

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).26-34](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).26-34)**А. Ю. Кравець¹, О. І. Василик²**

¹ Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
студент фізико-математичного факультету
artemkravets13@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2218-7749>

² Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук, доцент
vasylyk@matan.kpi.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0880-3751>

**ОЦІНЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА ДЛЯ
БІНОМІАЛЬНО- φ -СУБГАУССОВОЇ МОДЕЛІ РИЗИКУ**

У роботі досліджується процес ризику, утворений сумою біноміально розподіленої кількості строго φ -субгауссових випадкових доданків, які описують окремі виплати, що здійснюються страховою компанією за деяким портфелем страхових полісів. Отримано оцінки ймовірності банкрутства для такої біноміально- φ -субгауссової моделі ризику для деяких часткових випадків функції φ та інтенсивності надходження премій, яка є монотонно зростаючою неперервною функцією часу.

Ключові слова: біноміальний розподіл, ймовірність банкрутства, процес ризику, φ -субгауссові випадкові величини, строго φ -субгауссові випадкові процеси.

1. Вступ. Актуальність дослідження полягає в тому, що в сучасних умовах розвитку фінансових ринків зростає необхідність у точних математичних методах для аналізу та прогнозування поведінки різних фінансових інструментів та процесів. Використання класичних підходів, таких як застосування гауссових випадкових процесів, часто є недостатнім для моделювання складних фінансових явищ, що мають нестандартні розподіли або вимагають врахування складних залежностей.

У зв'язку з цим, дослідження сучасних підходів до аналізу випадкових величин, які виходять за рамки традиційних гауссових моделей, стає критично важливим для фінансових аналітиків, банків, страхових компаній та інших учасників фінансового ринку. Впровадження нових методів дозволить не тільки покращити точність прогнозів, але й забезпечити більш ефективне управління ризиками, що є ключовим чинником стабільності у фінансовій сфері.

Наразі відомо, що у таких прикладних галузях як фінанси і страхування спостерігаються випадкові процеси, які не можна вважати гауссовими, звідки випливає пряма необхідність у розвитку та застосуванні теорії φ -субгауссових випадкових процесів як розширення відповідної теорії гауссових випадкових процесів.

Мета і завдання дослідження: оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику, представленого у вигляді біноміальної суми з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат, у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.

Наукова новизна дослідження полягає у виведенні оцінки ймовірності банкрутства для процесу ризику, який утворений біноміальною сумою строго φ -

субгауссових випадкових виплат у випадку певного більш загального виду функції φ .

Простори $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, або простори φ -субгауссових випадкових величин, — це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами [1, 2]. Такі простори є підпросторами просторів Орліча експоненціального типу. Класи φ -субгауссових випадкових процесів, тобто, процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, є більш широкими, ніж класи гауссових та субгауссових випадкових процесів, тому дають можливість краще моделювати реальні випадкові процеси. В. Булдигін та Ю. Козаченко [1] досліджували властивості сум незалежних випадкових величин з таких просторів і деякі властивості випадкових процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, отримали умови обмеженості та оцінки розподілів супремумів таких процесів для випадку, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом.

До класу φ -субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, які широко використовуються для моделювання випадкових явищ у фінансовій математиці, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ -субгауссових випадкових процесів теоретичні результати.

У роботі [3] теорію φ -субгауссових випадкових процесів застосовано для дослідження властивостей випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками, а в статті [4] — для оцінювання ймовірності банкрутства у моделі з узагальненим φ -субгауссовим дробовим броунівським рухом. Подальший розвиток досліджень моделей ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат наведено у роботі [5], в якій отримано оцінки ймовірності банкрутства процесу ризику, що описується сумою випадкового біноміально розподіленого числа доданків, які є φ -субгауссовими випадковими величинами позовів, а інтенсивність надходження премій є монотонно зростаючою неперервною функцією. Ми продовжуємо дослідження таких процесів ризику, а саме, на основі результатів роботи [5] виводимо оцінки ймовірності банкрутства у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) та у випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$.

2. Необхідні відомості. У цьому розділі наведені необхідні в подальшому означення та твердження з теорії φ -субгауссових випадкових величин та процесів [1, 2].

Означення 1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$, та мають місце такі умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$. Можливо, що $c = +\infty$.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ — стандартний ймовірнісний простір.

