигляд:

$$u_s(t) = \varphi [x(t - \tau) - x(t)],$$

де τ – період стабілізованої орбіти; φ – коефіцієнт підсилення, який визначає ступінь впливу затриманого сигналу.

Метод адаптивного керування (Adaptive Control) передбачає динамічну адаптацію параметрів керування з метою компенсації невизначеностей моделі та збурень. Закон адаптації параметрів описується рівнянням:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\Gamma(x(t) - x')^T P B,$$

де $\theta(t)$ – адаптивно змінюваний параметр керування; $P > 0$ – матриця, що визначається з розв'язку матричного рівняння Ляпунова (5); $\Gamma(\cdot) > 0$ – швидкість адаптації.

Перелічені методи дають можливість математично обґрунтовано здійснювати контроль хаотичної поведінки та стабілізувати динаміку технічних систем, тим самим суттєво підвищуючи їхню надійність.

7. Модифікований процес контролю на основі адаптивного зворотного зв'язку. Розглянемо подальше узагальнення методу контролю хаотичної динаміки з використанням адаптивного зворотного зв'язку, що враховує не лише поточне значення стану системи, а й динаміку зміни параметрів самої системи. Це дозволяє суттєво підвищити ефективність контролю за умов невизначеності початкових умов та параметричних збурень.

Припустимо, що система функціонує за умов (10) для якої визначимо керуючий сигнал, що складається з двох компонент (14) та адаптивний додатковий член контролю, який враховує зміну параметрів та динаміку їх адаптації:

$$u_a(t) = -G(\hat{\mu}(t) - \mu^*),$$

де $\hat{\mu}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор адаптивних оцінок параметрів системи; μ^* – бажане (еталонне) значення параметрів; $G \in \mathbb{R}^{k \times m}$ – матриця коефіцієнтів адаптивного впливу.

Відповідно, повний керуючий сигнал має вигляд:

$$u(t) = -L(x(t) - x') - G(\hat{\mu}(t) - \mu^*).$$

Закон адаптації параметрів $\hat{\mu}(t)$ вводиться у вигляді наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d\hat{\mu}(t)}{dt} = -\Gamma B P(x(t) - x')^T.$$

Тоді динаміка замкненої адаптивно-керованої системи набуває вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu) - B(L(x(t) - x') + G(\hat{\mu}(t) - \mu^*)).$$

Застосування такого модифікованого адаптивного керування дозволяє не лише стабілізувати систему навколо бажаної точки рівноваги, а й ефективно компенсувати зміни параметрів, збурення та невизначеності, які є типовими для хаотичних режимів.

Для доведення стабільності та збіжності системи за таким алгоритмом можна використати функцію Ляпунова виду:

$$V(x, \hat{\mu}) = (x - x')^T P (x - x') + (\hat{\mu} - \mu^*)^T \Gamma^{-1} (\hat{\mu} - \mu^*),$$

яка задовольняє умови додатної визначеності та обмеженості.

Вибір матриць L, G, Γ, P, Q дозволяє гарантувати виконання умови стабільності, тобто $\frac{dV(x, \hat{\mu}, t)}{dt} < 0$, що забезпечує асимптотичну стійкість та збіжність траєкторій до заданого стану рівноваги та параметрів до еталонних значень:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x', \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mu}(t) = \mu^*.$$

Таким чином, модифікований контроль на основі адаптивного зворотного зв'язку є математично обґрунтованим методом, що дозволяє істотно покращити надійність технічних систем в умовах хаотичної динаміки.

8. Алгоритмічна реалізація контролю хаотичної динаміки. Нижче наведено псевдокод алгоритму контролю хаотичної динаміки системи з адаптивним зворотним зв'язком, який реалізує математичні принципи, описані у попередніх розділах статті.

