

УДК 517.95

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).18-25](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).18-25)**В. В. Кириченко¹, Є. В. Лесіна²**

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України,
доцент кафедри комп'ютерних наук, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
v.kyrychenko@nubip.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2387-2261>

² Донецький національний технічний університет,
доцент кафедри вищої математики і фізики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
eugenia.lesina@donntu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9803-6727>**ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КУТІ НА ПЛОЩИНІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З НЕОДНОРІДНИМ ОПЕРАТОРНИМ СИМВОЛОМ**

В роботі розглядається перша крайова задача для диференціального рівняння другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та неоднорідним операторним символом у куті на площині. Отримано необхідну та достатню умову єдиності розв'язку зазначеної задачі у просторі C^2 з поліноміальним зростанням на нескінченності.

Ключові слова: безтипне рівняння, кутова точка, диференціальний оператор, неоднорідний символ, простір Шварца.

1. Вступ. Крайові задачі з кутовими точками є об'єктом дослідження багатьох фахівців понад півстоліття. В роботі [1], яка є фундаментальною у даному напрямку, вивчається загальна крайова задача для еліптичного рівняння в області зі скінченною кількістю кінцевих точок на межі. Випадок першої крайової задачі розглядався в публікаціях [2], [3], [4], [5], [6], де теж отримано результати, важливі для аналізу задач з кутовими та кінцевими точками.

Серед питань, що постають при обговоренні коректності певної крайової задачі, істотним є питання порушення єдиності її розв'язку. Водночас на окрему увагу заслуговують задачі для безтипних рівнянь з частинними похідними. Принцип двоїстості рівняння-область [7], покладений в основу доведення критерію існування нетривіального розв'язку, застосовувався попередньо одним із авторів при дослідженні задачі Діріхле у крузі для безтипного диференціального рівняння другого порядку з комутуючими матричними коефіцієнтами [8]. Необхідну і достатню умову було записано у вигляді рівності нулю визначника, що залежав від коефіцієнтів рівняння. Подібний ефект спостерігається в статті [9], де сформульовано критерій однозначної розв'язності однорідної крайової задачі з однією умовою для безтипного диференціального рівняння в багатокутнику.

Дану роботу присвячено вивченню питання єдиності розв'язку задачі Діріхле у куті для також безтипного рівняння другого порядку з неоднорідним символом та комплексними коефіцієнтами. Отримано необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку у просторах функцій помірною зростання для деякого класу диференціальних рівнянь, пов'язаного із заданим кутом. Метод дослідження полягає в тому, що, зсуваючи початковий символ на деякий вектор,

що належить трубчастій області у $\mathbb{C}^2$, яка залежить від кута, ми приходимо до диференціального оператора з однорідним символом і до отриманої в такий спосіб граничної задачі застосовуємо метод двоїстості рівняння-область ([7]). Цим зсувом ми долаємо труднощі, пов'язані з відсутністю локальної аналітичності перетворення Фур'є продовження нулем розв'язку задачі на всю площину.

2. Постановка задачі. Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

для рівняння другого порядку

$$\tilde{L}u = L\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)u = (a^1 \cdot (\nabla + \lambda))(a^2 \cdot (\nabla + \lambda))u = 0, \quad (2)$$

в куті Ω (див. рис. 1), де $a^1, a^2, \lambda \in \mathbb{C}^2$ — сталі комплексні вектори, причому вектори a^1, a^2 — довільні, а вибір $\lambda \in T^C \in \mathbb{C}^2$ визначається множиною T^C , яка залежить від кута. Нехай прямі, що обмежують даний кут і проходять через початок координат, описуються рівняннями $(b^1 \cdot x) = 0, (b^2 \cdot x) = 0$ відповідно, де $b^1 = (b_1^1, b_2^1), b^2 = (b_1^2, b_2^2)$ — нормальні вектори до прямих, а $\tilde{b}^1 = (-b_2^1, b_1^1), \tilde{b}^2 = (-b_2^2, b_1^2)$ — твірні.

