

УДК 512.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).79-88](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).79-88)**І. Ю. Раєвська**

Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник, відділ алгебри і топології,
кандидат фізико-математичних наук
raeirina@imath.kiev.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6764-480X>

**ПРО ПРЯМІ ДОБУТКИ НЕМЕТАЦИКЛІЧНИХ p -ГРУП
МІЛЛЕРА–МОРЕНО ТА ЦИКЛІЧНИХ p -ГРУП ЯК АДИТИВНІ
ГРУПИ ЛОКАЛЬНИХ МАЙЖЕ-КІЛЕЦЬ**

В статті розглядається питання, які неабелеві p -груп можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. А саме, доведено, що прямі добутки неметациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп є адитивними групами локальних майже-кілець. Наведено приклади локальних майже-кілець на таких групах.

Ключові слова: p -група, група Міллера–Морено, локальні майже-кільця, адитивна група, прямий добуток.

1. Вступ. Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, досліджується з кінця 1960-х років. Один з перших результатів в цьому напрямку був отриманий Клейом і Малоне [3], які показали, що з точністю до ізоморфізму існує єдине майже-кілець з одиницею, адитивна група якого циклічна, і яке фактично є комутативним кільцем. В статті [10] описано всі можливі типи груп Міллера–Морено, які можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею.

Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном [2] у 1968 році, який встановив, зокрема, що адитивна група скінченного локального майже-кілець повинна бути p -групою. В роботах [13] та [14] вивчались локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера–Морено.

Очевидно, що прямим добутком майже-кілець з одиницею є майже-кілець з одиницею. Водночас прямий добуток двох довільних локальних майже-кілець не є локальним майже-кіллям.

В статті досліджуються прямі добутки неметациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею і, зокрема, локальних майже-кілець.

2. Попередні результати. Наведемо основні означення (див., [3], [7], [2], [4], [12]).

Означення 1. Непорожня множина R з двома бінарними операціями «+» та « $\cdot$ » називається майже-кіллям, якщо:

- 1) $(R, +)$ — група з нейтральним елементом 0,
- 2) $(R, \cdot)$ — напівгрупа,
- 3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ для всіх $x, y, z \in R$.

Таке майже-кілець називається лівим майже-кіллям. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ для всіх $x, y, z \in R$, то отримаємо праве майже-кілець.

Група $(R, +)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R . З аксіоми 3 випливає, що $r \cdot 0 = r \cdot (0 + 0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$, звідки отримуємо $r \cdot 0 = 0$. З цієї ж аксіоми витікає, що $r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0$, та *майже-кільцем з одиницею i* , якщо напівгрупа $(R, \cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i . Група всіх оборотних елементів моноїда $(R, \cdot)$ називається *мультиплікативною групою в R* та позначається через R^* .

Нагадаємо, що *експонентою групи* є найменше спільне кратне порядків її елементів. Зокрема, експонентою скінченної p -групи є максимальний порядок її елементів.

Наступна лема визначає експоненту адитивної групи скінченного майже-кільця з одиницею [3, Theorem 3].

Лема 1. *Експонента адитивної групи скінченного майже-кільця R з одиницею i дорівнює адитивному порядку елемента i , який співпадає з адитивним порядком кожного оборотного елемента в майже-кільці R .*

Означення 2. *Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо множина L всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+ .*

Наступна лема, яка випливає з [1] (леми 3.2, 3.5, 3.9 та наслідок 3.8), характеризує основні властивості скінчених локальних майже-кільців.

Лема 2. *Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх необоротних елементів із R . Тоді R^+ — p -група для деякого простого p , експонента якої збігається з порядком елемента i в R^+ , та виконуються наступні твердження:*

- 1) L — ідеал в R та (R, R) -підгрупа в R^+ ;
- 2) кожна власна R^* -інваріантна підгрупа із R^+ міститься в L ;
- 3) множина $i + L$ утворює нормальну силовську p -підгрупу мультиплікативної групи R^* .

Нагадаємо, що скінченна група називається мінімальною неабелевою групою або групою Міллера–Морено, якщо вона неабелева, а всі її власні підгрупи є абелевими. Ці групи вперше вивчалися Міллером та Мореном в 1903 році [8]. Будова таких груп добре відома і повністю описується в [11].

