

УДК 519.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).209-217](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).209-217)**О. І. Кузка¹, І. В. Корник², В. М. Дуран³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.kuzka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7556-3057>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
ivan.kornyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8679-1630>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
valentya.duran@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6409-3061>

ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАПИТІВ ОДНИМ ПРИЛАДОМ

Розглядається один клас детермінованих задач теорії розкладів, а саме, задача впорядкування процесу обслуговування запитів, які не одночасно надходять в систему. Структура системи обслуговування дозволяє сформулювати допоміжну симетричну задачу. Доведено теореми, на основі яких побудовано ітеративний алгоритм, що по чергово аналізує пару симетричних задач та дозволяє зафіксувати послідовність обслуговування частини вимог і зменшити розмірність початкової задачі.

Ключові слова: теорія розкладів, оптимізація обслуговування, симетричні задачі, запит(вимога), активний розклад, перестановочний розклад, список пріоритетів.

1. Вступ. Розглянемо багато стадійну задачу обслуговування, яка містить «вузьке місце», організація обслуговування на якому і визначає ефективність всієї системи. В такому випадку процес виконання запитів (вимог) в системі обслуговування умовно можна розділити на три етапи: підготовчий, основний і заключний, причому на підготовчому і заключному етапах виконуються певні фіксовані операції, які мають фіксовану тривалість, не пов'язані з залученням до їх виконання основних виконавців і тому не можуть бути використані для оптимізації обслуговування. Прикладом таких систем можуть бути системи, де запити на обслуговування надходять не одночасно, а після обслуговування необхідна певна затримка до моменту, коли замовлення вважатиметься виконаним остаточно (тестування якості роботи, висихання після фарбування, доставка замовнику тощо).

В літературі по теорії розкладів задачі оптимізації обслуговування в одностадійних системах досліджуються, як правило, при одночасному надходженні запитів [1–7], а при неодночасному надходженні запитів вивчені недостатньо. Критерії оптимізації пов'язані з директивними строками чи їх порушенням [3,7], або мінімізують час завершення роботи основних приладів і, в основному, не враховують затримку після завершення основного етапу [3–6].

2. Модель задачі. Будемо вважати, що в розглядуваній тут задачі запити незалежні між собою і відомі всі часові параметри пов'язані з обслуговуванням

запитів, на основному етапі («вузьке місце» системи) обслуговування здійснюється одним приладом S . Отже розглядається детермінована задача оптимізації обслуговування скінченної кількості незалежних запитів одним приладом S .

Запити повністю характеризуються наступними параметрами:

$p_i, i = 1, 2, \dots, n$ — час надходження i -го запиту до пристрою S (далі вважаємо, що запити пронумеровані за порядком, а n — загальна кількість запитів);

$t_i, i = 1, 2, \dots, n$ — час обробки i -го запиту приладом S ;

$q_i, i = 1, 2, \dots, n$ — час додаткового обслуговування i -го запиту в системі після обслуговування приладом S .

В системі одночасно може обслуговуватися довільна кількість запитів, але тільки один запит може обслуговуватися пристроєм S в кожен момент часу. При цьому перерви в обслуговуванні будь-якого запиту пристроєм S не допускаються. Вважається, що пристрої системи обслуговування не виходять з ладу, а перехід від обслуговування одного запиту до іншого відбувається миттєво.

При складанні розкладу обслуговування запитів необхідно мінімізувати час завершення обслуговування всіх запитів у системі, тобто мінімізувати функцію:

$$F(X) = \max \left\{ x_i + t_i + q_i \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (1)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а x_i — час початку обробки i -го запиту приладом S . Вектор X надалі називатимемо розкладом обслуговування запитів.

Означення 1. *Активним називається розклад, в якому неможливо прискорити виконання жодного запиту і не збільшити, при цьому, час завершення обслуговування інших запитів.*

Зауваження 1. *Очевидно, що оптимальні по критерію (1) розклади можна шукати на множині активних розкладів.*

Означення 2. *Перестановочним називається розклад, в якому послідовність обслуговування запитів визначається перестановкою індексів робіт.*

Зауваження 2. ([1–3]) *Існує оптимальний по критерію (1) розклад, який належить до класу активних перестановочних розкладів.*