Algorithm 1

Рис. 0. Chaos Control Adaptive Feedback

```

1: Input:  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{\mu}(0) = \hat{\mu}_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $L, G, B, \Gamma, P, Q, x', \mu^*, \Delta t, \varepsilon$ 
2: Output:  $x(t), \hat{\mu}(t), u(t)$ 
3:  $x \leftarrow x_0, \hat{\mu} \leftarrow \hat{\mu}_0$ 
4:  $t \leftarrow 0$ 
5:  $u \leftarrow u_0$ 
6: while  $\|x - x'\| \geq \varepsilon$  do
7:    $u \leftarrow -L(x - x') - G(\hat{\mu} - \mu^*)$ 
8:    $x \leftarrow x + \text{Integrate}(F(x, \mu) + Bu, \Delta t)$ 
9:    $\hat{\mu} \leftarrow \hat{\mu} - \Gamma B^T P(x - x') \Delta t$ 
10:   $t \leftarrow t + \Delta t$ 
11: end while
12: Return  $x, \hat{\mu}, u$ 

```

Представлений алгоритм, де ε – заданий малий поріг, дозволяє систематично реалізувати чисельне рішення задачі контролю, забезпечуючи ефективну стабілізацію технічних систем в умовах хаотичної поведінки. Запропонований підхід характеризується чіткою структурою, високою обчислювальною ефективністю та адаптивною здатністю враховувати можливі невизначеності початкових умов і параметричні збурення. Це робить його придатним для широкого кола задач із забезпечення надійності складних технічних систем.

9. Приклад застосування в технічних системах. Для практичного підтвердження ефективності запропонованого алгоритму контролю хаотичної динаміки необхідно провести його тестування на реальних даних, що демонструють нелінійні та потенційно хаотичні властивості. Таким об'єктом дослідження є відкритий набір даних «Gas Sensor Array: Low-Concentration» з репозиторію UCI Machine Learning Repository, який містить часові ряди вимірювань масиву газових сенсорів у відповідь на низькі концентрації летких органічних сполук. Дані характеризуються суттєвою нелінійністю, чутливістю до початкових умов і параметричних змін, що робить їх оптимальним кейсом для валідації в умовах складної динаміки.

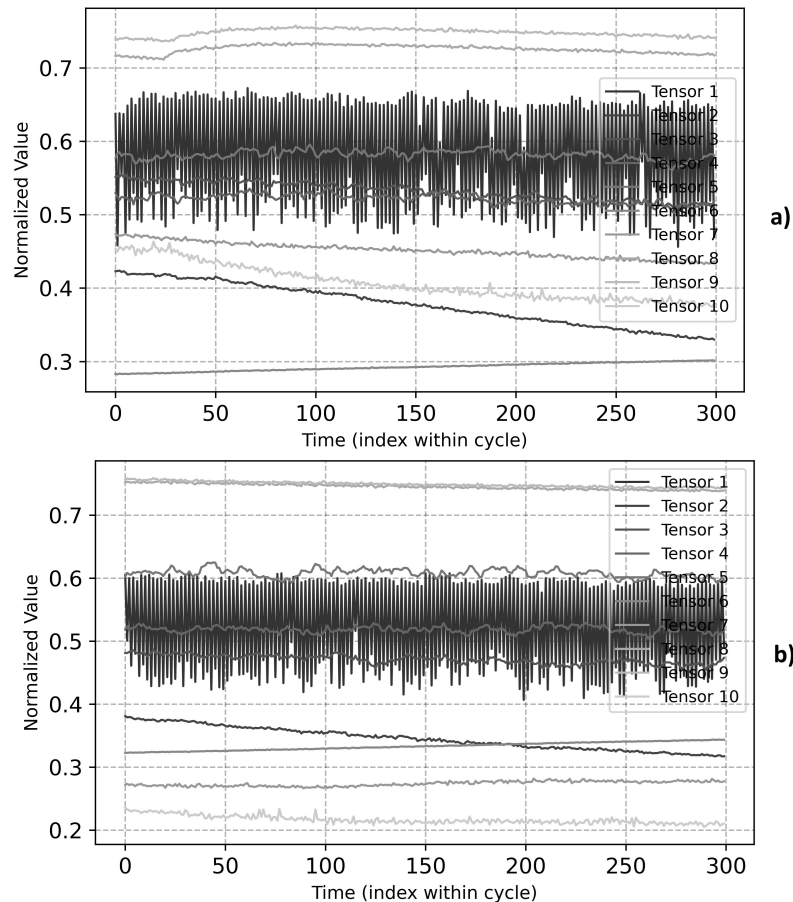


Рис. 1. Динаміка сигналів до (а) і після (б) застосування адаптивного методу контролю

