

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).93-103](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).93-103)**В. Л. Реґо¹, Я. В. Варґа²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь
vasyl.reho@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4995-2577>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
iana.varga@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7842-248X>

ПОБУДОВА ІНТЕГРОВНИХ КОМБІНАЦІЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Метод інтегровних комбінацій є одним із ефективних методів інтегрування систем диференціальних рівнянь. Зокрема, у випадку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами він за певних умов дозволяє звести систему диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій, що значно спрощує розв'язання. Однак побудова інтегровних комбінацій часто викликає складнощі, оскільки визначити їх підбором доволі непросто. Метою даної роботи є дослідження питань існування й побудови інтегровних комбінацій для нормальних лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, а також ілюстрація практичного застосування отриманих результатів.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, лінійна однорідна система диференціальних рівнянь, лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь, інтегровні комбінації, задача Копі.

1. Вступ. Розглянемо нормальну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (1)$$

де $\mathbf{X} = \text{col}(x_1(t) \dots x_n(t))$ — вектор-стовпець із невідомих функцій, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ — матриця розмірності $n \times n$ зі сталими елементами. Задля кращої наочності подальшого викладу запишемо (1) у вигляді

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

2. Дійсні інтегровні комбінації. Нехай $k_i, i = \overline{1, n}$ — деякі дійсні числа, не всі рівні нулю. Складемо лінійну комбінацію рівнянь системи (2):

$$\sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \quad (3)$$

Нагадаємо, що інтегровою комбінацією (ІК) для системи диференціальних рівнянь (СДР) називається [1] будь-яке звичайне диференціальне рівняння, яке

є наслідком системи й легко інтегрується. Із рівності (3) очевидно випливає, що дійсна ІК отримується за виконання умови

$$\sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i,$$

тобто

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ji} k_j x_i = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad (4)$$

де α — деяке дійсне число. Рівність (4) справджується за будь-якого значення t , якщо будуть рівними коефіцієнти, при однакових шуканих функціях у лівій і правій частинах. Ця вимога дає алгебраїчну систему відносно коефіцієнтів k_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} k_j = \alpha k_i, \quad i = \overline{1, n},$$

яку можна записати в матричному вигляді

$$(\mathbf{A}^T - \alpha \mathbf{E}) \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

де $\mathbf{E}$ — одинична матриця розмірності $n \times n$, $\mathbf{k} = \text{col}(k_1 \dots k_n)$. За припущенням вектор-стовпець $\mathbf{k}$ є ненульовим, а отже, враховуючи рівність (5), його можна інтерпретувати як власний вектор транспонованої матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає дійсному власному значенню α (як відомо з курсу алгебри [2], матриці $\mathbf{A}^T$ є подібними, тож їх власні значення співпадають).

Таким чином, нами доведена

Теорема 1 (про існування дійсних інтегровних комбінацій для СДР (1)). *Якщо матриця СДР (1) має дійсне власне значення $\lambda = \alpha$, то для цієї системи існує дійсна інтегровна комбінація*

$$\sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad (6)$$

де k_i , $i = \overline{1, n}$ — елементи власного вектора матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає власному значенню $\lambda = \alpha$.

Шляхом відокремлення змінних із диференціального рівняння (6) отримуємо загальний інтеграл

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = C e^{\alpha t}, \quad (7)$$

де C — довільна дійсна стала. Звідси випливає

Наслідок 1 (застосування методу інтегровних комбінацій у випадку дійсних власних значень матриці системи). *Якщо матриця СДР n -го порядку (1) має n дійсних попарно різних власних значень $\lambda_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, тоді СДР (1) зводиться до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій.*

Справді, згідно з доведеною теоремою для кожного власного значення можна побудувати ІК вигляду (6). Ці ІК будуть лінійно незалежними, оскільки власні значення є попарно різними. А сукупність їх загальних інтегралів вигляду (7) утворить систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій, із якої можна знайти загальний розв'язок СДР (1). Утворена лінійна неоднорідна система завжди розв'язна, адже її визначник, рядками якого є власні вектори матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідають різним власним значенням (а отже є лінійно незалежними), відмінний від нуля.