Лема 3. *Неметациклічні p -групи Міллера–Морено ізоморфні групі $G = ((\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle)$ порядку p^{m+n+1} (p — просте число) з $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $|c| = p$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.*

Розглянемо прямий добуток неметациклічної p -групи Міллера–Морено та циклічної p -групи. Як безпосередній наслідок леми 3, маємо наступну лему.

Лема 4. *Нехай G прямий добуток неметациклічної p -групи Міллера–Морено та циклічної p -групи. Тоді G є групою наступного типу: група $G = ((\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \times \langle d \rangle$ порядку $p^{m+n+k+1}$ з $a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = d^{p^k} = 1$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$, $d^{-1}ad = a$, $d^{-1}bd = b$, $d^{-1}cd = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.*

Позначимо через $F(p^m, p^n, p, p^k)$ адитивно записану групу з леми 4 з такими твірними a, b, c та d порядків p^m, p^n, p та p^k , відповідно, що $-b + a + b = a + c$,

$-b + c + b = c$, $-d + a + d = a$, $-d + b + d = b$, $-d + c + d = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.

Лема 5. Для довільних цілих чисел r та s в групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ виконуються співвідношення:

$$-ar - bs + ar + bs = crs, bs + ar = -crs + ar + bs.$$

Доведення. Оскільки $-b + a + b = a + c$, то $-bs + a + bs = a + cs$. Тоді $-bs + ar + bs = (a + cs)r = ar + crs$. Звідси $bs + ar = -crs + ar + bs$.

Лема 6. Для будь-яких натуральних чисел r, t, s в групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ справедливе співвідношення:

$$(ar + bs)t = art + bst - crs \binom{t}{2}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення проведемо індукцією по t . При $t = 1$ рівність вірна. Нехай при t виконується рівність, тобто

$$(ar + bs)t = art + bst - crs \binom{t}{2}.$$

Покажемо справедливість рівності при $t + 1$:

$$\begin{aligned} (ar + bs)(t + 1) &= art + bst + ar + bs - crs \binom{t}{2} = \\ &= ar(t + 1) + bs(t + 1) - crst - crs \binom{t}{2} = \\ &= ar(t + 1) + bs(t + 1) - crs \left(t + \binom{t}{2} \right) = \\ &= ar(t + 1) + bs(t + 1) - crs \binom{t + 1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (1) справедлива при будь-якому t .

Лема 7. Якщо $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $m > 1$ при $p = 2$, то експонента групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$ дорівнює p^m .

Доведення. Дійсно, для кожного $x \in F(p^m, p^n, p, p^k)$ існують такі цілі числа $\alpha, \beta, \gamma, \phi$, що $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\phi$.

$$\begin{aligned} x^{p^m} &= (a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\phi)^{p^m} = \\ &= (a^\alpha b^\beta)^{p^m} c^{\gamma p^m} d^{\phi p^m} = \\ &= a^{\alpha p^m} b^{\beta p^m} c^{-\alpha \beta \binom{p^m}{2}} = \\ &= a^{\alpha p^m} b^{\beta p^m} c^{-\alpha \beta \frac{p^m(p^m-1)}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Оскільки $|a| = p^m$ та $m \geq n \geq 1$ з $m > 1$ при $p = 2$, то p^m експонента групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$.

3. Майже-кільця з одиницею на групах $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Нехай адитивною групою майже-кільця R з одиницею є прямий добуток деяких неметациклічних p -груп Міллера–Морено та деяких циклічних p -груп. А отже, ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$.

В цій статті розглянемо групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$ з $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $n > 1$, при $p = 2$.

Лема 8. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i , адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ з $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $n > 1$ при $p = 2$. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$ з елементами a, b, c та d , що задовольняють співвідношенням $ap^m = bp^n = cp = dp^k = 0$, $-b + a + b = a + c$, $-b + c + b = c$, $-d + a + d = a$, $-d + b + d = b$, $-d + c + d = c$. Причому $a = i$ та кожний елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p^m$, $0 \leq x_2 < p^n$, $0 \leq x_3 < p$ та $0 \leq x_4 < p^k$.*

Доведення. Оскільки за лемою 1 одиниця i є елементом максимального порядку в групі R^+ , то твірний елемент a цієї групи можна вибрати так, щоб він співпадав з i . Решта впливає з означення групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Лему доведено.