Зазначимо, що умови на нескінченності ми обираємо належністю розв'язку простору Шварца S' [10] і що неоднорідний символ $\tilde{l}(\xi)$ диференціального оператора $\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ стає однорідним після зсуву на вектор λ :

$$\tilde{l}(\xi - \lambda) = l(\eta) = a\eta_1^2 + b\eta_1\eta_2 + c\eta_2^2.$$

Можна вважати, що a, b, c — довільні комплексні числа. Отриманий однорідний символ $l(\eta)$ відповідає диференціальному оператору

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla).$$

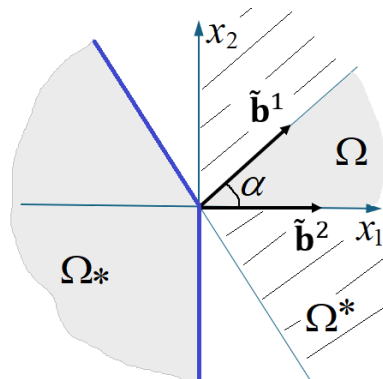


Рис. 1

Зупинимось докладніше на виборі вектору λ . Кут Ω є окремим випадком опуклого гострого конуса з вершиною в нулі. Будемо розглядати також спряжений

конус Ω^* , твірними якого є перпендикуляри, проведені до твірних вихідного конуса Ω . Ω^* — замкнутий опуклий конус з вершиною в нулі. Нехай $\Omega_* = -\Omega^*$ та $C = \text{int } \Omega_*$, $C \neq \emptyset$, — відкритий опуклий конус. Через T^C позначимо трубчасту область в $\mathbb{C}^2$ з основою C :

$$T^C = \mathbb{R}^2 + iC = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^2, y \in C\}.$$

Зауважимо: якщо

$$\lambda = (\mu_1, \nu_1) + i(\mu_2, \nu_2), \quad \text{де } (\mu_1, \nu_1) \in \mathbb{R}^2, (\mu_2, \nu_2) \in C,$$

то, виходячи з обраного нами кута Ω і побудованих за ним конусів Ω^* і Ω_* , робимо висновок, що компоненти μ_1, ν_1 довільні, а μ_2, ν_2 мають бути такими, щоб кут $\arctg \frac{\nu_2}{\mu_2}$ пробігав сектор Ω_* (див. рис. 1).

3. Основний результат. Наведена нижче теорема дає відповідь на питання, за яких умов порушується єдиність розв'язку задачі Діріхле (1), (2).

Теорема 1. *Для того, щоб задача (1), (2) мала нетривіальний розв'язок $u(x)$ у просторі $C^2(\overline{\Omega})$ з поліноміальним зростанням на нескінченності, необхідно і достатньо, щоб при деякому натуральному n виконувалась рівність*

$$\Delta_n = \left| \begin{pmatrix} \tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1 \\ \tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1 \\ \tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2 \end{pmatrix}^n \right| = 0. \quad (3)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap S'_\Omega$ — деякий нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), де $S'_\Omega = \{\omega \in S' | \text{supp } \omega \in \overline{\Omega}\}$, $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap S'$ — будь-яке його продовження на весь простір $\mathbb{R}^2$. Помічаючи, що символ

$$\tilde{l}(\xi) = l(\eta + \lambda) = l(\eta) + (2a\lambda_1 + b\lambda_2)\eta_1 + (b\lambda_1 + 2c\lambda_2)\eta_2 + l(\lambda),$$

представимо оператор $\tilde{L}$ у вигляді суми $\tilde{L} = L + L_{(1)} + L_{(0)}$ трьох операторів, перший з яких збігається з однорідним диференціальним оператором L , другий $L_{(1)}$ містить лише перші похідні за змінними x_1 і x_2 , а останній $L_{(0)}$ — константа. Тепер подіємо оператором $\tilde{L}$ на добуток $\tilde{u} \cdot \theta_\Omega$, де θ_Ω — характеристична функція кута:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) &= \\ &= (L + L_{(1)} + L_{(0)})(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = L(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) + (L_{(1)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) + \\ &+ (L_{(0)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega = (L\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + (L_{(1)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \\ &+ \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) + (L_{(0)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega = [(L + L_{(1)} + L_{(0)})\tilde{u}] \cdot \theta_\Omega + \\ &+ \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) = \\ &= (\tilde{L}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega). \end{aligned}$$

