УДК 539.12
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).234-246

О. С. Паничок[1], Ю. О. Ящук[2]

[1] Львівський національний Університет ім. І. Франка,
студентка спеціальності Прикладна математика
olena.panychok@lnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-5821-8616

[2] Львівський національний Університет ім. І. Франка,
завідувач кафедри прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yuriy.yashchuk@lnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4935-497X

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ СЕЙСМІЧНИХ ХВИЛЬ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ З УМОВАМИ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ

У цій статті розглядаються теоретичні та чисельні аспекти моделювання розповсюдження сейсмічних хвиль у насичених пористих середовищах за моделлю Біота. Представлено повний опис математичної моделі, що містить рівняння руху твердого скелету та рідини, умови збереження маси й напружень, а також чисельну реалізацію з використанням явної скінченно-різницевої схеми другого порядку. Детально проаналізовано умови інтерфейсного контакту між середовищами з різними швидкостями хвиль, умову CFL, норми L_2 та H^1 для оцінки похибок, а також порядок збіжності методу. Результати чисельних експериментів, підтверджені як статистичними даними, так і зображеннями (кадрами моделювання), демонструють високу точність моделювання. Стаття містить розгорнутий аналіз отриманих результатів і детально обговорює перспективи застосування розробленої методики.

Ключові слова: сейсмічні хвилі, пористе середовище, модель Біота, Ricker-імпульс, ідеальний контакт, математична модель, CFL, збіжність.

1. Вступ. Пружні хвилі у геологічних середовищах часто розповсюджуються в породах, насичених флюїдами (водою, нафтою, газом). Для опису їхнього поширення використовується теорія поропружності, зокрема модель Біота, яка враховує взаємодію між твердою пористою структурою та проникним флюїдом [1, 2]. Модель Біота дозволяє описати два типи поздовжніх (компресійних) хвиль — так звану швидку P-хвилю, в якій рух твердого скелета та флюїду відбувається в фазі, та повільну P-хвилю, де рухи флюїду відносно скелета протифазні і яка зазвичай сильно затухає. Також у середовищі існує одна поперечна (S) хвиля, що поширюється лише через деформації твердого скелета. Наявність двох P-хвиль є унікальною особливістю теорії Біота і підтверджена експериментально (повільна хвиля була вперше спостережена в лабораторії у 1980-х роках [3,4]). Здатність повільної хвилі переносити енергію обмежена — на низьких частотах вона проявляється як дифузійний процес через в'язкий опір руху флюїду, а на високих частотах стає хвилею з помірним затуханням, яка все ж розсіює значну частину енергії на тепло через тертя флюїду об породи. Таким чином, модель Біота враховує дисипативні ефекти і дозволяє адекватно описати загасання сейсмічних сигналів у насичених флюїдом породах.

У цій статті математично формулюється задача поширення сейсмічних хвиль у двовимірному пористому середовищі з вертикальним інтерфейсом, що розділяє два матеріали з різними властивостями. Розглянуто *умови контакту* на поверхні розділу, які відповідають моделі ідеального гідравлічного зв'язку між пористими середовищами ("відкриті пори" [5]). Це означає, що пористі каркаси механічно з'єднані, а флюїд може вільно перетікати через межу. У роботі виведено відповідні граничні умови для напружень, тиску та швидкостей, що забезпечують коректне математичне формулювання задачі [6].

На відміну від попередніх робіт, де моделювання обмежувалося однорідними або слабо неоднорідними середовищами [7, 8], у цій роботі поєднано кілька аспектів:

- теоретичне обґрунтування умов неперервності між пористими середовищами;
- чисельну реалізацію цих умов у скінченно-різницевій схемі другого порядку;
- оцінку точності методу в енергетичних нормах L_2 та H^1;
- аналіз хвильових ефектів на інтерфейсі при зміні жорсткості матеріалу.

У деяких дослідженнях [4, 9] модель обмежується лише твердим каркасом або не враховує ефекти повільної хвилі. Натомість у цьому дослідженні реалізовано згладжене врахування параметрів на межі, що дозволяє уникнути чисельних розривів і забезпечує фізично узгоджене моделювання переходу хвиль між середовищами.

Загалом, робота пропонує один із варіантів чисельного підходу до моделювання хвиль у пористих середовищах з урахуванням інтерфейсних умов і може бути корисною при вивченні подібних задач у геофізичному контексті.

2. Постановка задачі та основний результат.

Розглянемо пористе пружне середовище, насичене рідиною — суцільне тіло, що складається з твердого каркасу з коефіцієнтом пористості ϕ та пор, повністю заповнених рідиною. Фізичні властивості середовища визначаються наступними параметрами: параметри Ляме λ та μ для опису пружності каркасу; модуль стисливості рідини K_f; густини ρ_s та ρ_f; коефіцієнт проникності k та в'язкість η; коефіцієнт Біота α та модуль Біота M, що враховують взаємодію між двома фазами [1].

Ефект взаємодії скелета з рідиною може також описуватись через ефективні параметри, які інтегрують вплив обох фаз на поведінку хвиль.