Результати, представлені на рисунках 1(а) і 1(б), демонструють чітке підтвердження ефективності запропонованого адаптивного методу контролю ха-

отичної динаміки. На рисунку 1(a) спостерігається значна варіабельність та нестабільність сигналів сенсорних елементів, що характерно для хаотичної поведінки технічних систем. Після застосування розробленого методу, на рисунку 1(b), помітне зменшення коливань, стабілізація показників сенсорів та суттєве зниження амплітуди нестійких флуктуацій. Це підтверджує, що метод адаптивного контролю забезпечує підвищення прогнозованості, стабільності та надійності роботи технічних систем в умовах складної хаотичної динаміки.

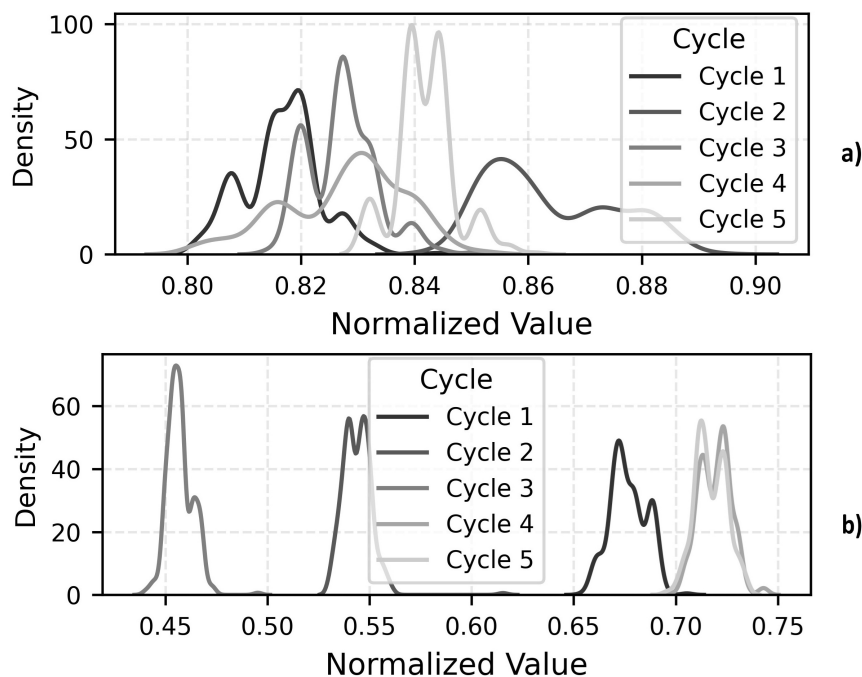


Рис. 2. Вплив адаптивного контролю на характер розподілу сенсорних даних

Проведений порівняльний аналіз розподілів сигналів до та після застосування запропонованого адаптивного методу контролю хаотичної динаміки свідчить про його ефективність та практичну корисність. На рисунку 2(a) спостерігається складний, багатомодальний та неоднорідний розподіл даних, який відповідає нестабільній і хаотичній динаміці. Після використання методу адаптивного контролю, результати зображені на рисунку 1(b), розподіл став більш чітким, зменшилась кількість мод, він набув компактнішого характеру, що свідчить про перехід системи до режиму, близького до нормального розподілу. Це підтверджує ефективність адаптивного контролю у стабілізації сигналів та суттєве підвищення прогнозованості й надійності технічних систем.

10. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній статті розглянуто математично обґрунтований підхід до підвищення надійності технічних систем шляхом контролю хаотичної динаміки. Побудовано загальну нелінійну модель системи з потенційно хаотичною поведінкою, формалізовано вплив хаосу на функцію надійності, а також поставлено та розв'язано задачу керування з використанням модифікованого адаптивного зворотного зв'язку. Запропонований метод забезпечує асимптотичну стабілізацію стану системи в околі заданої рівноваги за рахунок динамічного коригування параметрів керування відповідно до поведінки системи в реальному часі. Побудовано алгоритмічну

реалізацію запропонованого контролю у вигляді чіткої послідовності інтегрування станів, розрахунку керуючих сигналів та оновлення адаптивних оцінок параметрів. Проведено тестування алгоритму на відкритому наборі даних Gas Sensor Array: Low-Concentration з репозиторію UCI. Результати чисельного моделювання підтвердили ефективність методу: після застосування адаптивного контролю спостерігається стабілізація часових рядів сенсорних сигналів, зменшення амплітуди флуктуацій та впорядкування структури розподілу даних. Зокрема, було зафіксовано трансформацію складної та нерівномірної динаміки до передбачуваного стану з ознаками нормальності розподілу. Це безпосередньо свідчить про підвищення надійності технічної системи, що функціонує в умовах внутрішньої або зовнішньої нестійкості. Запропонований підхід може бути адаптований для широкого спектра складних систем, де виникає необхідність контролю й стабілізації хаотичних процесів, зокрема у сенсорних мережах, роботизованих системах, енергетиці та автоматизованому виробництві.

11. Подяки. Робота виконана в рамках науково-дослідної теми «Розробити методи моделювання процесів цільового управління складними інформаційними багатокомпонентними системами різного призначення» (номер державної реєстрації 0123U100754) Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова (НАН) України.

Список використаної літератури

1. Buts V., Kuzmin V. Chaotic regimes generated by special points and singular solutions. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2024. Vol. 5, Issue 153. P. 161–165. DOI: <https://doi.org/10.46813/2024-153-161>
2. Zhao Z., Lv G., Xu Y., Lin Y., Wang P., & Wang X. Enhancing ground source heat pump system design optimization: A stochastic model incorporating transient geological factors and decision variables. *Renewable Energy*. 2024. Vol. 225. P. 120279. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2024.120279>
3. Bouadi M., Jia B., Jiang R., Li X., & Gao Z. Stochastic factors and string stability of traffic flow: Analytical investigation and numerical study based on car-following models. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2022.09.007>
4. Zhang J., Karimireddy S. P., Veit A., Kim S., Reddi S. J., Kumar S., & Sra S. Why are Adaptive Methods Good for Attention Models? *arXiv: Optimization and Control*. 2020. Vol. 33. P. 15383–15393.
5. Rackauckas C., & Nie Q. Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. *Discrete and continuous dynamical systems. Series B*. 2017. Vol. 22, Issue 7. P. 2731–2761. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017133>
6. Симонов Д. І., Заїка Б. Ю. Моделювання управління складними інформаційними багатокомпонентними системами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2024. Т. 44, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).168-174)
7. Symonov D., Symonov Y. Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Scientific Journal «Mathematical Modeling»*. 2024. Vol. 1, Issue 50. P. 57–63. DOI: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(50\)2024.304943](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943)
8. Yaqoob U., Younis M. I. Chemical Gas Sensors: Recent Developments, Challenges, and the Potential of Machine Learning—A Review. *Sensors (Basel, Switzerland)*. 2021. Vol. 21. P. 2877. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21082877>
9. Tian F., Zhao L., & Deng S. Gas sensor array low-concentration [Dataset]. *UCI Machine Learning Repository*. 2023. DOI: <https://doi.org/10.24432/C5CK6F>
10. Wolf A., Swift J., Swinney H. L., & Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. Vol. 16. P. 285–317. DOI:

- [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
11. Das S., Green J. R. Spectral bounds on the entropy flow rate and Lyapunov exponents in differentiable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad8f06>
 12. Doganaksoy N. Quality and Reliability of Technical Systems: Theory, Practice, Management. *Technometrics*. 1999. Vol. 41. P. 171–172. DOI: <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485644>
 13. Ткачук А., Мошноріз М. Математична модель оцінки надійності для діагностування технічного стану електротехнічних комплексів розподілених систем водопостачання. *Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки*. 2024. Т. 333, № 2. С. 428–432. DOI: <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-67>

Symonov D. I. Identification and control of chaotic processes in complex technical systems.