Зокрема, з леми 8 випливає, що для кожного $x \in R$ виконується рівність $xa = ax = x$ та існують однозначно визначені відображення $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ для яких

$$xb = a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x), \quad (2)$$

та

$$xd = a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x). \quad (3)$$

Теорема 1. *Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ — довільні елементи із R , то*

$$\begin{aligned} xy = & a(x_1y_1 + \alpha_b(x)y_2 + \alpha_d(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2 + \beta_d(x)y_4) + \\ & + c(x_3y_1 + \gamma_b(x)y_2 + x_1\beta_b(x)y_3 - x_2\alpha_b(x)y_3 + \gamma_d(x)y_4 - \\ & - x_1x_2\binom{y_1}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{y_2}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{y_4}{2} - \\ & - x_2\alpha_b(x)y_1y_2 - x_2\alpha_d(x)y_1y_2 - \alpha_d(x)\beta_b(x)y_2^2) + \\ & + d(x_4y_1 + \phi_b(x)y_2 + \phi_d(x)y_4), \end{aligned} \quad (4)$$

причому для відображень $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ виконуються наступні твердження:

- 1) $\alpha_b(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_b(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_b(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_b(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_d(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним;
- 2) $\alpha_b(xy) \equiv x_1\alpha_b(y) + \alpha_b(x)\beta_b(y) + \alpha_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^m}$;
- 3) $\beta_b(xy) \equiv x_2\alpha_b(y) + \beta_b(x)\beta_b(y) + \beta_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^n}$;

- 4) $\gamma_b(xy) \equiv x_3\alpha_b(y) + \gamma_b(x)\beta_b(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_b(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_b(y) +$
 $+ \gamma_d(x)\phi_b(y) - x_1x_2\binom{\alpha_b(y)}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_b(y)}{2} -$
 $- \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_b(y)}{2} - x_2\alpha_b(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) -$
 $- \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_b(y)^2 \pmod{p};$
- 5) $\phi_b(xy) \equiv x_4\alpha_b(y) + \phi_b(x)\beta_b(y) + \phi_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^k};$
- 6) $\alpha_d(xy) \equiv x_1\alpha_d(y) + \alpha_b(x)\beta_d(y) + \alpha_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^m};$
- 7) $\beta_d(xy) \equiv x_2\alpha_d(y) + \beta_b(x)\beta_d(y) + \beta_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^n};$
- 8) $\gamma_d(xy) \equiv x_3\alpha_d(y) + \gamma_b(x)\beta_d(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_d(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_d(y) +$
 $+ \gamma_d(x)\phi_d(y) - x_1x_2\binom{\alpha_d(y)}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_d(y)}{2} -$
 $- \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_d(y)}{2} - x_2\alpha_b(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) -$
 $- \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_d(y)^2 \pmod{p};$
- 9) $\phi_d(xy) \equiv x_4\alpha_d(y) + \phi_b(x)\beta_d(y) + \phi_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^k}.$

Доведення. Якщо майже-кільце R є нуль-симетричним, то

$$0 = 0 \cdot b = a\alpha_b(0) + b\beta_b(0) + c\gamma_b(0) + d\phi_b(0),$$

та

$$0 = 0 \cdot d = a\alpha_d(0) + b\beta_d(0) + c\gamma_d(0) + d\phi_d(0).$$

Звідси $\alpha_b(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_b(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_b(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_b(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_d(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Навпаки, якщо мають місце вказані конгруентності, то $0 \cdot b = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$. Також $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, оскільки a — мультиплікативна одиниця в R . Крім того, з рівності $c = -a - b + a + b$ та лівої дистрибутивності множення випливає $0 \cdot c = -0 \cdot a - 0 \cdot b + 0 \cdot a + 0 \cdot b = 0$, звідки

$$0 \cdot x = 0 \cdot (ax_1 + bx_2 + cx_3d + x_4) = (0 \cdot a)x_1 + (0 \cdot b)x_2 + (0 \cdot c)x_3 + (0 \cdot d)x_4 = 0.$$

Отже, майже-кільце R є нуль-симетричним, що доводить твердження (0).