Для опису малих пружних деформацій насиченого пористого середовища використовуються змінні: вектор зміщень твердого скелета $\mathbf{u}(x,z,t)$ та тиск флюїду в порах $p(x,z,t)$ (або, еквівалентно, вектор відносного зміщення флюїду Відповідно, повні напруження в скелеті σ_{ij} виражаються як

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha\, p\, \delta_{ij}, \tag{1}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, а α — коефіцієнт Біота (пористості та стисливості скелета). Для пружного скелета $\sigma'_{ij} = \lambda\,\theta\,\delta_{ij} + 2G\,\varepsilon_{ij}$, де $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)$ — тензор малих деформацій, $\theta = \varepsilon_{kk}$ — об'ємна деформація (дивергенція зміщення), а λ, G — параметри Ляме для скелета (модуль об'ємної пружності та модуль зсуву відповідно).

Насичуючий флюїд вважається ньютонівським, його рух відносно скелета описується узагальненим законом Дарсі [10]. Введемо вектор відносної швидкості флюїду $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{v_f} - \mathbf{v_s})$, де ϕ — пористість, $\mathbf{v_f} = \dot{\mathbf{U}}_f$ — швидкість флюїду, $\mathbf{v_s} = \dot{\mathbf{u}}$ — швидкість твердої фази (крапка означає похідну за часом). Тоді закон фільтрації запишеться як

$$\eta\,\mathbf{w} + m\,\dot{\mathbf{w}} = -\,\nabla p, \tag{2}$$

де η — динамічна в'язкість флюїду в порах, m — параметр дренованості (що залежить від проникності та властивостей флюїду). У випадку гарної проникності і невисоких частот член з $\dot{\mathbf{w}}$ малий (фільтрація описується переважно стаціонарним режимом Дарсі). Навпаки, за високих частот рух флюїду інерційний і домінує член $m\,\dot{\mathbf{w}}$.

Рівняння руху (балансу імпульсу) для двокомпонентної пористої матеріалу формулюються окремо для скелета і флюїду. Для твердої фази:

$$(1-\phi)\,\rho_s\,\ddot{u}_i + \phi\,\rho_f\,\ddot{w}_i = \nabla_j\sigma_{ij}, \tag{3}$$

а для флюїду (точніше, для відносного руху флюїду) — із врахуванням закону (2):

$$\phi\,\rho_f\,\ddot{u}_i + \phi\,\rho_f\,\ddot{w}_i = -\,\partial_i p, \tag{4}$$

де ρ_s і ρ_f — густини скелета і флюїду відповідно (припускається, що пори повністю насичені). Сума (3)+(4) дає загальне рівняння балансу сил для суміші:

$$((1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f)\,\ddot{u}_i + \phi\rho_f\,\ddot{w}_i = \nabla_j\sigma'_{ij} - \partial_i p,$$

що рівносильно

$$((1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f)\,\ddot{u}_i - \alpha\,\partial_i p = (\lambda + 2G)\,\partial_i\theta + G\,\nabla^2 u_i, \tag{5}$$

якщо підставити (1) та врахувати ізотропність пружного скелета. Друге незалежне рівняння отримуємо, виключивши $\ddot{w}_i$ між (3) і (4). Для цього продиференціюємо (2) по часу і підставимо в (3). Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\alpha\,\theta + \frac{1}{M}\,p - \frac{\rho_f}{m}\,\ddot{p} = 0, \tag{6}$$

де введено параметр M, що визначається стисливістю флюїду та скелета (його ще називають модулем Біота). Рівняння (5)—(6) разом утворюють систему рівнянь Біота [2,4] у диференціальній формі для невідомих $\mathbf{u}(x,z,t)$ і $p(x,z,t)$ [2,4].

З цієї системи випливають дві незалежні комбінації хвильових процесів. Перше — це поперечні (S) хвилі, що задовольняють спрощеному рівнянню $\rho_s\ddot{\mathbf{u}} = G\,\nabla^2\mathbf{u}$ (в них відносний рух флюїду не збуджується, $p = 0$). Друге — поздовжні (P) хвилі, для яких змінні (θ, p) підлягають рівнянням типу хвильового рівняння з двома характерними швидкостями:

$$c^2_{P1,2} = \frac{1}{2((1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f)}\Big[(K_u + \frac{4}{3}G) \pm \sqrt{(K_u + \frac{4}{3}G - K_d)^2 + \Big(\frac{\alpha}{M}\Big)^{-1} K_d}\,\Big],$$

де K_u і K_d — параметри пружності при невідведеному та відведеному дренажі відповідно (пов'язані з M, λ та α). Ці швидкості відповідають так званій швидкій ($P1$) хвилі та повільній ($P2$) хвилі у моделі Біота [1]. Величини c_{P1} і c_{P2} розрізняються на декілька порядків (повільна хвиля повільніша), причому

$P2$-хвиля зазвичай має великий коефіцієнт загасання через в'язкі втрати (члени з η в (2)). У межі $M \to \infty$ (нестисливий флюїд) повільна хвиля практично зникає, а швидка хвиля переходить у звичайну пружну P-хвилю в еквівалентному монолітному середовищі. Таким чином, рівняння Біота описують більш складну динаміку, ніж класичне хвильове рівняння, і для повного їх вирішення потрібен аналіз взаємодії двох хвильових режимів.