Таким чином, для кожної перестановки $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ час початку обслуговування запитів пристроєм S визначається відповідним активним перестановочним розкладом $X^\tau = (x_1^\tau, x_2^\tau, \dots, x_n^\tau)$ [3], де

$$x_{\tau_i}^\tau = \begin{cases} p_{\tau_1}, & i = 1 \\ \max(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i-1}} + t_{\tau_{i-1}}), & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Визначимо моменти завершення обслуговування запитів пристроєм S :

$$\bar{x}_i^\tau = x_i^\tau + t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

і в системі:

$$\bar{\bar{x}}_i^\tau = \bar{x}_i^\tau + q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Враховавши рекурсивність формул (2), час завершення обслуговування запитів у системі можна записати у вигляді:

$$\bar{\bar{x}}_{\tau_i}^\tau = \max \left\{ p_{\tau_j} + \sum_{k=j}^i t_{\tau_k} + q_{\tau_i} \mid j = 1, 2, \dots, i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

3. Симетричні задачі. Сформульовану вище задачу позначимо як $Z_n(p, t, q)$. Поряд з задачею $Z_n(p, t, q)$ розглянемо задачу $Z_n(q, t, p)$ тобто задачу, в якій запити надходять у моменти часу q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а час додаткового обслуговування i -го запиту в системі після обслуговування приладом S визначається величинами p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Задачі $Z_n(p, t, q)$ і $Z_n(q, t, p)$ будемо називати симетричними.

Теорема 1. Нехай $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, а $\theta = (\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1)$. Якщо X^τ та Y^θ — розклади обслуговування запитів симетричних задач $Z_n(p, t, q)$ та $Z_n(q, t, p)$ відповідно, то моменти часу завершення обслуговування запитів (1) у розкладах X^τ та Y^θ співпадають.

Доведення. Розглянемо розклад X^τ обслуговування запитів для задачі $Z_n(p, t, q)$, де $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

Визначимо значення критерію (1) для розкладу X^τ з врахуванням (2)–(5):

$$\begin{aligned} F(X^\tau) &= \max \left\{ x_{\tau_i} + t_{\tau_i} + q_{\tau_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \max \left\{ \bar{x}_{\tau_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= \max \left\{ p_{\tau_j} + \sum_{k=j}^i t_{\tau_k} + q_{\tau_i} \mid j \leq i, \quad j, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Розглянемо розклад Y^θ обслуговування запитів у задачі $Z_n(q, t, p)$ та обчислимо

$$F(Y^\theta) = \max \left\{ q_{\tau_j} + \sum_{k=i}^j t_{\tau_k} + p_{\tau_i} \mid j \geq i, \quad j, i = n, n-1, \dots, 1 \right\}. \quad (7)$$

Очевидно, що значення критеріїв (6) та (7) співпадають, тобто для будь якого розкладу X^τ (в тому числі і оптимального) задачі $Z_n(p, t, q)$ існує розклад обслуговування запитів Y^θ для симетричної задачі $Z_n(q, t, p)$ такий, що $F(X^\tau) = F(Y^\theta)$. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо розклад X^τ , $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, є оптимальним для задачі $Z_n(p, t, q)$ то розклад Y^θ , $\theta = (\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1)$ буде оптимальним для задачі $Z_n(q, t, p)$.

4. Розклад, побудований за допомогою списку пріоритетів [3]. Нехай для вимог певним чином визначені пріоритети. Побудуємо перестановку індексів вимог $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ в порядку не зростання пріоритетів, яку надалі будемо називати списком пріоритетів σ .

Розклад X^τ , $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ за допомогою списку σ будується наступним чином:

1. Готуємо впорядкований список пріоритетів $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ та множину не обслугованих вимог $N^1 = \{1, 2, \dots, n\}$. Покладаємо $k = 1$;
2. Визначаємо момент часу початку обслуговування k -ої по порядку вимоги τ_k приладом S : $\rho^k = \min \left\{ p_i \mid i \in N^k \right\}$;
3. Обираємо для обслуговування зі списку σ першу (найбільш пріоритетну) не обслуговану вимогу ν , для якої $p_\nu \leq \rho^k$, тобто, готову до обслуговування;

4. Включаємо ν наступним елементом в перестановку τ , тобто $\tau_k = \nu$, визначаємо моменти часу:

- $x_\nu = \rho^k$ — початку обслуговування вимоги ν приладом S ;
- $\bar{x}_\nu = x_\nu + t_\nu$ — завершення обслуговування вимоги ν приладом S ;

та $N^{k+1} = N^k \setminus \{\nu\}$ — виключаємо вимогу ν з множини не обслугованих вимог приладом S ;

5. Якщо $N^{k+1} = \emptyset$ то побудова розкладу X^τ завершена, інакше визначаємо $\rho^{k+1} = \max(\bar{x}_\nu, \min\{p_i \mid i \in N^{k+1}\})$ — момент часу початку обслуговування наступної вимоги приладом S , збільшуємо k на 1 та переходимо до виконання пункту 3 для продовження побудови розкладу X^τ .