Далі, враховуючи (2) та лему 5, маємо

$$\begin{aligned} xc &= -xa - xb + xa + xb = -cx_3 - bx_2 - ax_1 - c\gamma_b(x) - b\beta_b(x) - a\alpha_b(x) + \\ &+ ax_1 + bx_2 + cx_3 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) = \\ &- bx_2 - ax_1 - b\beta_b(x) - a\alpha_b(x) + ax_1 + bx_2 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) = \\ &- bx_2 + cx_1\beta_b(x) - b\beta_b(x) - ax_1 - a(\alpha_b(x) - x_1) + bx_2 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) = \\ &= cx_1\beta_b(x) - b(x_2 + \beta_b(x)) - a\alpha_b(x) + bx_2 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) = \\ &= cx_1\beta_b(x) - b(x_2 + \beta_b(x)) - a\alpha_b(x) - cx_2\alpha_b(x) + a\alpha_b(x) + bx_2 + b\beta_b(x) = \\ &= c(x_1\beta_b(x) - x_2\alpha_b(x)) - b(x_2 + \beta_b(x)) + bx_2 + b\beta_b(x) = c(x_1\beta_b(x) - x_2\alpha_b(x)). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} xy &= (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)y_1 + (a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x))y_2 + \\ &+ (cx_1\beta_b(x) - x_2\alpha_b(x))y_3 + (a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x))y_4. \end{aligned}$$

За лемою 6, отримуємо

$$1) (ax_1 + bx_2)y_1 = ax_1y_1 + bx_2y_1 - cx_1x_2\binom{y_1}{2};$$

- 2) $(a\alpha_b(x) + b\beta_b(x))y_2 = a\alpha_b(x)y_2 + b\beta_b(x)y_2 - c\alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{y_2}{2}$;
 3) $(a\alpha_d(x) + b\beta_d(x))y_4 = a\alpha_d(x)y_4 + b\beta_d(x)y_4 - c\alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{y_4}{2}$;
 4) $bx_2y_1 + a\alpha_b(x)y_2 = a\alpha_b(x)y_2 + bx_2y_1 - cx_2\alpha_b(x)y_1y_2$;
 5) $b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) + a\alpha_d(x)y_4 = a\alpha_d(x)y_2 + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) -$
 $-c\alpha_d(x)y_2(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) = a\alpha_d(x)y_2 + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) -$
 $-c(x_2\alpha_d(x)y_1y_2 + \alpha_d(x)\beta_b(x)y_2^2)$.

Звідси, враховуючи ліву дистрибутивність, одержуємо

$$\begin{aligned} xy &= a(x_1y_1 + \alpha_b(x)y_2 + \alpha_d(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2 + \beta_d(x)y_4) + \\ &+ c(x_3y_1 + \gamma_b(x)y_2 + x_1\beta_b(x)y_3 - x_2\alpha_b(x)y_3 + \gamma_d(x)y_4 - \\ &- x_1x_2\binom{y_1}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{y_2}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{y_4}{2} - \\ &- x_2\alpha_b(x)y_1y_2 - x_2\alpha_d(x)y_1y_2 - \alpha_d(x)\beta_b(x)y_2^2) + \\ &+ d(x_4y_1 + \phi_b(x)y_2 + \phi_d(x)y_4). \end{aligned}$$

Крім того, в силу закону асоціативності, для всіх $x, y \in R$ справедливі рівності

$$(xy)b = x(yb), \quad (5)$$

та

$$(xy)d = x(yd). \quad (6)$$

Згідно з (2), маємо

$$(xy)b = a\alpha_b(xy) + b\beta_b(xy) + c\gamma_b(xy) + d\phi_b(xy), \quad (7)$$

та $yb = a\alpha_b(y) + b\beta_b(y) + c\gamma_b(y) + d\phi_b(y)$. Підставивши останній вираз в праву частину рівності (5), виводимо