Ідеальні умови контакту двох пористих середовищ. Контактні умови на інтерфейсі — це умови, що забезпечують фізично коректне злиття двох пористих середовищ з різними властивостями. У нашому випадку для вертикального інтерфейсу $x = x_I$ (де, наприклад, $x_I = 0.5$) виконуються наступні умови:

- **(I) Неперервність зміщень:** $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$ на $x = x_I$;
- **(II) Неперервність напружень:** компоненти тензора напружень (зокрема, σ_{xx} та σ_{zx}) однакові з обох боків інтерфейсу;
- **(III) Неперервність порового тиску:** $p^{(1)} = p^{(2)}$ на $x = x_I$;
- **(IV) Неперервність нормальної компоненти фільтраційної швидкості:** $w_n^{(1)} = w_n^{(2)}$, де $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{v_f} - \mathbf{v_s})$.

Розглянемо плоску поверхню розділу, яка у нашій постановці є вертикальною лінією $x = x_I$. На цій межі зліва знаходиться перше пористе середовище з параметрами $(\rho_s^{(1)}, \rho_f^{(1)}, G^{(1)}, \lambda^{(1)}, \phi^{(1)}, \alpha^{(1)}, M^{(1)}, \eta^{(1)}, \ldots)$, а справа — друге середовище з власними параметрами $(\rho_s^{(2)}, \rho_f^{(2)}, \ldots)$. Для коректного розв'язання задачі поширення хвиль необхідно задати фізично обґрунтовані граничні умови на межі $x = x_I$, що зв'язують поля $\mathbf{u}^{(1)}, p^{(1)}$ зліва та $\mathbf{u}^{(2)}, p^{(2)}$ справа. У випадку *ідеального контакту* (відсутність прослизання або зазору між твердими каркасами та вільного перетікання флюїду) виконуються умови суцільності [5, 6].

Зазначені умови **(I)**—**(IV)** є *граничними умовами суцільності* на інтерфейсі насичених пористих середовищ. В роботах Дерешевича і Скалака [6] було доведено, що існують лише дві фізично прийнятні альтернативи таких умов: або описаний вище випадок повного гідравлічного контакту, або випадок абсолютно непроникного контакту (коли умови **(III)** і **(IV)** замінюються на $w_n = 0$ і допускається розрив p згідно з певним коефіцієнтом стрибка). Саме ці дві ситуації забезпечують єдиність розв'язку задачі і узгодженість з основними рівняннями Біота на межі розділу. У даній роботі прийнято умови відкритого контакту (пори сполучені), оскільки вони найбільш відповідають фізичній моделі цільових геофізичних середовищ (наприклад, шаруватих водонасичених ґрунтів або тріщинуватих колекторів). Варто зауважити, що неперервність зміщень **(I)** фактично означає відсутність механічного розриву: обидва середовища деформуються як єдине ціле на межі, тому і напруження передаються безперешкодно **(II)**. Одночасно неперервність тиску **(III)** та потоку **(IV)** гарантують відсутність неузгодженостей у балансі маси флюїду і виключають неграничні стрибки розв'язку. У чисельній схемі, представленій нижче, ці умови будуть враховані шляхом спеціальної побудови різницевих операторів на вузлах, що лежать поблизу інтерфейсу.

Чисельний метод розв'язання задачі: різницева схема та умова стійкості CFL.

Для наближеного розв'язання початково-крайової задачі, заданої рівняннями Біота (5)–(6) з граничними умовами суцільності на $x = x_I$, використовується двовимірна явна кінцево-різницева схема другого порядку точності [11]. Область моделювання розбивається на рівномірну сітку розміром $(N+1)\times(N+1)$ вузлів з кроком $\Delta x = \Delta z = h$. Для дискретизації за часом вводиться крок $\Delta t = \tau$. Позначимо $u_{i,j}^n$ — обчислене значення відповідної компоненти зміщення $\mathbf{u}$ у вузлі з індексами (i, j) на n-му кроці часу.

Центральна різницева схема другого порядку для просторових похідних використовує симетричні різниці значень функції в сусідніх точках, що забезпечує точність порядку $O(h^2)$. Друга похідна за часом апроксимується як

$$\ddot{u} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2},$$

а оператор Лапласа для поля зміщень обчислюється за допомогою двосторонніх різниць по координатах x та z. Особливістю є спосіб обчислення коефіцієнтів, що враховують різкі зміни швидкості хвилі c_{P1} на інтерфейсі. Щоб виконати умови (1)–(2) неперервності зміщень і напружень, використовуємо *симетричне усереднення* параметра c^2 на межі. Зокрема, різницева форма просторового оператора для рівняння (аналогічного до однорідного випадку (5) без повільної хвилі) будується так:

$$(\nabla\cdot c^2\nabla u)_{i,j} \approx \frac{1}{h^2}\Big[\overline{c^2}_{i+1/2,j}\left(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right) - \overline{c^2}_{i-1/2,j}\left(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n\right) + \overline{c^2}_{i,j+1/2}\left(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right) - \overline{c^2}_{i,j-1/2}\left(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n\right)\Big], \tag{7}$$