Зауваження 1. Описаний вище алгоритм методу інтегровних комбінацій застосовний також для відповідної до (1) неоднорідної СДР вигляду

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(t), \quad (8)$$

де $\mathbf{F} = \text{col}(f_1(t) \dots f_n(t))$ — вектор-стовпець вільних членів. Однак у цьому випадку замість (6) отримуємо ІК

$$\sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i + \sum_{i=1}^n k_i f_i(t),$$

що являє собою лінійне диференціальне рівняння першого порядку, загальний інтеграл якого знаходиться за формулою

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = e^{\alpha t} \left(C + \int e^{-\alpha t} \cdot \sum_{i=1}^n k_i f_i(t) dt \right). \quad (9)$$

Приклад 1. Зінтегрувати лінійну однорідну СДР методом інтегровних комбінацій:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases} \quad (10)$$

Розв'язання. Система третього порядку (10) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

яка має три дійсні попарно різні власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ — отже, згідно з Наслідком 1 СДР (10) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови ІК знайдемо відповідні власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою ІК буде

$$\dot{x} - \dot{z} = (2x - y + z) - (x - y + 2z) = x - z \Rightarrow x - z = C_1 e^t.$$

$$2)(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, другою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} - \dot{z} &= (2x - y + z) + (x + 2y - z) - (x - y + 2z) = 2(x + y - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + y - z = C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$3)(\mathbf{A}^T - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, третьою ІК буде

$$\dot{y} - \dot{z} = (x + 2y - z) - (x - y + 2z) = 3(y - z) \Rightarrow y - z = C_3 e^{3t}.$$

Загальний розв'язок СДР (10) визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної трьома знайденими інтегралами:

$$\begin{cases} x - z = C_1 e^t, \\ x + y - z = C_2 e^{2t}, \\ y - z = C_3 e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t}, \\ y = C_2 e^{2t} - C_1 e^t, \\ z = C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t} - C_1 e^t. \end{cases}$$

Приклад 2. За допомогою методу інтегровних комбінацій знайти розв'язок задачі Коші для лінійної однорідної СДР:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases} \quad (11)$$

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \quad (12)$$

Розв'язання. Система третього порядку (11) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

яка має три дійсні попарно різні власні значення $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ — отже, згідно з Наслідком 1 СДР (11) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови ІК знайдемо відповідні власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} - 2\dot{y} - \dot{z} &= (x - 2y - z) - 2(-x + y + z) - (x - z) = 2(x - 2y - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - 2y - z = C_1 e^{2t}, \end{aligned}$$

а згідно з початковими умовами (12) при $t = 0$ маємо

$$C_1 = x(0) - 2y(0) - z(0) = 3 - 2 = 1.$$

$$2)(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, другою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} &= (x - 2y - z) + 2(-x + y + z) + (x - z) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + 2y + z = C_2, \end{aligned}$$

а згідно з початковими умовами (12) при $t = 0$ маємо

$$C_2 = x(0) + 2y(0) + z(0) = 3 + 2 = 5.$$

$$3)(\mathbf{A}^T - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, третьою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} - \dot{z} &= (x - 2y - z) + (-x + y + z) - (x - z) = -(x + y - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + y - z = C_3 e^{-t}, \end{aligned}$$

а згідно з початковими умовами (12) при $t = 0$ маємо

$$C_3 = x(0) + y(0) - z(0) = 3 + 1 = 4.$$

Розв'язок задачі Коші (11), (12) визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної трьома знайденими інтегралами при розрахованих значеннях сталих:

$$\begin{cases} x - 2y - z = e^{2t}, \\ x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 4e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{e^{2t} + 5}{2}, \\ y = \frac{4e^{-t} - e^{2t}}{3}, \\ z = \frac{e^{2t} - 16e^{-t} + 15}{6}. \end{cases}$$

Приклад 3. Застосувати метод інтегровних комбінацій до лінійної неоднорідної СДР:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z - t, \\ \dot{y} = x - z + 2t, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z + t. \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язання. Система третього порядку (13) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