$$\begin{aligned} x(yb) &= a(x_1\alpha_b(y) + \alpha_b(x)\beta_b(y) + \alpha_d(x)\phi_b(y)) + b(x_2\alpha_b(y) + \\ &+ \beta_b(x)\beta_b(y) + \beta_d(x)\phi_b(y)) + c(x_3\alpha_b(y) + \gamma_b(x)\beta_b(y) + \\ &+ x_1\beta_b(x)\gamma_b(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_b(y) + \gamma_d(x)\phi_b(y) - x_1x_2\binom{\alpha_b(y)}{2} - \\ &- \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_b(y)}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_b(y)}{2} - \\ &- x_2\alpha_b(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) - \\ &- \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_b(y)^2) + d(x_4\alpha_b(y) + \\ &+ \phi_b(x)\beta_b(y) + \phi_d(x)\phi_b(y)). \end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки з рівності (5) випливає конгруентність відповідних коефіцієнтів в формулах (7) та (8), то звідси отримуємо твердження (1)–(4). Згідно з (3) маємо:

$$(xy)d = a\alpha_d(xy) + b\beta_d(xy) + c\gamma_d(xy) + d\phi_d(xy) \quad (9)$$

та $yd = a\alpha_d(y) + b\beta_d(y) + c\gamma_d(y) + d\phi_d(y)$. Підставимо отриманий вираз в праву частину рівності (6), отримаємо

$$\begin{aligned} x(yd) = & a(x_1\alpha_d(y) + \alpha_b(x)\beta_d(y) + \alpha_d(x)\phi_d(y)) + b(x_2\alpha_b(y) + \\ & + \beta_b(x)\beta_d(y) + \beta_d(x)\phi_d(y)) + c(x_3\alpha_d(y) + \gamma_b(x)\beta_d(y) + \\ & + x_1\beta_b(x)\gamma_d(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_d(y) + \gamma_d(x)\phi_d(y) - x_1x_2\binom{\alpha_d(y)}{2} - \\ & - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_d(y)}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_d(y)}{2} - \\ & - x_2\alpha_b(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) - \\ & - \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_d(y)^2) + d(x_4\alpha_d(y) + \\ & + \phi_b(x)\beta_d(y) + \phi_d(x)\phi_d(y)). \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки з рівності (6) впливає конгруентність відповідних коефіцієнтів в формулах (9) та (10), то звідси маємо твердження 5)–8). Лему доведено.

4. Локальні майже-кільця на групах $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Нехай адитивною групою локального майже-кільця R є прямий добуток деякої неметациклічної p -групи Міллера–Морено та деякої циклічної p -групи. А отже, R^+ ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$ з елементами a, b, c та d , що задовольняють співвідношенням $ap^m = bp^n = cp = dp^k = 0$, $-b + a + b = a + c$, $-b + c + b = c$, $-d + a + d = a$, $-d + b + d = b$, $-d + c + d = c$. Причому a є одиничним елементом в R та кожний елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p^m$, $0 \leq x_2 < p^n$, $0 \leq x_3 < p$ та $0 \leq x_4 < p^k$. Зокрема, для кожного $x \in R$ виконується рівність $xa = ax = x$ та існують однозначно визначені відображення $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$, для яких виконуються рівності (2) та (3).

Нехай далі множина L всіх необоротних елементів майже-кільця R є підгрупою індексу p в R^+ .

Лема 9. Якщо $|R : L| = p$ та a — одиниця в R , то мають місце наступні твердження:

- 1) $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$;
- 2) елемент $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Доведення. Оскільки $a \notin L$ та $ap \in L$, то $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$. З того, що $R^* = R \setminus L$ впливає, що $R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 | x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}\}$.

Застосовуючи твердження 1) леми 9 до теореми 1, отримуємо наступну формулу для добутку xy довільних елементів $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ локального майже-кільця R .

Наслідок 1. Якщо $x, y \in R$, $|R : L| = p$, $xb = a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x)$ та $xd = a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x)$, то

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha_b(x)y_2 + \alpha_d(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2 + \beta_d(x)y_4) + \quad (11)$$

$$+c\left(x_3y_1 + \gamma_b(x)y_2 + x_1\beta_b(x)y_3 + \gamma_d(x)y_4 - \right. \\ \left. -x_1x_2\binom{y_1}{2}\right) + d(x_4y_1 + \phi_b(x)y_2 + \phi_d(x)y_4),$$

причому для відображень $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ виконуються наступні твердження:

0) $\alpha_b(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_b(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_b(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_b(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_d(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним;

1) $\alpha_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$;

2) якщо $\beta_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$, то $x_1 \equiv 0 \pmod{p}$;