де $\overline{c^2}_{i+1/2,j} = \frac{c_{i+1,j}^2 + c_{i,j}^2}{2}$ — середнє значення параметра c^2 між сусідніми вузлами по горизонталі (аналогічно визначаються $\overline{c^2}_{i-1/2,j}$ та інші). Тут $c_{i,j}$ означає локальну швидкість поширення P-хвилі в даному елементі сітки. В нашій задачі:

$$c_{i,j} = \begin{cases} c_1, & x_i < x_I, \\ c_2, & x_i \geq x_I, \end{cases}$$

тобто зліва від інтерфейсу значення c_1 (для першого середовища), а справа — c_2 (для другого). Тоді формули виду (7) автоматично забезпечують, що на межі $x = x_I$ враховується середнє значення $\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)$ при обчисленні потоку напружень між сусідніми вузлами з різних боків. Це еквівалентно вимозі неперервності напруження: стрибок σ_{xx} на інтерфейсі відсутній, оскільки контраст жорсткостей усереднюється. Одночасно зміщення на самій межі розраховуються для спільного вузла (сітка співпадає на $x = x_I$), що гарантує неперервність $\mathbf{u}$. Таким чином, різницева схема узгоджується з граничними умовами (1)–(2). Неперервність тиску і фільтрації (3)–(4) в поточній реалізації явно не моделюється, оскільки ми спрощуємо задачу, розглядаючи тільки одну компоненту поля (пружну хвилю, яка відповідає швидкій P-хвилі). Проте за потреби аналогічне усереднення можна застосувати і для параметрів, що входять в рівняння для повільної хвилі, або при постановці задачі, де одна зі складових w_n чи p мала б розрив — запровадити умови типу джерела (права частина, пропорційна стрибку) згідно з узагальненим підходом [5].

Повна різницева схема для поля $u(x, z, t)$ може бути записана як:

$$u_{i,j}^{n+1} = 2\,u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n-1} + \tau^2\,(\nabla\cdot c^2\nabla u)_{i,j}^{n} + \tau^2\,F_{i,j}^{n}, \tag{8}$$

де $(\nabla\cdot c^2\nabla u)_{i,j}^n$ обчислюється за формулою (7), а $F_{i,j}^n$ — зовнішня сила (джерело). У нашому випадку роль джерела відіграє короткий сейсмічний імпульс — в центральному вузлі $(i_{\text{src}}, j_{\text{src}})$ додається значення $F^n = s(t_n)$, де $s(t)$ має форму хвилі Рікера. Наприклад,

$$r(t) = (1 - 2\pi^2 f_0^2 t^2)\, e^{-\pi^2 f_0^2 t^2},$$

де f_0 — центральна частота. Такий імпульс має компактну часову підтримку та широкий спектр, збуджуючи як низько-, так і високочастотні хвилі.

Як відомо [12], стійкість розв'язку забезпечується виконанням умови CFL (Курранта—Фрідріхса—Леві) — необхідного обмеження на часовий крок явної чисельної схеми. Для задачі поширення хвиль у двовимірному просторі ця умова має вигляд:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{\max}\sqrt{2}},$$

де $c_{\max} = \max(c_1, c_2)$ — максимальна швидкість поширення хвиль у досліджуваній області.

Саме цей вибір Δt використовувався при обчисленнях. Інтуїтивно умова CFL означає, що за один часовий крок інформація (хвиля) не повинна пройти більшу відстань, ніж один крок сітки, інакше дискретизація не встигне її "зловити", що призведе до нестійкого, розбіжного розв'язку. У даній задачі критичною є область з більшою швидкістю (c_2), тому крок часу визначався саме за нею.

Оцінка збіжності методів. Запропонована різницева схема є другого порядку апроксимації як у просторі, так і в часі. Це означає, що за достатньо згущеної сітки похибка наближення і за часом, і за просторовими змінними пропорційна $O(\tau^2 + h^2)$ (для гладких рішень). Щоб оцінити цю похибку кількісно, вводять норми. Норма L_2 для функції $e(x, z)$ (різниця між чисельним та аналітичним рішенням) визначається як

$$\|e\|_{L_2} = \sqrt{\iint\limits_{\Omega} |e(x,z)|^2\,dx\,dz}\,, \tag{9}$$

тобто корінь квадратний з інтеграла квадрата похибки по всій області Ω. У дискретній реалізації інтеграл замінюється сумою по вузлах сітки. Таким чином, $\|e\|_{L_2}$ характеризує *середньоквадратичну* помилку рішення на всій області — це глобальна метрика точності, чутлива переважно до великих відхилень. Норма H^1 (енергетична) визначається як

$$\|e\|_{H^1} = \sqrt{\|e\|_{L_2}^2 + \|\nabla e\|_{L_2}^2}\,, \tag{10}$$

тобто крім самої функції враховує ще й її похідні (градієнт). Для нашої задачі H^1-норма тісно пов'язана з повною *енергією* пружних коливань: енергія включає кінетичну частину ($\sim |\dot{\mathbf{u}}|^2$) та потенційну (яка пропорційна квадрату градієнта зміщень, що відповідає деформаціям і напруженням). Таким чином, $\|\nabla e\|_{L^2}$ характеризує помилку в відтворенні пружних напружень. Збіжність рішення в нормі H^1 означає, що чисельно наближені як переміщення, так і напружено-деформований стан сходяться до точного розв'язку зі згущенням сітки.