Нехай пріоритет вимоги з індексом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ співпадає з відповідним значенням q_i . Тоді список пріоритетів $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ задовільняє умову

$$q_{\sigma_i} \geq q_{\sigma_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Теорема 2. Якщо для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ виконуються умови (8) і

$$p_{\sigma_i} \leq p_{\sigma_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9)$$

то розклад, побудований за допомогою списку σ — оптимальний по критерію (1).

Доведення. Якщо виконується (9), то для розкладу X^τ , побудованого за допомогою списку σ виконується $\tau = \sigma$, тобто $X^\tau = X^\sigma$. Нехай X^π — оптимальний розклад і $\pi \neq \sigma$. Визначимо найменше $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, для якого $\pi_i \neq \sigma_i$, та $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$, для якого $\pi_j = \sigma_i$. Розглянемо перестановку

$$\mu = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}, \pi_j, \pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n),$$

в якій, на відміну від π прискорено обслуговування вимоги π_j , а взаємна послідовність інших вимог не змінюється. Тоді, якщо мають місце (8) і (9), то

$$q_{\pi_j} = \max \left\{ q_{\pi_k} \mid k = i+1, i+2, \dots, n \right\}, \quad (10)$$

$$p_{\pi_j} = \min \left\{ p_{\pi_k} \mid k = i+1, i+2, \dots, n \right\}. \quad (11)$$

З (1), (3), (4) для перестановочних розкладів маємо

$$F(X^\tau) = \max \left(F_1^\tau, F_2^\tau, \bar{x}_{\pi_j}^\tau + q_{\pi_j}, F_3^\tau \right), \quad (12)$$

де

$$F_1^\tau = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\tau \mid k = 1, 2, \dots, i-1 \right\},$$

$$F_2^\tau = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\tau + q_{\pi_k} \mid k = i, i+1, \dots, j-1 \right\},$$

$$F_3^\tau = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\tau + q_{\pi_k} \mid k = j+1, j+2, \dots, n \right\}.$$

Порівнюємо значення критерію (1) для X^π і X^μ . З (12) отримаємо

$$\begin{aligned} F(X^\pi) &= \max \left(F_1^\pi, F_2^\pi, \bar{x}_{\pi_j}^\pi + q_{\pi_j}, F_3^\pi \right), \\ F(X^\mu) &= \max \left(F_1^\mu, \bar{x}_{\pi_j}^\mu + q_{\pi_j}, F_2^\mu, F_3^\mu \right), \end{aligned} \quad (13)$$

при чому $F_1^\pi = F_1^\mu$, $\bar{x}_{\pi_j}^\pi > \bar{x}_{\pi_j}^\mu$. З (11) видно, що обслуговування вимог $\pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}$ в розкладі X^μ сповільниться відносно часу їх обслуговування в розкладі X^π на величину t_{π_j} , якщо прилад S в розкладі X^π на проміжку $[x_{\pi_{i-1}}^\pi, x_{\pi_j}^\pi]$ працює без простоїв. Якщо ж на цьому проміжку мають місце простой приладу S в розкладі X^π , то сповільнення часу обслуговування деяких вимог з $\{\pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}\}$ в розкладі X^μ буде меншим величини t_{π_j} відносно розкладу X^π (або взагалі відсутнім), а обслуговування вимог $\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n$ в розкладі X^μ , для яких $x_{\pi_k}^\pi > p_{\pi_k}$, $k = j+1, j+2, \dots, n$, буде прискорено. Отже

$$\bar{x}_{\pi_j}^\pi = x_{\pi_j}^\pi + t_{\pi_j} \geq \bar{x}_{\pi_k}^\pi + t_{\pi_j} \geq \bar{x}_{\pi_k}^\mu, \quad k = i, i+1, \dots, j-1, \quad (14)$$