This article presents a generalized mathematical approach to the identification and adaptive control of chaotic processes in nonlinear engineering systems with random parameters. The study addresses the problem of stabilizing systems characterized by high sensitivity to initial conditions and stochastic influences, which is of current interest in modern applied mathematics and engineering. A nonlinear stochastic model of chaotic dynamics is constructed, and the impact of chaos on the reliability indicators of technical systems is formalized. An adaptive feedback-based control method is also developed. The paper provides an algorithmic implementation of the proposed method and demonstrates its validation using real data from gas sensor systems. The results indicate a substantial improvement in stability, predictability, and reliability under complex dynamic conditions. The proposed method can be effectively applied in robotics, sensor networks, energy systems, and automated control systems, ensuring the stabilization and control of nonlinear operating modes under parametric and stochastic uncertainties.

Keywords: chaotic processes, nonlinear systems, system reliability, chaos control, adaptive control law.

References

1. Buts, V., & Kuzmin, V. (2024). Chaotic regimes generated by special points and singular solutions. *Problems of Atomic Science and Technology*, 5(153), 161–165. <https://doi.org/10.46813/2024-153-161>
2. Zhao, Z., Lv, G., Xu, Y., Lin, Y., Wang, P., & Wang, X. (2024). Enhancing ground source heat pump system design optimization: A stochastic model incorporating transient geological factors and decision variables. *Renewable Energy*, 225, 120279. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2024.120279>
3. Bouadi, M., Jia, B., Jiang, R., Li, X., & Gao, Z. (2022). Stochastic factors and string stability of traffic flow: Analytical investigation and numerical study based on car-following models. *Transportation Research Part B: Methodological*. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2022.09.007>
4. Zhang, J., Karimireddy, S. P., Veit, A., Kim, S., Reddi, S. J., Kumar, S., & Sra, S. (2020). Why are Adaptive Methods Good for Attention Models? *arXiv: Optimization and Control*, 33, 15383–15393.
5. Rackauckas, C., & Nie, Q. (2017). Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. *Discrete and continuous dynamical systems. Series B*, 22(7), 2731–2761. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017133>
6. Symonov, D. I., & Zaika, B. Y. (2024). Modeling the management of complex information multicomponent systems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 44(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).168-174) [in Ukrainian].
7. Symonov, D., & Symonov, Y. (2024). Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Scientific Journal "Mathematical Modeling"*, 1(50), 57–63. [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(50\)2024.304943](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943)

8. Yaqoob, U., & Younis, M. I. (2021). Chemical Gas Sensors: Recent Developments, Challenges, and the Potential of Machine Learning—A Review. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 21, 2877. <https://doi.org/10.3390/s21082877>
9. Tian, F., Zhao, L., & Deng, S. (2023). Gas sensor array low-concentration [Dataset]. *UCI Machine Learning Repository*. <https://doi.org/10.24432/C5CK6F>
10. Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16, 285–317. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
11. Das, S., Green, J. R. (2024). Spectral bounds on the entropy flow rate and Lyapunov exponents in differentiable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad8f06>
12. Doganaksoy, N. (1999). Quality and Reliability of Technical Systems: Theory, Practice, Management. *Technometrics*, 41, 171–172. <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485644>
13. Tkachuk, A., & Moshnoriz, M. (2024). Mathematical model of reliability assessment for diagnosing the technical condition of electrical engineering complexes in distributed water supply systems. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*, 333(2), 428–432. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-67>

Одержано 30.03.2025