Тут $\delta_{\partial\Omega}$ — міра, зосереджена на межі кута, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\tau} = 0$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\nu} = -\delta_{\partial\Omega}$. Відмітимо, що оскільки $\tilde{L}\tilde{u} = 0$ всередині кута Ω , то перший доданок у сумі анулюється. Що стосується третього і четвертого доданків, то обидва вони зводяться до форми,

подібної виду другого доданку (це випливає з формули $\psi\delta' = -\psi'\delta$ за умови, що $\psi(0) = 0$). Таким чином, маємо:

$$\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = M_{(1)}\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega}, \quad (4)$$

де $M_{(1)}$ — диференціальний оператор першого порядку.

Помножимо отриману рівність (4) на добуток поліномів, що стоять у лівих частинах рівнянь прямих, які обмежують кут Ω :

$$(b^1 \cdot x)(b^2 \cdot x)\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = 0. \quad (5)$$

Застосуємо до рівності (5) перетворення Фур'є:

$$(b^1 \cdot \nabla_\xi)(b^2 \cdot \nabla_\xi) \left[\tilde{l}(\xi) \left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi) \right) \right] = 0. \quad (6)$$

Оскільки функція $\tilde{u}\theta_\Omega(x)$ має носій у куті Ω , то в нулі її перетворення Фур'є $\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi)$ не буде аналітичною функцією. Однак, здійснивши зсув в рівності (6) на вектор λ , вибір якого описаний вище, ми потрапляємо в трубчасту область T^C , де перетворення Фур'є $\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi - \lambda)$ є функцією, аналітичною в околі нуля (див. [6]). Таким чином, матимемо:

$$(b^1 \cdot \nabla_\xi)(b^2 \cdot \nabla_\xi) \left[\tilde{l}(\xi - \lambda) \left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi - \lambda) \right) \right] = 0,$$

звідки, з урахуванням того, що $\xi - \lambda = \eta$, отримаємо:

$$(b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) \left[l(\eta) \left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\eta) \right) \right] = 0. \quad (7)$$

Символ $l(\eta)$ у виразі (7) є однорідним, а аналітичну за змінною η в T^C функцію $v(\eta) = \widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\eta)$ можна розкласти у збіжний ряд в околі нуля:

$$v(\eta) = v_0(\eta) + v_1(\eta) + v_2(\eta) + \dots + v_n(\eta) + \dots$$

При цьому, виходячи з виразу (7), робимо висновок, що для однорідної молодшої частини $v_N(\eta)$ степеня N у зазначеному розкладі справедлива рівність:

$$(b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) [l(\eta)v_N(\eta)] = 0. \quad (8)$$

Позначимо через $w_n(\eta) = l(\eta)v_N(\eta)$ однорідний поліном степеня $n = N + 2$. Оскільки оператори $(b^1 \cdot \nabla_\eta)$ і $(b^2 \cdot \nabla_\eta)$ комутуючі, розв'язок рівняння (8) представимо у вигляді суми двох функцій:

$$w_n(\eta) = w_n^1(\tilde{b}^1 \cdot \eta) + w_n^2(\tilde{b}^2 \cdot \eta) = \alpha_n(\tilde{b}^1 \cdot \eta)^n + \beta_n(\tilde{b}^2 \cdot \eta)^n$$

з деякими коефіцієнтами α_n , β_n , причому функції w_n^1 і w_n^2 обираються таким чином, щоб задовольнити рівняння (8).

Враховуючи, що $w_n(\eta) = l(\eta)v_N(\eta)$, отримуємо очевидне співвідношення:

$$w_n(\eta)|_{l(\eta)=0} = 0,$$

яке відображає рівність нулю функції w_n на множині нулів символу. Оскільки однорідний символ $l(\eta) = (a^1 \cdot \eta)(a^2 \cdot \eta)$, то, по чергово надаючи змінній η значення $\tilde{a}^1$ і $\tilde{a}^2$ і використовуючи ортогональність векторів a^j і $\tilde{a}^j$, одержимо лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих α_n, β_n

$$\begin{cases} \alpha_n \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n = 0, \\ \alpha_n \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

з визначником

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n & \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n \\ \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n & \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n \end{vmatrix}.$$

