

УДК 512.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).89-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).89-92)**М. Ю. Раєвська**

Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник, відділ алгебри і топології,
кандидат фізико-математичних наук
raemarina@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6135-7818>

ПРО ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ З НІЛЬПОТЕНТНОЮ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЮ ГРУПОЮ

Важливим питанням є встановлення взаємозв'язків між локальним майже-кільцем та його мультиплікативною групою. В статті досліджуються локальні майже-кільця з нільпотентною мультиплікативною групою. Зокрема, при певних обмеженнях описано адитивну групу та підгрупу необоротних елементів таких майже-кілець.

Ключові слова: локальне майже-кільце, мультиплікативна група, адитивна група, підгрупа необоротних елементів, нільпотентна мультиплікативна група.

1. Попередні відомості.

Майже-кільце R — це непорожня множина з двома бінарними операціями, додаванням “+” і множенням “ $\cdot$ ”, яка відрізняється від кільця тим, що комутативність першої операції та один із дистрибутивних законів (у нашому випадку, правий) не обов'язково виконуються (див., наприклад, [3]).

Група $(R, +)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кілля R . Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0$, та *майже-кільцем з одиницею* i , якщо напівгрупа $(R, \cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i . Група всіх оборотних елементів моноїда $(R, \cdot)$ називається *мультиплікативною групою* в R та позначається через R^* .

Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном [2], який встановив, зокрема, що адитивна група скінченного локального майже-кілля повинна бути p -групою.

Майже-кільце R з одиницею називається *локальним*, якщо множина $L = R \setminus R^*$ всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+ , та *майже-полем*, коли $L = 0$.

Актуальним є питання встановлення взаємозв'язків між локальним майже-кільцем та його мультиплікативною групою. Городником [1] вивчалися локальні майже-кільця, мультиплікативні групи яких є абелевими, і які не є кільцями. А саме, доведено, що множина всіх необоротних елементів такого майже-кілля утворює абелеву підгрупу індексу 2 в його адитивній групі. Зокрема, він описав локальні майже-кільця з циклічними групами одиниць, тобто, якщо мультиплікативна група локального майже-кілля є циклічною, то адитивна група є або групою типу $(2, 2, 2)$, або $(2, 4)$.

Дослідження локальних майже-кілець, мультиплікативні групи яких є в певному сенсі близькими до абелевих, зокрема, мінімальними неабелевими або, в іншій термінології, *групами Міллера–Морено* є природним узагальненням. В

статтях [4], [6], [7] описано локальні майже-кільця та майже-поля з мультиплікативними групами Міллера–Морено.

Наведемо означення нільпотентної групи (див., наприклад, [8]).

Нехай G — група. Нормальний ряд

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G,$$

групи G називається *центральним*, якщо при $i = 0, 1, \dots, n-1$ фактор-група G_{i+1}/G_i міститься в центрі фактор-групи G/G_i . Група G , що має хоча б один центральний ряд, називається *нільпотентною*.

Нагадаємо, що *групою Шмідта* або *мінімальною ненільпотентною* називається скінченна ненільпотентна група, будь-яка власна підгрупа якої нільпотентна.

В статті [9] описується будова груп Шмідта. Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Шмідта вивчені в [5].

В статті досліджуються локальні майже-кільця, мультиплікативні групи яких є в певному сенсі близькими до абелевих, зокрема, нільпотентними.

2. Локальні майже-кільця з нільпотентною мультиплікативною групою.

В наступній теоремі встановлений зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кільці.

Теорема 1. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n з нільпотентною мультиплікативною групою R^* . Якщо $p > 2$ або $p = 2$ та $-i \in Z(R^*)$, то мають місце такі твердження:*

- 1) Адитивна група R^+ — абелева.
- 2) L — абелева та має індекс 2 в R^+ .

Зокрема, R/L є поле.

Доведення. Очевидно, що $-i \in Z(R^*)$ при $p > 2$.

Нехай $r, s, r + s \in R^*$. Маємо

$$\begin{aligned} (-i)(r + s) &= (-i)r + (-i)s = r(-i) + s(-i) = \\ &= -r - s = (r + s)(-i) = (-i)(s + r). \end{aligned}$$

Звідки,

$$(*) \quad r + s = s + r.$$

Далі, нехай $r \in R^*$ та $l \in L$. Тоді

$$\begin{aligned} (l + r)(-i) &= -(l + r) = -r - l = r(-i) - l = (-i)r - l = \\ &= (-i)(r - l(-i)) = (r - l(-i))(-i). \end{aligned}$$

Домножуючи справа на $(-i)$, отримаємо

$$(**) \quad -r + l + r = -l(-i).$$

Для будь-яких $r \in R^*$ маємо

$$(r')' = (-i)(-((-i)(-r))) = (-i)(-i)r = r.$$

Отже,

$$(***) \quad (r')' = r.$$

Нехай $l, s \in L$. Застосовуючи $(**)$ двічі, отримаємо

$$(i + l) + s = s' + (i + l) = (i + s - i) + i + l = i + s + l.$$

Отже, підгрупа L — абелева.