Означення 2. [1, 2] Нехай φ — N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується

нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}$. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то простір $\text{Sub}_{\frac{x^2}{2}}(\Omega) = \text{Sub}(\Omega)$ називається субгауссовим.

Теорема 1. [1, 2] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda\xi\})}{\lambda},$$

де $\varphi^{(-1)}$ — обернена до φ функція, також для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}$, а також існує така стала $c_\varphi > 0$, що $(E\xi^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_\varphi\tau_\varphi(\xi)$.

Означення 3. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається φ -субгауссовим процесом, якщо він задовольняє такі умови при всіх $t \in T$:

$$X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega), \quad \sup_{t \in T} X(t) < +\infty.$$

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то випадковий процес $X(t)$ називається субгауссовим.

Означення 4. Сім'я Δ випадкових величин з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ . Простір строго φ -субгауссових випадкових величин позначають $\text{SSub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 5. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу та позначається C_X .

Нехай (T, ρ) — псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ , $X = \{X(t), t \in T\}$ — сепарабельний φ -субгауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ така, що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (1)$$

Зауважимо, що таку властивість має функція $\sigma(h) = \sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, якщо процес $X(t)$ є неперервним у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B — компактна множина, причому $B \subset T$. Введемо $\beta > 0$ — деяке число таке, що $\beta \leq \sigma\left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t; s)\right)$. Надалі розглядаємо $B = [0, 1]$, яку інтерпретуємо як інтервал часу в один рік.

Означення 6. Якщо існує скінчене ε -покриття множини T , то $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ означає кількість елементів в найменшому ε -покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченного ε -покриття множини T , то покладемо $N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty$. Функцію $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, будемо називати метричною масивністю множини T відносно псевдометрики (метрики) ρ або просто метричною масивністю.

Означення 7. Метричною ентропією відносно псевдометрики (метрики) ρ або просто метричною ентропією називається функція

$$H_{(T,\rho)}(u) := \begin{cases} \ln N_{(T,\rho)}(u), & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) < +\infty \\ +\infty, & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty \end{cases}$$

де $N_{(T,\rho)}(u)$ — метрична масивність множини T .

3. Біноміально- φ -субгауссова модель ризику. Як і в роботі [5], розглянемо портфель страхової компанії із n незалежних однорідних ризиків, кожен з яких може викликати не більше однієї страхової події. Зобразимо відповідну модель ризику в такому вигляді:

$$X(t) = u + (C - \alpha\mu)t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де u — початковий капітал страхової компанії, $C > 0$ — інтенсивність надходження страхових внесків, α — середній розмір страхової виплати, $c = C - \alpha\mu > 0$ та

- 1) N_t — випадковий процес, що описує кількість страхових подій, які сталися на інтервалі від 0 до t відповідно до біноміального розподілу

$$P(N_t = k) = \binom{n}{k} \theta(t)^k (1 - \theta(t))^{n-k},$$

де $0 \leq k \leq n$, $\theta(t)$ — неперервна функція, що описує ймовірність настання страхової події протягом часу $[0, t]$, тобто $\theta(0) = 0$, $\theta(+\infty) = 1$, $\theta(t_1) \leq \theta(t_2)$ для довільних $t_1 < t_2$. Нехай також ймовірність події $\theta(t)$ задовольняє припущення, що $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu|t - s|$ для деякого $\mu > 0$. Крім того, вважатимемо, що кількості подій, які сталися на неперетинних часових інтервалах, є незалежними випадковими величинами,

- 2) Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $E(Y_i) = 0$,
- 3) N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \dots)$ є незалежними,
- 4) випадкові величини Y_i належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Надалі розглядаються властивості сум

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (3)$$

для яких виконуються вищевказані умови 1)–4).

Наведемо деякі результати, отримані в роботі [5] для сум випадкової кількості φ -субгауссових виплат вигляду (14).

Лема 1. [5] Нехай $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t}$, $t \geq 0$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення 1)–4). Тоді для всіх $t, s > 0$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються такі нерівності:

$$\mathbb{E} \exp \{ \lambda S(t) \} \leq (\theta(t) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(t))^n,$$

$$\mathbb{E} \exp \{ \lambda (S(t) - S(s)) \} \leq ((\theta(t) - \theta(s)) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(t) + \theta(s))^n$$

та $\mathbb{D}(S(t) - S(s)) = n(\theta(t) - \theta(s)) \mathbb{E} Y_1^2$.