3) $\alpha_b(xy) \equiv x_1\alpha_b(y) + \alpha_b(x)\beta_b(y) + \alpha_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^m}$;

4) $\beta_b(xy) \equiv x_2\alpha_b(y) + \beta_b(x)\beta_b(y) + \beta_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^n}$;

5) $\gamma_b(xy) \equiv \gamma_b(x)\beta_b(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_b(y) + \gamma_d(x)\phi_b(y) \pmod{p}$;

6) $\phi_b(xy) \equiv x_4\alpha_b(y) + \phi_b(x)\beta_b(y) + \phi_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^k}$;

7) $\alpha_d(xy) \equiv x_1\alpha_d(y) + \alpha_b(x)\beta_d(y) + \alpha_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^m}$;

8) $\beta_d(xy) \equiv x_2\alpha_d(y) + \beta_b(x)\beta_d(y) + \beta_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^n}$;

9) $\gamma_d(xy) \equiv \gamma_b(x)\beta_d(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_d(y) + \gamma_d(x)\phi_d(y) \pmod{p}$;

10) $\phi_d(xy) \equiv x_4\alpha_d(y) + \phi_b(x)\beta_d(y) + \phi_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^k}$.

Доведення. Дійсно, твердження 0), 3), 4), 6)–8), 10) повторюють твердження 0)–2), 4)–6), 8) теореми 1. Оскільки $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$ за твердженням 1) леми 9 та $L \in (R, R)$ -підгрупою в R^+ за твердженням 1) леми 2, то $xb \in L$ та $xd \in L$, звідки $a\alpha_b(x) \in L$ та $a\alpha_d(x) \in L$ для кожного $x \in R$. Отже, $\alpha_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$ та $\alpha_d(x) \equiv 0 \pmod{p}$, що доводить твердження 1). Підставляючи отримане значення $a\alpha_b(x)$ та $a\alpha_d(x)$ в конгруентності 1)–8) теореми 1, одержуємо твердження 3)–10) наслідку та формулу множення (11). Поклавши в формулі (11) $y = c$, отримаємо $xc = c(x_1\beta_b(x))$. Отже, якщо $\beta_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$, то $xc = 0$, і тому $x \in L$. За твердженням 2) леми 9 випливає, що $x_1 \equiv 0 \pmod{p}$ та доводить твердження 2).

Покажемо тепер, що для довільного простого числа p та натуральних чисел $m \geq n$ та $m \geq k$ з $m > 1$ при $p = 2$ існує локальне майже-кільце R , адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$.

Лема 10. Нехай R — локальне майже-кільце, адитивна група якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$, $|R : L| = p$, $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $m > 1$ при $p = 2$. Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ — довільні елементи із R , то відображення $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ можуть бути наступними:

$\alpha_b(x) = 0 \pmod{p^m}$, $\gamma_b(x) = 0 \pmod{p}$, $\phi_b(x) = 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(x) = 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(x) = 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(x) = 0 \pmod{p}$, $\phi_d(x) = 1 \pmod{p^k}$,

$$\beta_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}; \\ 0, & \text{if } x_1 \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Нехай $[n, i]$ є i -ою групою порядку n в бібліотеці SmallGroups системи комп'ютерної алгебри GAP [5].

Приклад 1. Нехай $G \cong ((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \times C_5$ [625, 12]. Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$, $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in G$ та $(G, +, \cdot)$ є локальним майже-кілцем, то « $\cdot$ » може бути наступним:

$$x \cdot y = a(x_1y_1) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) + c(x_3y_1 + x_1\beta_b(x)y_3 - x_1x_2 \binom{y_1}{2}) + d(x_4y_1 + y_4),$$

де

$$\beta_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_1 \not\equiv 0 \pmod{5}; \\ 0, & \text{if } x_1 \equiv 0 \pmod{5}. \end{cases}$$

Ця робота була підтримана грантом від Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, I.Yu.R.).