і $F_3^\pi \geq F_3^\mu$. З (10), (12)–(14) отримаємо

$$\bar{x}_{\pi_j}^\pi + q_{\pi_j} \geq F_2^\pi + t_{\pi_j} = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\pi + q_{\pi_k} \mid k = i, i+1, \dots, j-1 \right\} + t_{\pi_j} \geq F_2^\mu.$$

Тоді

$$F(X^\pi) = \max \left(F_1^\pi, F_2^\pi, \bar{x}_{\pi_j}^\pi + q_{\pi_j}, F_3^\pi \right) \geq \max \left(F_1^\mu, \bar{x}_{\pi_j}^\mu + q_{\pi_j}, F_2^\mu, F_3^\mu \right) = F(X^\mu),$$

а так як X^π оптимальний розклад, то $F(X^\pi) = F(X^\mu)$ і розклад X^μ теж оптимальний. Якщо $\mu \neq \sigma$, то зміну порядку обслуговування можна повторити необхідну кількість разів, поки не буде отримано розклад X^σ , який теж буде оптимальним. Теорема доведена.

Зауваження 3. Якщо запити на обслуговування надходять одночасно ($p_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$), то оптимальною за критерієм (1) буде послідовність σ , яка визначається умовою (8).

5. Зменшення розмірності задачі. Нехай F_n — нижня межа значень цільової функції (1).

Теорема 3. Якщо існує розклад $X^\tau, \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, в якому для деякого $j > 1$ виконуються умови:

$$x_{\tau_j}^\tau = p_{\tau_j} \geq \bar{x}_{j-1}^\tau, \quad (15)$$

$$p_n \geq p_{\tau_j}, \quad l = j+1, j+2, \dots, n, \quad (16)$$

$$\max \left\{ x_{\tau_i} + t_{\tau_i} + q_{\tau_i} \mid i = 1, 2, \dots, j-1 \right\} \leq F_n, \quad (17)$$

то існує оптимальний розклад $X^\pi, \pi = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, \pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$, для якого послідовність обслуговування перших $j-1$ запитів приладом S співпадає з розкладом X^τ .

Доведення. Нехай X^μ , $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, оптимальний розклад. Якщо виконується:

$$\mu_i = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad (18)$$

то теорема справедлива. Якщо (18) не виконується, то розглянемо розклад, X^π , $\pi = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, \pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$, де перестановка $(\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$ така, що для всіх $l = j+1, j+2, \dots, n$, елемент π_{l-1} в перестановці μ розташований лівіше елемента π_l .

З (2), (15), (16) слідує, що

$$x_{\pi_j}^\pi = p_{\pi_j} \leq x_{\pi_j}^\mu, \quad (19)$$

а з (2), (17), (19) і з того, що відносна послідовність обслуговування запитів $(\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$ в розкладах X^μ та X^π співпадають, слідує, що

$$\begin{aligned} F(X^\mu) &= \max \left\{ x_{\mu_i}^\mu + t_{\mu_i} + q_{\mu_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= \max \left\{ x_{\mu_i}^\mu + t_{\mu_i} + q_{\mu_i} \mid i = j, j+1, \dots, n \right\} \geq \\ &\geq \max \left\{ x_{\mu_i}^\pi + t_{\mu_i} + q_{\mu_i} \mid i = j, j+1, \dots, n \right\} = F(X^\pi). \end{aligned} \quad (20)$$

Але X^μ — оптимальний розклад, тому з (20) слідує, що $F(X^\mu) = F(X^\pi)$, тобто X^π — оптимальний розклад. Теорема доведена.

Наслідок 2. Якщо в розкладі X^τ , побудованому за допомогою списку τ , після обслуговування запитів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}$, $j \leq n$, існує простий пристрою S (виконується (15)) і час завершення обслуговування запитів $\bar{x}_{\tau_i}^\tau$, $i = 1, 2, \dots, j-1$ не перевищує F_n , то виконується (16), а отже існує оптимальний розклад X^* , такий що $x_{\tau_i}^* = x_{\tau_i}^\tau$, $i = 1, 2, \dots, j-1$.

Примітка. Якщо виконуються умови $x_{\tau_j}^\tau = p_{\tau_j} = \bar{x}_{j-1}^\tau$ та (16), то маємо простий пристрою S нульової довжини.