Зауваження 1. З леми 1 випливає, що випадковий процес $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t}$, $t \geq 0$, задовольняє умову (1) з функцією $\sigma(h) = (nh \mathbb{E} Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $h > 0$.

Теорема 2. [5] Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in B \right\}$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення 1)–4). Нехай $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu |t - s|$ для деякого $\mu > 0$; та для деякої неперервної функції $f = \{f(t), t \geq 0\}$ маємо $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u; v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — обмежена монотонно зростаюча функція, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ — така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, причому $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \geq 0$ є опуклою функцією. Тоді якщо

$$\int_0^\beta r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du < +\infty, \quad (4)$$

то для всіх $0 < \beta \leq \left(\frac{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ та $x > 0$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) > x \right\} &\leq Z_r(\beta; x), \\ P \left\{ \inf_{t \in B} (S(t) - f(t)) < -x \right\} &\leq Z_r(\beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in B} |S(t) - f(t)| > x \right\} &\leq 2Z_r(\beta; x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du \right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2(1-p)}{\mathbb{E} Y_1^2} \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in B} \left[\frac{n}{\nu} \ln (\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(u)) - \lambda f(u) \right] \right). \end{aligned}$$

4. Оцінювання ймовірності банкрутства. У даному розділі знайдено оцінку ймовірності банкрутства для моделі ризику зі сталою інтенсивністю надходження премій, у якій процес ризику задано у вигляді біноміальної суми з субгауссовими розмірами виплат та φ -субгауссовими виплатами з функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$.

Теорема 3. Нехай $\left\{S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in [0; 1]\right\}$ — випадковий процес з властивостями 1)–4), $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, та виконується умова (4). Тоді для довільних $c > 0$, $x > 0$ та $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x\right\} &\leq Z_1(\beta; x), \\ P\left\{\inf_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x\right\} &\leq Z_1(\beta; x), \\ P\left\{\sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x\right\} &\leq 2Z_1(\beta; x), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} Z_1(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2\mathbb{E}Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Доведення. Для доведення твердження використаємо теорему 2, поклавши $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $f(t) = ct$, $c = C - \alpha\mu$, $\delta(t) = t$, $r(s) = s^\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, 1)$, $\rho(t; s) = |t - s|$, $t, s \in [0; 1]$, $C_\Delta = 1$, $\theta(u) = u$, $u \in [0, 1]$, $\theta(u) = 1$, $u \in (1, +\infty)$, $\mu = 1$, $\sigma(h) = (nh\mathbb{E}Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{n\mathbb{E}Y_1^2}$, $h > 0$, $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

При таких умовах матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\beta^2 p^{2k}}{n\mathbb{E}Y_1^2} = \frac{\beta^2}{n\mathbb{E}Y_1^2} \cdot \frac{p^4}{1-p^2} = \frac{\beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2}; \\ \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{1-p} \right)^2 \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k+1} = \frac{1}{2} (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 \cdot \left(\frac{p}{1-p} \right)^3; \\ N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= N_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \leq \frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{u^2}; \end{aligned}$$

$$r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du \right) \leq n \mathbb{E} Y_1^2 \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} u^{-2\alpha} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}};$$

$$H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) = H_{[0,1]} (\sigma^{(-1)}(\beta p)) = \ln (N_B (\sigma^{(-1)}(\beta p))) \leq \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right).$$

Отже,

$$Z_r(\beta; x) \leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2 \mathbb{E} Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\} =: Z_1(\beta; x),$$

$$W(\lambda; p; \beta) = \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right).$$

Теорема 4. Нехай $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in [0; 1] \right\}$ — випадковий процес з властивостями 1)–4), $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}, x \in \mathbb{R}, 1 < \omega \leq 2$ та виконується умова (4). Тоді для довільних $c > 0, x > 0$ та $0 < \beta \leq \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності:

$$P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x \right\} \leq Z_2(\beta; x), \quad (6)$$

$$P \left\{ \inf_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x \right\} \leq Z_2(\beta; x),$$

$$P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x \right\} \leq 2Z_2(\beta; x),$$

де

$$Z_2(\beta; x) = \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega \mathbb{E} Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\},$$

$$W(\lambda; p; \beta) = \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right).$$