Список використаної літератури

1. Amberg B., Hubert P., Sysak Ya. Local near-rings with dihedral multiplicative group. *J. Algebra*. 2004. Vol. 273. pp. 700–717. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.10.007>
2. Clay J. R. Nearrings. Geneses and Applications. New York : Clarendon Press, Oxford University Press, 1992.
3. Clay J. R., Malone Jr. The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand*. 1966. Vol. 19. pp. 146–150. URL: <https://www.msand.dk/article/view/10803/8824> (date of access: 13.04.2025).
4. Ferrero C. C. Nearrings. Some developments linked to semigroups and groups. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. 609 p.
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0; 2024. URL: <https://www.gap-system.org> (date of access: 13.04.2025).
6. Maxon C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. Vol. 106, pp. 197–205. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
7. Meldrum J. D. P. Near-rings and their links with groups. London : Pitman Publishing Limited, 1985. 273 p.
8. Miller G. A., Moreno H. Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1903. Vol. 4, pp. 398–404
9. Pilz G. Near-rings. The theory and its applications. North Holland : Amsterdam, 1977.
10. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Finite nearrings with identity on Miller–Moreno p -groups. *Mat. Stud.* 2014. Vol. 42, No. 1. pp. 15–20. URL: http://matstud.org.ua/texts/2014/42_1/15-20.pdf (date of access: 13.04.2025).
11. Redei L. Das “schiefe Produkt” in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören. *Comment. Math. Helv.* 1947. Vol. 20, S. 225–264.
12. Sysak Ya. P. Products of groups and local nearrings. *Note di Mat.* 2008. Vol. 28, No. 2. pp. 179–213. URL: <http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153>
13. Раєвська І. Ю. (2011). Локальні майже-кілця на неметациклічній p -групі Міллера–Морено. *Вісн. Київ. Ун-ту. Математика, Механіка*. Т. 25. С. 43–45. URL: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=VKNU_Mat_2011_25_16 (дата звернення: 13.04.2025).
14. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю., Сисак Я. П. Локальні майже-кілця на неметациклічних групах Міллера–Морено. *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки*. 2012.

Т. 3. С. 39–46. URL: https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/issue/view/33/2012_3 (дата звернення: 13.04.2025).

Raievska I. Iu. On direct products of non-metacyclic Miller–Moreno p -groups and cyclic p -groups as additive groups of local nearrings.

The question of which non-abelian p -groups can be additive groups of local nearrings is considered. Namely, it is proved that direct products of non-metacyclic Miller–Moreno p -groups and cyclic p -groups are additive groups of local nearrings. Examples of local nearrings on such groups are given.

Keywords: p -group, Millera–Moreno group, local nearring, additive group, direct product.

References

1. Amberg, B., Hubert, P., & Sysak, Ya. (2004). Local near-rings with dihedral multiplicative group. *J. Algebra*, 273, 700–717. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.10.007>
2. Clay, J. R. (1992). *Nearrings. Geneses and Applications*. New York: Clarendon Press, Oxford University Press.
3. Clay, J. R., & Malone, Jr. (1966). The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand.*, 19, 146–150. Retrieved from <https://www.msand.dk/article/view/10803/8824>.
4. Ferrero, C. C. (2002). *Nearrings. Some developments linked to semigroups and groups*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 609 p.
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0; (2024). Retrieved from <https://www.gap-system.org>
6. Maxon, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z.*, 106, 197–205. <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
7. Meldrum, J. D. P. (1985). *Near-rings and their links with groups*. London: Pitman Publishing Limited.
8. Miller, G. A., & Moreno, H. (1903). Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4, 398–404
9. Pilz, G. (1977). *Near-rings. The theory and its applications*. North Holland: Amsterdam.
10. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2014). Finite nearrings with identity on Miller–Moreno p -groups. *Mat. Stud.*, 42(1), 15–20. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2014/42_1/15-20.pdf
11. Redei L. (1947). Das “schiefe Produkt” in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören. *Comment. Math. Helv.*, 20, 225–264 [in German].
12. Sysak, Ya. P. (2008). Products of groups and local nearrings. *Note di Mat.*, 28(2), 179–213. Retrieved from <http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153>
13. Raievska, I. Yu. (2011). Local nearrings on Miller–Moreno p -group. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mathematics, Mechanics*, 25, 43–45. Retrieved from http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=VKNU_Mat_2011_25_16 [in Ukrainian].
14. Raievska, I. Yu., Raievska, M. Yu., & Sysak, Ya. P. (2012). Local nearrings on non-metacyclic Miller–Moreno groups. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, 3, 39–46. Retrieved from https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/issue/view/33/2012_3 [in Ukrainian].

Одержано 15.03.2025