Якщо для розкладу X^τ , $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, виконуються мови (15)–(17), то час обслуговування вимог $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}$ можна зафіксувати і розмірність задачі зменшується на $j-1$. Отже для розв'язання задачі необхідно впорядкувати обслуговування $n-j+1$ вимог $\tau_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_n$.

6. Застосування властивості симетричності задач $Z_n(p, t, q)$ і $Z_n(q, t, p)$ для зменшення розмірності задачі. Як було показано вище, застосування теореми 3 дозволяє зафіксувати терміни обслуговування частини вимог. Наведений нижче алгоритм, за рахунок симетричності задач $Z_n(p, t, q)$ і $Z_n(q, t, p)$, може збільшити кількість зафіксованих вимог оптимальної перестановки.

Алгоритм. Початковий етап. Нехай

- F_n — нижня межа значень цільової функції (1);
- m^k — кількість вимог, які необхідно обслужити на k -му кроці ($m^1 = n$);
- I^k — множина не обслужених вимог на k -му кроці ($I^1 = \{1, 2, \dots, n\}$). Позначимо елементи множини I^1 через $i_1^1, i_2^1, \dots, i_{m^1}^1$;
- p^k, t^k, q^k — часові параметри вимог, впорядкування яких розглядається на k -му кроці в задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$.

Покладемо:

$$p^1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_{m^1}^1) = (p_{i_1^1}, p_{i_2^1}, \dots, p_{i_n^1}),$$

$$t^1 = (t_1^1, t_2^1, \dots, t_{m^1}^1) = (t_{i_1^1}, t_{i_2^1}, \dots, t_{i_n^1}),$$

$$q^1 = (q_1^1, q_2^1, \dots, q_{m^1}^1) = (q_{i_1^1}, q_{i_2^1}, \dots, q_{i_n^1}).$$

Перейдемо до виконання 1-го кроку алгоритму.

k -й крок ($k = 1, 2, \dots$). Розглянемо задачу: $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$.

1. Нехай $\sigma(I^k)$ список елементів множини I^k , розташованих в порядку не зростання величин q_i^k , $i = 1, 2, \dots, m^k$. За допомогою списку пріоритетів $\sigma(I^k)$ побудуємо розклад X^{π^k} , $\pi^k = (\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{m^k}^k)$.
2. Якщо $F(X^{\pi^k}) = F_n$, то розклад X^{π^k} — оптимальний для задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$. Покладемо: $j^k = m^k$. Визначимо перестановку

$$\theta^k = \begin{cases} (\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k), & \text{якщо } k \text{ — не парне,} \\ (\pi_{j^k}^k, \pi_{j^k-1}^k, \dots, \pi_1^k), & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases} \quad (21)$$

і перейдемо до виконання заключного кроку.

3. Визначимо j^k як максимальне з таких $j \in \{\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{m^k}^k\}$, що для X^{π^k} виконуються умови (15)–(17) або 0, якщо такого j не існує.
4. Якщо $j^k = 0$ та $k = 1$, то покладемо $I^{k+1} = I^k$ і перейдемо до пункту 7 k -го кроку алгоритму.
5. Якщо $j^k = 0$ та $k > 1$, то перейдемо до виконання заключного етапу алгоритму.
6. Якщо $j^k > 0$, то виконуються умови наслідку 2 теореми 2, а значить існує оптимальний розклад $\bar{X}_k$ задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$, для якого послідовність обслуговування перших j^k вимог співпадає з послідовністю $(\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k)$. Тому визначимо θ^k з (21), а з множини I^k не обслужених вимог видалимо індекси вимог послідовності θ^k , тобто $I^{k+1} = I^k \setminus \{\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k\}$.
7. Позначимо елементи множини I^{k+1} через $i_1^{k+1}, i_2^{k+1}, \dots, i_{m^{k+1}}^{k+1}$, де $m^{k+1} = m^k - j^k$, та визначимо

$$p^{k+1} = (p_1^{k+1}, p_2^{k+1}, \dots, p_{m^{k+1}}^{k+1}) = (q_{i_1^{k+1}}^k, q_{i_2^{k+1}}^k, \dots, q_{i_{m^{k+1}}^{k+1}}^k),$$

$$t^{k+1} = (t_1^{k+1}, t_2^{k+1}, \dots, t_{m^{k+1}}^{k+1}) = (t_{i_1^{k+1}}^k, t_{i_2^{k+1}}^k, \dots, t_{i_{m^{k+1}}^{k+1}}^k),$$

$$q^{k+1} = (q_1^{k+1}, q_2^{k+1}, \dots, q_{m^{k+1}}^{k+1}) = (p_{i_1^{k+1}}^k, p_{i_2^{k+1}}^k, \dots, p_{i_{m^{k+1}}^{k+1}}^k).$$