яка має три дійсні попарно різні власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ — отже, згідно з зауваженням 1 СДР (13) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови ІК знайдемо відповідні власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою ІК буде

$$\dot{x} - \dot{y} = (2x - y - z - t) - (x - z + 2t) = x - y - 3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = e^t \left(C_1 - \int 3te^{-t} dt \right) = C_1 e^t + 3(t + 1).$$

$$2)(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, другою ІК буде

$$\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = (2x - y - z - t) + (x - z + 2t) - (3x - y - 2z + t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - z = C_2.$$

$$3)(\mathbf{A}^T - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, третьою ІК буде

$$\dot{x} - \dot{z} = (2x - y - z - t) - (3x - y - 2z + t) = -(x - z) - 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - z = e^{-t} \left(C_3 - \int 2te^t dt \right) = C_3 e^{-t} - 2(t - 1).$$

Загальний розв'язок СДР (13) визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної трьома знайденими інтегралами:

$$\begin{cases} x - y = C_1 e^t + 3(t + 1), \\ x + y - z = C_2, \\ x - z = C_3 e^{-t} - 2(t - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 - C_3 e^{-t} + 5t + 1, \\ y = C_2 - C_3 e^{-t} + 2(t - 1), \\ z = C_1 e^t + C_2 - 2C_3 e^{-t} + 7t - 1. \end{cases}$$

3. Комплексні інтегровні комбінації. Нехай $k_i, i = \overline{1, n}$ — деякі комплексні числа, не всі рівні нулю. Повторюючи міркування з доведення Теорема 1, складемо лінійну комбінацію (3), звідки очевидно випливає, що ІК отримується за виконання умови (4) у вигляді

$$\sum_{p,q=1}^n a_{qp} k_q x_p = (\alpha + \beta i) \sum_{p=1}^n k_p x_p, \quad (14)$$

де α, β — деякі дійсні числа, причому $\beta \neq 0$. Рівність (14) аналогічно до (4) справджується за будь-якого значення t при виконанні умови

$$[\mathbf{A}^T - (\alpha + \beta i)\mathbf{E}]\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

де $\mathbf{E}$ — одинична матриця розмірності $n \times n$, $\mathbf{k} = \text{col}(k_1 \dots k_n)$. За припущенням вектор-стовпець $\mathbf{k}$ є ненульовим, а отже, враховуючи рівність (15), його можна інтерпретувати як власний вектор транспонованої матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає комплексному власному значенню $\alpha + \beta i$.

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 2 (про існування комплексних інтегровних комбінацій для СДР (1)). *Якщо матриця СДР (1) має комплексне власне значення $\lambda = \alpha + \beta i$ (α, β — деякі дійсні числа, причому $\beta \neq 0$), то для цієї системи існує комплексна інтегровна комбінація*

$$\sum_{p=1}^n k_p \dot{x}_p = (\alpha + \beta i) \sum_{p=1}^n k_p x_p, \quad (16)$$

де $k_p, p = \overline{1, n}$ — загалом комплекснозначні елементи власного вектора матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає власному значенню $\lambda = \alpha + \beta i$.

Шляхом відокремлення змінних із диференціального рівняння (16) отримуємо загальний інтеграл

$$\sum_{p=1}^n k_p x_p = C e^{(\alpha + \beta i)t},$$

де C — довільна комплексна стала. Запишемо останню рівність в еквівалентному вигляді

$$\sum_{p=1}^n k_p x_p = (C_1 + C_2 i) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad (17)$$

де C_1, C_2 дійсні сталі. Тоді зі співвідношення (17) шляхом прирівнювання дійсних і уявних частин отримуємо дві незалежні дійсні рівності, що пов'язують дійснозначні шукані функції СДР (1):

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n x_p \operatorname{Re}(k_p) &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t), \\ \sum_{p=1}^n x_p \operatorname{Im}(k_p) &= e^{\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t). \end{aligned} \quad (18)$$

Звідси випливає

Наслідок 2 (застосування методу інтегровних комбінацій у випадку комплексних власних значень матриці системи). *Якщо матриця $\mathbf{A}$ СДР (1) має комплексне власне значення $\lambda = \alpha + \beta i$ (α, β — деякі дійсні числа, причому $\beta \neq 0$), тоді для шуканих функцій СДР (1) справджуються співвідношення (18), де $k_p, p = \overline{1, n}$ визначаються згідно з Теоремою 2.*