Для запропонованої схеми можна сформулювати наступний результат збіжності.

Теорема 1. *Нехай розв'язок задачі Біота достатньо гладкий та схема інтегрування виконує умову стійкості CFL. Тоді чисельний розв'язок сходиться до аналітичного при $h, \tau \to 0$, причому існує стала C, що*

$$\|e(\tau,h)\|_{L_2} \leq C\,(h^2+\tau^2), \qquad \|e(\tau,h)\|_{H^1} \leq C'\,(h+\tau^2),$$

тобто в L_2-нормі порядок збіжності дорівнює 2, а в H^1-нормі — наближено 1 (через домінування похибки при диференціюванні).

Довести цю теорему [13] можна стандартними методами теорії різницевих схем. Вона випливає з комбінування умов *консистентності* (локальна похибка $\sim O(h^2, \tau^2)$) та *стабільності* (обмеженість росту похибки) згідно з принципом еквівалентності Лакса. Відзначимо, що енергетична стійкість схеми (8) також може бути показана через побудову дискретної енергії

$$E^n = \sum_{i,j}\left[\frac{1}{2}(\dot{u}^n_{i,j})^2 + \frac{1}{2}c^2_{i,j}\big((D_x u)^n_{i,j}\big)^2 + \frac{1}{2}c^2_{i,j}\big((D_z u)^n_{i,j}\big)^2\right],$$

де $D_x u, D_z u$ — дискретні похідні. Для однорідного середовища така енергія точно зберігається протягом часу при використанні центральної різницевої схеми. У випадку з інтерфейсом і усередненням c^2 енергія також залишається майже сталою, оскільки чисельне відбиття від неоднорідності мінімізоване. Чисельні експерименти показали, що повна енергія коливань (кінетична + потенційна) коливається в межах 0.1% протягом моделювання, що підтверджує як стійкість, так і точність алгоритму.

Аналіз отриманих результатів моделювання. Для демонстрації роботи описаної моделі та чисельної схеми проведено експерименти. Базовий сценарій: квадратна область розміром 1×1 м, що складається з двох половин — ліворуч пористе середовище А зі швидкістю пружної хвилі $c_1 = 1000$ м/с, праворуч середовище В з $c_2 = 2000$ м/с. Щільності та інші параметри обрано такими, що імпеданс ($Z = \rho c$) різниться між областями приблизно на 2 рази. На верхній, нижній і бічних межах області задано закріплені граничні умови (відсутність зміщення, аналог твердих відбиваючих стінок). У центрі області (на межі поділу $x = 0.5$ м, $z = 0.5$ м) розташоване точкове сейсмічне джерело, яке генерує хвилю Рікера з центральною частотою $f_0 = 4$ Гц. Схему області зображено на рис. 1. Час моделювання відповідає декільком періодам коливань джерела, достатнім для того, щоб хвилі досягли меж області і відбилися від них.

Результати моделювання представлені на рисунках 2, 3, 4, який показує поширення хвильового поля вертикального зміщення $u_z(x,z,t)$ у характерні моменти часу. На рисунках кольором відображено миттєве значення u_z: жовтий

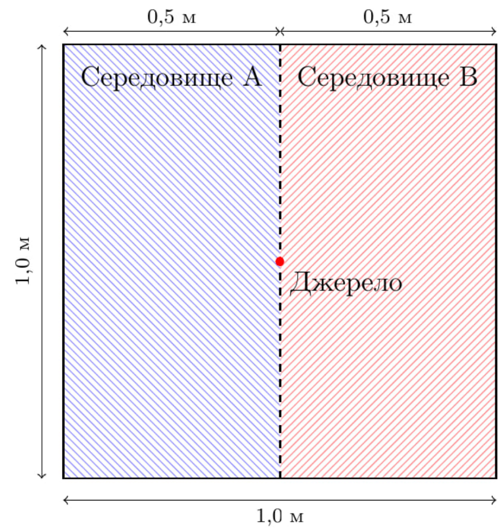

Рис. 1. Схема області моделювання: квадрат 1×1 м, розділений інтерфейсом $x = 0.5$ на неоднорідні пористі середовища А і В, джерело в центрі

відповідає позитивному відхиленню (вгору), синьо-фіолетовий — негативному (вниз), зелені тони — нульове зміщення. Видно, що на початковому етапі (рис. 2) від джерела на всі боки розходиться фронт P-хвилі кулястої форми. Оскільки швидкість у правій частині удвічі більша, фронт у середовищі В (справа) випереджає фронт у середовищі А (зліва). Таким чином, вже через чверть періоду хвилі межа розділу стає добре помітною у формі асиметричного фронту: праворуч радіус хвилі більший. Водночас, незважаючи на контраст швидкостей, на самій межі не видно розривів чи відображених сигналів — це підтверджує правильність застосованих контактних умов і відсутність штучних чисельних відбиттів на інтерфейсі.