Очевидно, що значення цільової функції (1) для оптимальних розв'язків задач $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ та $Z_{m^{k+1}}(p^{k+1}, t^{k+1}, q^{k+1})$ співпадають.

Дійсно, якщо $j^k > 0$, то запити $\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k$ у задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ можуть обслуговуватися пристроєм S до надходження інших запитів на цей пристрій, не впливаючи на обслуговування останніх та на значення цільової функції.

Якщо ж $j^k = 0$, то задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ та $Z_{m^{k+1}}(q^{k+1}, t^{k+1}, p^{k+1})$ співпадають з точністю до нумерації запитів.

Враховуючи теорему 1 та її наслідок, задачу $Z_{m^{k+1}}(q^{k+1}, t^{k+1}, p^{k+1})$ можна замінити задачею $Z_{m^{k+1}}(p^{k+1}, t^{k+1}, q^{k+1})$.

Перейдемо до виконання $k + 1$ -го кроку алгоритму.

Заключний етап. Зауважимо, що при не парному k досліджується задача $Z_n(p, t, q)$, і фіксується послідовність $\bar{\theta}$ обслуговування перших $\bar{n}$ вимог, а при парному k — симетрична їй задача $Z_n(q, t, p)$, і фіксується послідовність $\bar{\bar{\theta}}$ обслуговування останніх $\bar{\bar{n}}$ вимог, де

$$\bar{\theta} = (\theta^1, \theta^3, \dots, \theta^{\bar{m}}) = (\pi_1^1, \pi_2^1, \dots, \pi_{j^1}^1, \pi_1^3, \pi_2^3, \dots, \pi_{j^3}^3, \dots, \pi_1^{\bar{m}}, \pi_2^{\bar{m}}, \dots, \pi_{j^{\bar{m}}}^{\bar{m}}),$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\theta}} &= (\theta^{\bar{m}}, \theta^{\bar{m}-2}, \dots, \theta^2) = \\ &= (\pi_{j^{\bar{m}}}^{\bar{m}}, \pi_{j^{\bar{m}-1}}^{\bar{m}}, \dots, \pi_1^{\bar{m}}, \pi_{j^{\bar{m}-2}}^{\bar{m}-2}, \pi_{j^{\bar{m}-2}-1}^{\bar{m}-2}, \dots, \pi_1^{\bar{m}-2}, \dots, \pi_{j^2}^2, \pi_{j^2-1}^2, \dots, \pi_1^2), \end{aligned}$$

$$\bar{m} = \begin{cases} k-1, & \text{якщо } k \text{ — парне,} \\ k, & \text{якщо } k \text{ — непарне,} \end{cases}$$

$$\bar{\bar{m}} = \begin{cases} k-1, & \text{якщо } k \text{ — непарне,} \\ k, & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases}$$

$$\bar{n} = j^1 + j^3 + \dots + j^{\bar{m}},$$

$$\bar{\bar{n}} = j^{\bar{m}} + j^{\bar{m}-2} + \dots + j^2.$$

Як впливає з теореми 1, її наслідку та побудови векторів $\bar{\theta}$ та $\bar{\bar{\theta}}$, існує оптимальний розв'язок задачі $Z_n(p, t, q)$, в якому першими обслуговуються $\bar{n}$ запитів послідовності $\bar{\theta}$, а останніми $\bar{\bar{n}}$ запитів послідовності $\bar{\bar{\theta}}$ у вказаному порядку.

Кінець алгоритму.

Таким чином, наведений алгоритм дозволяє знайти оптимальну послідовність обслуговування запитів пристроєм S (якщо $n = \bar{n} + \bar{\bar{n}}$, то оптимальною послідовністю обслуговування буде послідовність $(\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}})$), або зменшити розмірність задачі (якщо $n > \bar{n} + \bar{\bar{n}}$, то для побудови оптимальної послідовності достатньо упорядкувати $m^k = n - \bar{n} - \bar{\bar{n}}$ запитів множини I^k , тобто розв'язати задачу $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ або $Z_{m^k}(q^k, t^k, p^k)$).