В силу двоїстості рівняння-область (під якою розуміється відповідність між крайовою задачею (1), (2) і рівнянням (8), доведену у книзі [6]) та нашого припущення про існування нетривіального розв'язку $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap S'$ вихідної задачі, робимо висновок, що існує нетривіальний розв'язок двоїстої задачі

$$\begin{cases} (b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) w_n(\eta) = 0, \\ w_n(\eta)|_{l(\eta)=0} = 0, \end{cases}$$

в класі однорідних поліномів степеня $n \geq 2$. Звідси випливає, що за такого значення n знайдеться ненульовий набір коефіцієнтів (α_n, β_n) , який є розв'язком системи (9), що тягне за собою виконання рівності $\Delta_n = 0$. Необхідність доведено.

Достатність. Побудуємо нетривіальний розв'язок задачі Діріхле (1), (2), припустивши виконання рівності (3) для деякого натурального n . Покладемо

$$u(x) = e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) = e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \cdot v(x), \quad \text{де } \lambda \in T^C.$$

Легко переконатися, що

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(-\lambda_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \right) v \cdot e^{-(\lambda \cdot x)},$$

звідки

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i \right) u = \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}, \quad i = 1, 2.$$

Крім того,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\lambda_i^2 v(x) - 2\lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right) \cdot e^{-(\lambda \cdot x)},$$

тому

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i \right)^2 \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \\ & = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2\lambda_i + \lambda_i^2 \right) \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}, \\ & \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_2 \right) \right] \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 \lambda_2 \right] \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}.$$

З урахуванням проведених обчислень отримаємо:

$$\tilde{L}u = L \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \right) u = L \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v \cdot e^{-(\lambda \cdot x)} = 0. \quad (10)$$

Наслідком рівності (10) є рівняння $Lv = 0$ з диференціальним оператором $L = (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)$, якому відповідає однорідний символ $l(\eta) = (a^1 \cdot \eta)(a^2 \cdot \eta)$. Оскільки будь-який поліноміальний розв'язок рівняння $Lv = 0$ можна записати у вигляді

$$v(x) = v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) + v_2(\tilde{a}^2 \cdot x),$$

то, очевидно,

$$u(x) = [v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) + v_2(\tilde{a}^2 \cdot x)] \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}.$$

Доданки v_1 і v_2 необхідно підібрати таким чином, щоб функція u , окрім рівняння (2), задовольняла граничну умову Діріхле за деякого ненульового набору сталих величин (α_n, β_n) :

$$v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) = \alpha_n \cdot (\tilde{a}_1 \cdot x)^n; \quad v_2(\tilde{a}^2 \cdot x) = \beta_n \cdot (\tilde{a}_2 \cdot x)^n.$$

Зауважимо, що отримана функція

$$u(x) = [\alpha_n \cdot (\tilde{a}_1 \cdot x)^n + \beta_n \cdot (\tilde{a}_2 \cdot x)^n] \cdot e^{-(\lambda \cdot x)} \quad (11)$$

буде задовольняти крайову умову (1), якщо $x = \tilde{b}^1$ або $x = \tilde{b}^2$ (це пов'язано з розташуванням сторін кута Ω на прямих $(b^1 \cdot x) = 0$ та $(b^2 \cdot x) = 0$). Підставляючи у вираз (11) замість x вказані значення, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \left[\alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n \right] \cdot e^{-(\lambda \cdot \tilde{b}^1)} = 0, \\ \left[\alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n \right] \cdot e^{-(\lambda \cdot \tilde{b}^2)} = 0, \end{cases}$$

яка рівносильна наступній:

$$\begin{cases} \alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n = 0, \\ \alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Оскільки визначник однорідної системи (12) дорівнює нулю за припущенням, ця система має нескінченну кількість ненульових розв'язків. Отже, набори констант (α_n, β_n) є нетривіальними, що означає нетривіальність побудованого розв'язку (11) задачі (1), (2). Достатність доведено.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Роботу присвячено дослідженню питання порушення єдиності розв'язку першої крайової задачі у куті для безтипового диференціального рівняння другого порядку з неоднорідним символом та комплексними коефіцієнтами. Отримано критерій однозначної розв'язності задачі Діріхле у просторі функцій помірною зростання для певного класу рівнянь, пов'язаного із заданою кутовою областю.