Доведення. Для доведення твердження використаємо теорему 2, поклавши $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $f(t) = ct$, $\delta(t) = t$, $r(s) = s^\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, 1)$, $\rho(t; s) = |t - s|$, $t, s \in [0; 1]$ $C_\Delta = 1$, $\theta(u) = u$, $u \in [0, 1]$, $\theta(u) = 1$, $u \in (1, +\infty)$, $\mu = 1$, $\sigma(h) = (nh\mathbb{E}Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{n\mathbb{E}Y_1^2}$, $h > 0$, $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

При таких умовах матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \delta\left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\beta^2 p^{2k}}{n \mathbb{E}Y_1^2} = \frac{\beta^2}{n \mathbb{E}Y_1^2} \cdot \frac{p^4}{1-p^2} = \frac{\beta^2 p^4}{(1-p^2)n \mathbb{E}Y_1^2}; \\ \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi\left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right) &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|}{1-p}\right)^\omega \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1-\omega(k-1)} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|}{1-p}\right)^\omega \frac{p^{5-\omega}}{1-p^{3-\omega}}; \\ N_B\left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right) &= N_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \leq \frac{n \mathbb{E}Y_1^2}{u^2}; \\ r^{(-1)}\left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r\left(N_B\left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right)\right) du\right) &\leq n \mathbb{E}Y_1^2 \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} u^{-2\alpha} du\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}; \\ H_B\left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right) &= H_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(\beta p)) = \ln(N_B(\sigma^{(-1)}(\beta p))) \leq \ln\left(\frac{n \mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2}\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &\leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega \mathbb{E}Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n \mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\} =: Z_2(\beta, x), \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Нерівності (5) та (6), доведені у цих теоремах, дають оцінки ймовірності банкрутства для відповідної біноміально- φ -субгауссової моделі ризику при початковому капіталі $x > 0$.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі наведено результати оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in R$) та у

випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$, при цьому потік премій є монотонно зростаючою неперервною функцією. Напрямки подальших досліджень таких моделей включають як виведення оцінок ймовірності банкрутства для інших N -функцій Орліча φ , так і конкретизацію оцінок для певних заданих значень параметрів моделі. Результати дослідження можуть бути використані актуаріями та фінансовими аналітиками для оцінювання ризиків та забезпечення платоспроможності страхових компаній.

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society : Providence RI, 2000.
2. Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ -субгауссові випадкові процеси. Монографія. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2008. 232 с. URL: https://probability.knu.ua/userfiles/yamnenko/kyv_monograph.pdf (дата звернення: 25.03.2025).
3. Ямненко Р. Є., Василик О. І. Деякі властивості випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками. *Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика*. 2007. Вип. 1, № 1. С. 133–148.
4. Yamnenko R. Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion. *Theory of Stochastic Processes*. 2006. Т. 12(28), № 3–4. С. 261–275.
5. Yamnenko R., Lamin A. Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ -sub-Gaussian claims. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. № 2. Р. 20–27. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2>

Kravets A. Yu., Vasylyk O. I. Estimation of ruin probability for binomially- φ -sub-Gaussian risk model.

In the paper, we investigate the risk process formed by the sum of a binomially distributed number of strictly φ -sub-Gaussian random terms that describe individual payments made by an insurance company under a certain portfolio of insurance policies. Estimates of ruin probability for such a binomially- φ -sub-Gaussian risk model are obtained for some partial cases of the function φ and the premium flow, which is a monotonically increasing continuous function of time.

Keywords: binomial distribution, ruin probability, risk process, φ -sub-Gaussian random variables, strictly φ -sub-Gaussian random processes.

References

1. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes*. American Mathematical Society: Providence RI.
2. Vasylyk, O. I., Kozachenko, Yu. V., & Yamnenko, R. E. (2008). *φ -sub-Gaussian random processes*. Kyiv: VPC "Kyivskyi Universytet". Retrieved from https://probability.knu.ua/userfiles/yamnenko/kyv_monograph.pdf [in Ukrainian].
3. Yamnenko, R., & Vasylyk, O. (2007). Some properties of random Poisson sums with φ -sub-Gaussian terms. *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat.*, 1(1), 133–148 [in Ukrainian].
4. Yamnenko, R. (2006). Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion. *Theory of Stochastic Processes*, 12(28(3–4)), 261–275.
5. Yamnenko, R., & Lamin, A. (2022). Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ -sub-Gaussian claims. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, (2), 20–27. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2>

Одержано 31.03.2025