7. Висновки. У роботі розглянуто одну детерміновану задачу теорії розкладів. Запити надходять на обслуговування в різні моменти часу, а після обслуговування вимагають виконання певних завершальних операцій, що впливають на ефективність розкладу. Для знаходження розв'язків таких задач, як правило, застосовуються комбінаторні алгоритми, що мають експоненціальну складність. Тому важливим є попередній аналіз, який часто дозволяє зменшити розмірність задачі. Запропоновано підхід, заснований на використанні властивості симетричності та аналізі початкових даних, який дає можливість зафіксувати послідовність обслуговування частини вимог, що і дозволяє зменшити розмірність задачі.

Список використаної літератури

1. Joseph Y.-T. Leung (Ed.) *Handbook of Scheduling. Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Boca Raton, FL, USA : Chapman & Hall / CRC, 2004. 1216 p.
2. Michael L. Pinedo *Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems*. 6 Edition. New York, USA : Springer Science, 2022. 698 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05921-6>
3. Ващук Ф. Г. Теорія розкладів : навч. посіб. / Ф. Г. Ващук, О. Г. Лавер, Н. Я. Шумило. Ужгород : Вид-во "Два кольори 2003. 136 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/4685> (дата звернення: 03.03.2025).
4. Шпенник Т. Б. Алгоритм пошуку оптимального по кількості приладів розв'язку однієї задачі теорії розкладів / Т. Б. Шпенник. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Фізика*. 2013. Вип. 33. С. 91–95. <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/2192> (дата звернення: 03.03.2025).
5. Кузка О. І. Оптимізація структури системи виконання робіт в багатостадійних задачах. *Праці VIII міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень»*. Ужгород : Ужгородський нац. ун-т, 26 вересня – 1 жовтня, 2016. 154 с.
6. Кузка О. І., Шпенник Т. Б. Мінімізація кількості приладів при виконанні робіт в системах ідентичних паралельних приладів. *Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія математика*. 1998. Вип. 3. С. 147–150.
7. Кузка А. И., Шпенник Т. Б. Алгоритм последовательного анализа вариантов для минимизации числа приборов в задаче составления расписания, удовлетворяющего директивным срокам. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 5. С. 118–123.

Kuzka O. I., Korniyk I. V., Duran V. M. Service requests with one device.

One class of deterministic problems of scheduling theory is considered, namely, the problem of ordering the process of servicing requests that do not arrive at the system simultaneously. The structure of the service system allows us to formulate an auxiliary symmetric problem. Theorems are proved, on the basis of which an iterative algorithm is built that analyzes a pair of symmetric problems in turn and allows us to fix the sequence of servicing part of the requirements and reduce the dimensionality of the initial problem.

Keywords: scheduling theory, service optimization, symmetric problems, request (requirement), active schedule, permutation schedule, priority list.

References

1. Joseph, Y.-T. (2004). Leung (Ed.) *Handbook of Scheduling. Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall / CRC.
2. Michael, L. (2022). *Pinedo Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems*. 6 Edition. New York, USA: Springer Science. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05921-6>
3. Vashchuk, F. G. (2003). *Scheduling Theory: Textbook*. Uzhgorod: Publishing House "Two Colors". Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/4685> [in Ukrainian].
4. Shpenik, T. B. (2013). Algorithm for searching for the optimal number of devices solution of one problem of scheduling theory. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University: Series: Physics*, 33, 91–95. Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/2192> [in Ukrainian].
5. Kuzka, O. I. (September 26 – October 1, 2016). Optimization of the structure of the work execution system in multi-stage problems. *Proceedings of the VIII International School-Seminar "Decision Making Theory"* [in Ukrainian].
6. Kuzka, O. I., & Shpenyk, T. B. (1998). Minimization of the number of devices when performing work in systems of identical parallel devices. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Mathematics Series*, 3, 147–150 [in Ukrainian].
7. Kuzka, A. I., & Shpenik, T. B. (2000). Algorithm for sequential analysis of variants to minimize the number of devices in the task of compiling a schedule that meets the directive terms. *Cybernetics and System Analysis*, (5), 118–123 [in Russian].

Одержано 01.04.2025