Розглянемо два випадки, тобто коли $|R^+ : L^+| = 2$ та $|R^+ : L^+| > 2$.

Очевидно, якщо $|R^+ : L^+| = 2$, то R^+ — абелева.

Нехай тепер $|R^+ : L^+| > 2$. В групі R^* існують такі r та s , що $r + s \in R^*$. Застосовуючи $(**)$ та $(***)$,

$$l' = -(r + s) + l + (r + s) = -s + (-r + l + r) + s = (l')' = l,$$

для кожного $l \in L$. Це означає, що $L^+ \leq Z(R^+)$.

Нехай $r, s \in R^*$. Якщо $r + s \in R^*$, то $r + s = s + r$ за $(*)$. Зараз припустимо, що $r + s \in L$. Тоді існує такий елемент $t \in R^*$, що $r + t \in R^*$. За $(*)$, $r + t = t + r$. Отже,

$$(1) \quad r + t + s = t + (r + s) = (r + s) + t,$$

за припущенням. Звідки, t та s комутують. Елемент $t + (r + s) \in R^*$. Знову за $(*)$, отримаємо

$$(2) \quad (t + r) + s = s + (t + r)s + r + t.$$

Комбінуючи (1) та (2), маємо $r + s = s + r$. Звідки, R^+ — абелева.

Отже, адитивна група R^+ є абелевою чи $|R^+ : L^+| = 2$.

Ця робота була підтримана грантом від Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, M.Yu.R.).

Список використаної літератури

1. Gorodnik A. Local near-rings with commutative groups of units. *Houston J. Math.* 1999. Vol. 25. pp. 223–234.
2. Maxon C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. Vol. 106, pp. 197–205. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
3. Pilz G. Near-rings. The theory and its applications. North Holland : Amsterdam, 1977. 470 p.
4. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Майже-поля з неабелевою спадковими мультиплікативними групами. *Мат. студії.* 2010. Т. 34, № 1, С. 38–43. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/34_1/38-43.pdf (дата звернення: 12.04.2025).
5. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Шмідта. *Укр. мат. журн.*, переклад. 2020. Т. 71, № 10. С. 1435–1440. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01737-6>
6. Раєвська М. Ю. Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера–Морено. *Вісн. Київ. Ун-ту. Математика. Механіка.* 2011. Т. 25. С. 45–48.
7. Раєвська М. Ю., Сисак Я. П. Про локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера–Морено. *Укр. мат. журн.* Переклад. 2012. Т. 64, № 6. С. 811–818. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0688-z>

8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва : Наука, 1967. 648 с.
9. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные. *Мат. сб.* 1924. Вып. 31, С. 366–372.

Raievska M. Iu. On local nearrings with nilpotent multiplicative group.

An important issue is establishing the relationships between a **local nearring** and its **multiplicative group**. In the paper, local nearrings with **nilpotent multiplicative group** are studied. In particular, under certain restrictions, the **additive groups** and the **subgroups of non-invertible elements** of such nearrings are described.

Keywords: local nearring, multiplicative group, additive group, subgroup of non-invertible elements, nilpotent multiplicative group.

References

1. Gorodnik, A. (1999). Local near-rings with commutative groups of units. *Houston J. Math.*, 25, 223–234.
2. Maxon, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z.*, 106, 197–205. <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
3. Pilz, G. (1977). *Near-rings. The theory and its applications*. North Holland: Amsterdam.
4. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2010). Finite nearfields with hereditary non-abelian groups. *Mat. Stud.*, 34(1), 38–43. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2010/34_1/38-43.pdf [in Ukrainian].
5. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2019). Local nearrings with multiplicative Shmidt group. *Ukr. Mat. Zh.*, translated, 71(10), 1435–1440. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01737-6> [in Ukrainian].
6. Raievska, M. Yu. (2011). Local nearrings with Miller-Moreno multiplicative group. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mathematics, Mechanics*, 25, 45–48 [in Ukrainian].
7. Raievska, M. Yu., & Sysak, Ya. P. (2012). On local nearrings with Miller-Moreno multiplicative group. *Ukr. Mat. Zh.*, translated, 64(6), 811–818. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0688-z> [in Ukrainian].
8. Kurosh, A. G. (1967). *Course of higher algebra*. Moscow: Nauka [in Russian].
9. Shmidt, O. Iu. (1924). Groups, all subgroups of which are special. *Math. col.*, 31, 366–372 [in Russian].

Одержано 15.03.2025