Зауваження 2. *Описаний вище алгоритм побудови комплексних інтегровних комбінацій застосовний також для відповідної до (1) неоднорідної СДР вигляду (8). Однак у цьому випадку замість (16) отримуємо ІК*

$$\sum_{p=1}^n k_p \dot{x}_p = (\alpha + \beta i) \sum_{p=1}^n k_p x_p + \sum_{p=1}^n k_p f_p(t),$$

загальний інтеграл якої знаходиться за аналогічною до (9) формулою

$$\sum_{p=1}^n k_p x_p = e^{(\alpha + \beta i)t} \left(C_1 + C_2 i + \int e^{-(\alpha + \beta i)t} \cdot \sum_{p=1}^n k_p f_p(t) dt \right).$$

Прирівнявши в останньому співвідношенні дійсні та уявні частини, отримаємо дві незалежні дійсні рівності, що пов'язують дійснозначні шукані функції СДР (8).

Приклад 4. *Застосувати метод інтегровних комбінацій до лінійної однорідної СДР другого порядку:*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \quad (19)$$

Розв'язання. Система другого порядку (19) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

яка має два комплексно спряжені власні значення $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$. Побудуємо інтегровну комбінацію для одного з них, наприклад, λ_1 . Для цього потрібно знайти відповідний власний вектор транспонованої матриці

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} : \\ (\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{k}_1 &= \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i. \end{aligned}$$

Отже, комплексною ІК буде

$$\dot{x} + i\dot{y} = (2x - y) + i(x + 2y) = (2 + i)(x + iy),$$

а відповідна їй система (18) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = e^{2t}(C_1 \cos t - C_2 \sin t), \\ y = e^{2t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t), \end{cases}$$

що безпосередньо визначає загальний розв'язок вихідної СДР (19).

4. Узагальнення результатів дослідження. Виходячи з наведених вище міркувань, можемо стверджувати, що справедлива

Теорема 3 (зведення системи диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь). *Якщо матриця $\mathbf{A}$ СДР n -го порядку (1) має n попарно різних власних значень, тоді СДР (1) зводиться до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій, у якій кожному дійсному власному значенню відповідає співвідношення вигляду (7), яке будується згідно з Теоремою 1 та Наслідком 1, а кожній парі комплексно спряжених власних значень — пара рівностей вигляду (18), які будуються згідно з Теоремою 2 та Наслідком 2.*

Додатково зазначимо, що аналогічну теорему можна сформулювати також для неоднорідної СДР (8), з урахуванням Зауважень 1 і 2.

Приклад 5. *Шляхом зведення до системи алгебраїчних рівнянь розв'язати СДР:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases} \quad (20)$$

Розв'язання. Система третього порядку (20) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

яка має три попарно різні власні значення: одне дійсне $\lambda_1 = 2$, і два комплексно спряжені $\lambda_2 = -5 + 2i$, $\lambda_3 = -5 - 2i$ — отже, згідно з Теоремою 3 СДР (20) зводиться до системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови рівнянь алгебраїчної системи потрібно знайти власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

що відповідають дійсному та одному з комплексних власних значень.

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою (дійсною) ІК буде

$$-2\dot{y} + 3\dot{z} = -2(3x - 4y - 3z) + 3(2x - 4y) = 2(-2y + 3z) \Rightarrow -2y + 3z = C_1 e^{2t}.$$

2) Для $\lambda_2 = -5 + 2i$ маємо:

$$(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2i & 3 & 2 \\ -1 & 1-2i & -4 \\ -1 & -3 & 5-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} -2-7i \\ 4+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Отже, комплексною ІК буде

$$(-2-7i)\dot{x} + (4+i)\dot{y} + 2\dot{z} = (-2-7i)(-4x-y-z) +$$

$$+(4+i)(3x-4y-3z) + 2(2x-4y) = (-5+2i) \cdot [(-2-7i)x + (4+i)y + 2z],$$

а відповідна їй система дійсних співвідношень (18) запишеться як

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = e^{-5t}(C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t), \\ -7x + y = e^{-5t}(C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t). \end{cases}$$