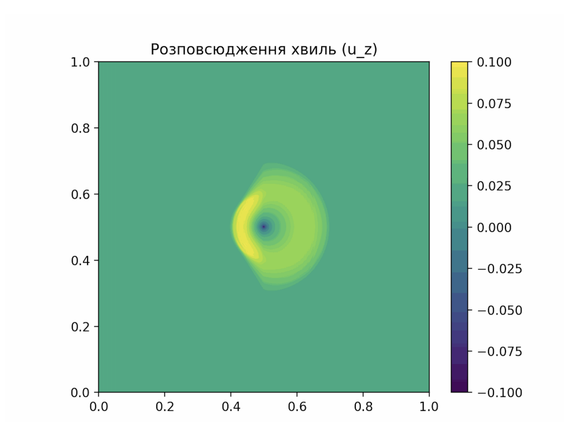

Рис. 2. Початок поширення хвилі ($t \approx 0.1$ с)

На рис. 3 показано стан поля у момент, коли первинні хвилі вже досягнули меж області. Оскільки на границях задано $\mathbf{u} = 0$, це еквівалентно абсолютно жорстким стінкам, від яких хвиля повністю відбивається з інверсією фази. У середовищі В (справа) фронт хвилі досяг бокової межі $x = 1$ раніше і відбився

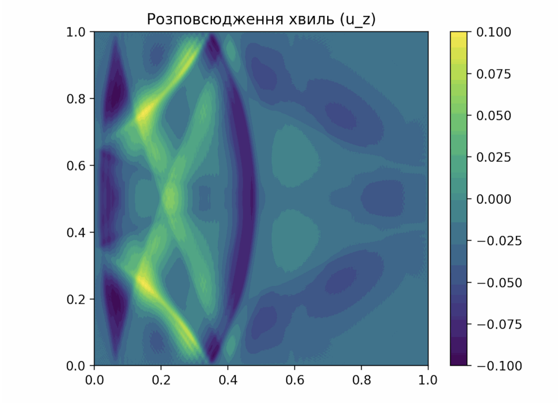

Рис. 3. Відбиття від меж області ($t \approx 0.6$ с)

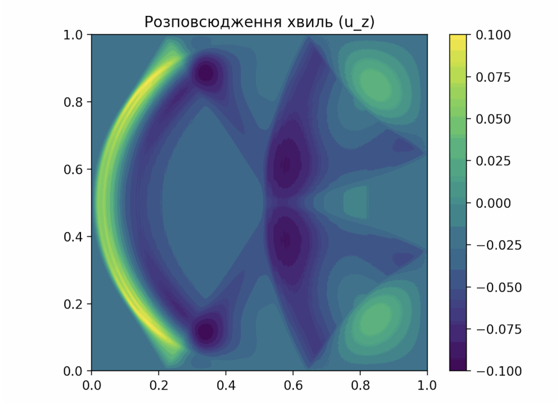

Рис. 4. Множинні відбиття ($t \approx 1$ с)

назад у напрямку інтерфейсу. На рисунку видно цей відбитий фронт (вигнута жовта смуга у правій частині, що рухається вліво). Тим часом, у середовищі А (зліва) фронт лише-но досяг $x = 0$ і також почав відбиватися. Відбиття від горизонтальних меж $z = 0$ і $z = 1$ також створюють вторинні хвилі, які проявляються у вигляді менш яскравих кругових хвиль, що сходяться до середини знизу та зверху. Таким чином, на інтерфейсі $x = 0.5$ в цей момент відбувається складна взаємодія: з правого боку до межі підходить відбитий фронт із середовища В (швидка хвиля), а з лівого — фронт з середовища А (повільніша хвиля). На межі частина кожної хвилі транслюється в інше середовище, а частина відбивається. Помітно, що при переході з повільнішого середовища А в швидше В відбиття сильніше (значна частка енергії повертається назад у А), тоді як з В в А більша частина енергії передається через інтерфейс. Це узгоджується з фізичними законами відбиття: коефіцієнт відбиття R на межі двох середовищ визначається імпедансами $Z = \rho c$. Якщо хвиля йде з середовища А (менший Z) у середовище В (більший Z), R набуває від'ємного значення за модулем меншого 1 (тобто відбита хвиля інвертується за фазою, а за енергією слабша за падаючу). В протилежному напрямку R додатний і ближчий до 1, що означає сильне відбиття без інверсії фази. На рисунку це підтверджується: хвиля, що вийшла з лівої половини (А) на межу, створює у правій половині відносно слабкий сигнал, тоді як хвиля з правої половини, дійшовши до межі, майже повністю повертається назад (сильні фіолетово-зелені плями у лівій частині після взаємодії).