Проблема, що постає, полягає у відсутності локальної аналітичності перетворення Фур'є продовження нулем розв'язку задачі на всю площину. За допомогою зсуву початкового символу на деякий вектор, який належить трубчастій області у $\mathbb{C}^2$, ми одержуємо диференціальний оператор з однорідним символом і до отриманої в такий спосіб граничної задачі застосовуємо метод двоїстості рівняння-область.

Список використаної літератури

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. *Тр. Московского мат. о-ва*. 1967. вып. 16. С. 209–292.
2. Фуфаев В. В. К задаче Дирихле для областей с углами. *Докл. АН СССР*. 1960. вып. 131, № 1. С. 37–39.
3. Волков Е. А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике. *Докл. АН*. 1963. вып. 147, № 1. С. 13–16.
4. Джафаров Р. М. Весовые априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой. *Труды ИПММ НАН Украины* 1998. Т 2. С. 55–63.
5. Коваленко О. В. Априорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі в області з кінечною точкою. *Вісник КНУ. Математика. Механіка*. 2005. Вип. 13. С. 25–29.
6. Романенко І. Розв'язність задачі Діріхле зі сталими коефіцієнтами в області з кутовою точкою. *Вісник КНУ. Математика. Механіка*. 2009. Вип. 21. С. 13–20.
7. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 2002. 316 с.
8. Лесіна Є. В. Про задачу Діріхле для диференціального рівняння з комутуючими матричними коефіцієнтами. *Вісник КНУ. Математика. Механіка*. 2015. Вип. 33. С. 32–37.
9. Кириченко В. В., Лесіна Є. В. Про порушення єдиності розв'язку крайової задачі в багатокутнику. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 60–68.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике Москва : Наука, 1979. 320 с.

Kyrychenko V. V., Lesina E. V. On the solution uniqueness of the Dirichle problem in an angle on the plane for a differential equation with a non-homogeneous operator symbol.

The paper considers the first boundary value problem for a second-order differential equation with constant complex coefficients and a non-homogeneous operator symbol in a corner on the plane. A necessary and sufficient condition for the uniqueness of the solution of the problem in the space C^2 with polynomial growth at infinity is obtained.

Keywords: typeless equation, corner point, differential operator, inhomogeneous symbol, Schwarz space.

References

1. Kondratiev, V. A. (1967). Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angle points. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 16, 209–292 [in Russian].
2. Fufayev, V. V. (1960). On the Dirichlet problem for domains with angles. *Reports of the Academy of Sciences*, 131(1), 37–39 [in Russian].
3. Volkov, E. A. (1963). On the solution of boundary value problems for the Poisson equation in a rectangle. *Reports of the Academy of Sciences*, 147(1), 13–16 [in Russian].
4. Dzhaferov, R. M. (1998). Weighted a priori estimates for the solution of the quasilinear Dirichlet problem in a domain with a conical point. *Proceedings of the IPMM NAS of Ukraine*, 2, 55–63 [in Russian].
5. Kovalenko, O. V. (2005). A priori estimate for the solution of a linear elliptic boundary value problem in a domain with an end point. *News of KNU. Mathematics. Mechanics*, 13, 25–29 [in Ukrainian].

6. Romanenko, I. (2009). The relationship between the Dirichlet problem and the steel coefficients in the region with a cut-off point. *News of KNU. Mathematics. Mechanics*, 21, 13–20 [in Ukrainian].
7. Burskii, V. P. (2002). *Methods for studying boundary value problems for general differential equations*. Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
8. Lesina, E. V. (2015). On the Dirichlet problem for differential equation with commuting matrix coefficients. *News of KNU. Mathematics. Mechanics*, 33, 32–37 [in Ukrainian].
9. Kirichenko, V. V., & Lesina, E. V. (2022). On the uniqueness violation of boundary value problem in polygon. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series "Mathematics and Informatics"*, 40(1), 60–68 [in Ukrainian].
10. Vladymyrov, V. S. (1979). *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow: Nauka [in Russian].

Одержано 10.04.2025