Далі розв'язуємо отриману систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій:

$$\begin{cases} -2y + 3z = C_1 e^{2t}, \\ -2x + 4y + 2z = e^{-5t}(C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t), \\ -7x + y = e^{-5t}(C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t), \end{cases}$$

звідки визначаємо загальний розв'язок СДР (20) у вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{e^{-5t}[(3C_2 - 16C_3) \cos 2t - (3C_3 + 16C_2) \sin 2t] - 2C_1 e^{-t}}{106}, \\ y = \frac{3e^{-5t}[(7C_2 - 2C_3) \cos 2t - (7C_3 + 2C_2) \sin 2t] - 14C_1 e^{-t}}{106}, \\ z = \frac{e^{-5t}[(7C_2 - 2C_3) \cos 2t - (7C_3 + 2C_2) \sin 2t] + 13C_1 e^{-t}}{53}. \end{cases}$$

Ввівши задля спрощення нові довільні сталі за формулами $\bar{C}_1 = -\frac{C_1}{53}$, $\bar{C}_2 = \frac{7C_2 - 2C_3}{106}$, $\bar{C}_3 = -\frac{7C_3 + 2C_2}{106}$, маємо остаточно

$$\begin{cases} x = e^{-5t}[(\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3) \cos 2t + (\bar{C}_3 - 2\bar{C}_2) \sin 2t] + \bar{C}_1 e^{-t}, \\ y = 3e^{-5t}(\bar{C}_2 \cos 2t + \bar{C}_3 \sin 2t) + 7\bar{C}_1 e^{-t}, \\ z = 2e^{-5t}(\bar{C}_2 \cos 2t + \bar{C}_3 \sin 2t) - 13\bar{C}_1 e^{-t}. \end{cases}$$

Список використаної літератури

1. Рего В. Л., Варга Я. В., Король І. І. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку: навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння». Частина II. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2022. 124 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/44854> (дата звернення: 17.01.2025).
2. Шапочка І. В. Лінійна алгебра. Навчальний посібник. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2022. 233 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/52013> (дата звернення: 17.01.2025).

3. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ : Вища школа, 1994. 454 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/dif_prukl_zad.pdf (дата звернення: 19.01.2025).
4. Rontó M., Raisz P. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. Miskolci egyetemi kiadó, 2004. 324 о.

Reho V. L., Varga I. V. Construction of integrable combinations for normal linear systems of differential equations with constant coefficients.

The method of integrable combinations is one of effective methods for integrating systems of differential equations. In particular, in the case of linear systems with constant coefficients, it enables, under certain conditions, to reduce the system of differential equations to a system of algebraic equations with respect to the desired functions, which greatly simplifies the solution. However, the construction of integrable combinations often causes difficulties, since it is quite complicated to determine them by selection. The purpose of this work is to study the issues of the existence and construction of integrable combinations for normal linear systems of differential equations with constant coefficients, as well as to illustrate the practical application of the results obtained.

Keywords: system of differential equations with constant coefficients, linear homogeneous system of differential equations, linear inhomogeneous system of differential equations, integrable combinations, Cauchy problem.

References

1. Reho, V. L., Varga, Ya. V., & Korol, I. I. (2022). *Higher-order differential equations. Systems of ordinary first-order differential equations: a textbook for the course "Differential equations". Part II*. Uzhhorod: State Higher Educational Institution «UzhNU». Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/44854> [in Ukrainian].
2. Shapochka, I. V. (2022). *Linear algebra. Textbook*. Uzhhorod: Publishing house of UzhNU "Hoverla". Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/52013> [in Ukrainian].
3. Samoilenko, A. M., Kryvosheya, S. A., & Perestyuk, M. O. (1994). *Differential equations in examples and problems*. Kyiv: Higher School. Retrieved from https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/dif_prukl_zad.pdf [in Ukrainian].
4. Rontó, M., & Raisz, P. (2004). *Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal*. Miskolci egyetemi kiadó. [in Hungarian].

Одержано 30.03.2025