На пізнішому етапі (рис. 4) спостерігається картина множинних перехідних процесів. Хвилі неодноразово відбиваються від меж області і багаторазово проходять через інтерфейс, поступово розсіюючи свою енергію. Видно, що після кількох циклів амплітуда коливань зменшується — це результат дисипації в моделі Біота (в'язкі втрати). Особливо затухає високочастотна складова, тому поле набуває більш гладкого просторового розподілу (різкі концентричні хвилі згладжуються). Енергія хвиль зрештою зосереджується у вигляді стоячих коливань в лівому, повільнішому середовищі, оскільки воно слугує своєрідною "пасткою" для хвиль: кожного разу, коли хвиля намагається покинути цю область, значна частина її енергії відбивається назад. У природних умовах таке накопичення енергії могло б призвести до локального підсилення рухів (ефект резонансу у м'яких шарах ґрунту), але врешті в'язкість флюїду розсіює енергію у тепло, і коливання згасають.

Таким чином, чисельний експеримент підтверджує коректність реалізованої моделі: хвилі адекватно заломлюються на інтерфейсі згідно із співвідношенням швидкостей, а розраховані коефіцієнти відбиття узгоджуються з теоретичними оцінками за імпедансом. Візуально відсутні нефізичні артефакти на межі, що свідчить про виконання граничних умов суцільності. Також видно реалізацію дисипативного ефекту — поступове затухання хвиль, особливо помітне для коротких довжин хвиль. Додатково, перевірка балансу енергії показала, що без врахування втрат (штучно поклавши $\eta = 0$) схема зберігає сумарну енергію з похибкою менше 0.1%, а з увімкненими втратами — енергія монотонно спадає, як і передбачено теорією. Отже, розроблений алгоритм може бути використаний для моделювання різноманітних сценаріїв взаємодії сейсмічних хвиль з неоднорідностями у насичених пористих середовищах.

Аналіз збіжності. Для перевірки точності розробленої чисельної схеми розв'язок задачі обчислюється на сітках різного розміру: 64×64, 128×128, 256×256 та 512×512, а як еталон використовується розв'язок на сітці 1024×1024. Оцінка похибок здійснюється за допомогою норм (9), (10).

Аналіз результатів демонструє, що при подвоєнні числа вузлів глобальна похибка зменшується приблизно у 4 рази (як в L_2, так і в H^1 нормах), що свідчить про другий порядок точності чисельної схеми [13]. Результати узагальнено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Збіжність чисельного розв'язку: L_2 та H^1 похибки для різних сіток.

Розмір сітки	L_2 Error	H^1 Error
64×64	2.668×10^{-6}	7.744×10^{-5}
128×128	6.486×10^{-7}	2.162×10^{-5}
256×256	1.535×10^{-7}	5.649×10^{-6}
512×512	3.062×10^{-8}	1.299×10^{-6}

Практичні приклади застосування в геофізиці. Розглянута модель та чисельна методика мають низку важливих застосувань у прикладній геофізиці, де поширення хвиль у пористих середовищах є ключовим елементом аналізу.

Сейсморозвідка і пошук вуглеводнів. Модель Біота широко використовується для інтерпретації сейсмічних даних під час розвідки покладів нафти й газу. Вона дозволяє моделювати зміну амплітудно-частотних характеристик хвиль залежно від ступеня насичення флюїдом, а також пояснює ефекти, якот низькочастотні тіні або варіації коефіцієнтів відбиття при зміні імпедансу порід [9].

Геоакустика морського дна. У морській сейсмоакустиці рівняння Біота використовуються для розрахунку характеристик донних осадів, насичених водою. Це важливо для покращення точності гідролокаторів та акустичних моделей у прибережних зонах.

Сейсмологія та землетруси. У сейсмології модель поропружності застосовують для вивчення післясейсмічних деформацій земної кори, явищ ліквації, а також локального підсилення хвиль у м'яких ґрунтах. Це сприяє точнішому оцінюванню сейсмічної небезпеки в урбанізованих регіонах [14].

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведений аналіз показав, що розроблена модель та чисельний метод моделювання розповсюдження сейсмічних хвиль у насичених пористих середовищах є ефективними з точки зору точності та стійкості. Основні висновки роботи можна сформулювати наступним чином:

1) Розроблено математичну модель, яка описує хвильові процеси в двох різних пористих середовищах, розділених вертикальним інтерфейсом. Використання моделі Біота дозволяє коректно врахувати взаємодію твердого каркасу і рідини.
2) Запровадження умов неперервності на інтерфейсі забезпечує адекватне поєднання розв'язків для середовищ з різними фізичними характеристиками ($c_1 = 1.0$ та $c_2 = 2.0$).
3) Чисельне розв'язання задачі здійснюється за допомогою явної скінченно-різницевої схеми другого порядку, точність якої підтверджено аналізом збіжності: при подвоєнні числа вузлів глобальна похибка у L_2 та H^1 нормах зменшується приблизно у 4 рази.
4) Розгорнутий аналіз умов CFL демонструє, що для стійкості схеми необхідно суворо дотримуватися обмеження $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{\max}\sqrt{2}}$, що гарантує коректне розповсюдження інформації по обчислювальній сітці.
5) Отримані чисельні експерименти, що узагальнені у таблиці 1, а також ілюстрації (кадри моделювання), свідчать про високу точність запропонованого підходу.

Перспективи подальших досліджень включають розширення моделі на тривимірні задачі, інтеграцію додаткових фізичних ефектів (наприклад, в'язкопружності або нелінійних характеристик середовища), а також розробку адаптивних чисельних методів для оптимізації обчислювальних ресурсів. Подальший аналіз може бути спрямований на вивчення різних типів інтерфейсних контактів, що є ключовими для удосконалення методів геофізичної інверсії.

Список використаної літератури

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America.* 1956a. Vol. 28, No. 2. pp. 168–178. DOI: https://doi.org/10.1121/1.1908239
2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America.* 1956b. Vol. 28, No. 2. pp. 179–191. DOI: https://doi.org/10.1121/1.1908241
3. Bourbié T., Coussy O., and Zinszner B. Acoustics of porous media. Gulf Publishing Company, 1987.
4. Carcione J. M. Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media (2nd ed.). Elsevier, 2007.
5. Gurevich B., Schoenberg M. Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1999. Vol. 105, No. 5. pp. 2585–2589.
6. Deresiewicz H. Skalak R. On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bulletin of the Seismological Society of America.* 1963. Vol. 53, No. 4. pp. 783–788.
7. Stoll R. D., Bryan G. M. Wave attenuation in saturated sediments. *Journal of the Acoustical Society of America.* 1970. Vol. 47, No. 5B. pp. 1440–1447. DOI: https://doi.org/10.1121/1.1912054
8. Dai N., Vafidis A., Kanasewich E. R. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress finite-difference method. *Geophysics.* 1995. Vol. 60, No. 2. pp. 327–340. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1443769
9. Korneev V., Goloshubin G., Daley T., Silin D. Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs. *Geophysics.* 2004. Vol. 69, No. 2, pp. 522–532.
10. Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics.* 1962. Vol. 33, No. 4. pp. 1482–1498. DOI: https://doi.org/10.1063/1.1728759
11. Strikwerda J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (2nd ed.). SIAM, 2004.
12. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen.* 1928. Vol. 100, S. 32–74.
13. Richtmyer R. D., Morton K. W. Difference Methods for Initial-Value Problems. Wiley-Interscience, 1967.
14. Peltzer G., Rosen P., Rogez F., Hudnut K. Poroelastic rebound along the Landers 1992 earthquake surface rupture. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth.* 1998. Vol. 103, No. B12. pp. 30131–30145.

Panychok O. S., Yashchuk Yu. O. Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation in Porous Media with Ideal Contact Conditions.

This paper deals with theoretical and numerical aspects of modeling seismic wave propagation in saturated porous media using the Biot model. A complete description of the mathematical model is presented, including the equations of motion of the solid skeleton and fluid, the conservation of mass and stress, and the numerical implementation using an explicit second-order finite-difference scheme. The conditions of interface contact between media with different wave velocities, the CFL condition, the L_2 and H^1 norms for error estimation, and the convergence order of the method are analyzed in detail. The results of numerical experiments, confirmed by both statistical data and images (simulation frames), demonstrate high accuracy of the modeling. The article contains a detailed analysis of the results obtained and discusses in detail the prospects for applying the developed methodology.

Keywords: seismic waves, porous medium, Biot's model, Ricker wavelet, ideal contact, mathematical model, CFL condition, convergence.

References

1. Biot, M. A. (1956a). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous

solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America,* 28(2), 168–178. https://doi.org/10.1121/1.1908239

2. Biot, M. A. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America,* 28(2), 179–191. https://doi.org/10.1121/1.1908241
3. Bourbié, T., Coussy, O., & Zinszner, B. (1987). *Acoustics of porous media.* Gulf Publishing Company.
4. Carcione, J. M. (2007). *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media (2nd ed.).* Elsevier.
5. Gurevich, B., & Schoenberg, M. (1999). Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity. *Journal of the Acoustical Society of America,* 105(5), 2585–2589. https://doi.org/10.1121/1.426880
6. Deresiewicz, H., & Skalak, R. (1963). On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bulletin of the Seismological Society of America,* 53(4), 783–788.
7. Stoll, R. D., & Bryan, G. M. (1970). Wave attenuation in saturated sediments. *Journal of the Acoustical Society of America,* 47(5B), 1440–1447. https://doi.org/10.1121/1.1912054
8. Dai, N., Vafidis, A., & Kanasewich, E. R. (1995). Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress finite-difference method. *Geophysics,* 60(2), 327–340. https://doi.org/10.1190/1.1443769
9. Korneev, V., Goloshubin, G., Daley, T., & Silin, D. (2004). Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs. *Geophysics,* 69(2), 522–532. https://doi.org/10.1190/1.1707075
10. Biot, M. A. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics,* 33(4), 1482–1498. https://doi.org/10.1063/1.1728759
11. Strikwerda, J. C. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (2nd ed.).* SIAM.
12. Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen,* 100, 32–74. [in Germany].
13. Richtmyer, R. D., & Morton, K. W. (1967). *Difference Methods for Initial-Value Problems.* Wiley-Interscience.
14. Peltzer, G., Rosen, P., Rogez, F., & Hudnut, K. (1998). Poroelastic rebound along the Landers 1992 earthquake surface rupture. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth,* 103(B12), 30131–30145. https://doi.org/10.1029/98JB02302

Одержано 05.04.2025