

О. В. Гутік¹, М. В. Серівка²

¹ Львівський національний університет ім. Івана Франка,
професор кафедри кібербезпеки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleg.gutik@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8513-0282>

² Львівський національний університет ім. Івана Франка,
аспірант кафедри алгебри, топології та основ математики
marko.serivka@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0198-2286>

**ПРО НАПІВГРУПУ ЕНДОМОРФІЗМІВ НАПІВГРУПИ $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ З
ДВОЕЛЕМЕНТНОЮ СІМ'ЄЮ $\mathcal{F}^2$ ІНДУКТИВНИХ
НЕПОРОЖНІХ ПІДМНОЖИН У ω**

Ми досліджуємо моноїд $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ усіх ендоморфізмів біциклічного розширення $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . Знайдено підмоноїд $\langle \varpi \rangle^1$ у напівгрупі $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ такий, що кожен елемент напівгрупи $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ однозначно зображається у вигляді добутку моноїдального ендоморфізму напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та елемента з $\langle \varpi \rangle^1$.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, біциклічний моноїд, ендоморфізм, біциклічне розширення.

1. Вступ. У цій праці ми користуємося термінологією з монографій [9,10,19,21]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через ω . Для довільного числа $k \in \omega$ позначимо $[k] = \{i \in \omega : i \geq k\}$.

Нехай $\mathcal{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин у ω . Для довільних $F \in \mathcal{P}(\omega)$ і $n, m \in \omega$ приймемо

$$n - m + F = \{n - m + k : k \in F\}, \quad \text{якщо } F \neq \emptyset$$

і $n - m + F = \emptyset$, якщо $F = \emptyset$. Будемо говорити, що непорожня підсім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ є ω -замкненою, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathcal{F}$ для довільних $n \in \omega$ та $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

Підмножина A в ω називається *індуктивною*, якщо з $i \in A$ випливає, що $i + 1 \in A$. Очевидно, що $\emptyset$ — індуктивна підмножина в ω .

Зауваження 1. (1) За лемою 6 з [2] непорожня множина $F \subseteq \omega$ є індуктивною в ω тоді і лише тоді, коли $(-1 + F) \cap F = F$.

(2) Оскільки множина ω зі звичайним порядком є цілком впорядкованою, то для кожної непорожньої індуктивної підмножини F у ω існує невід'ємне ціле число $n_F \in \omega$ таке, що $[n_F] = F$.

(3) З пункту (1) випливає, що перетин довільної скінченної кількості непорожніх індуктивних підмножин у ω є непорожньою індуктивною підмножиною в ω .

Надалі через $E(S)$ позначатимемо множину ідемпотентів напівгрупи S . Напівгрупа ідемпотентів називається *в'язкою*.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $s \in S$ існує єдиний елемент $s^{-1} \in S$ такий, що $ss^{-1}s = s$ і $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$ [1]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент s^{-1} називається *інверсним до s* .

Якщо S — напівгрупа, то кожен гомоморфізм (ізоморфізм) з S у S називається *ендоморфізмом* (аутоморфізмом) напівгрупи S . Добре відомо, що множина всіх ендоморфізмів (аутоморфізмів) фіксованої напівгрупи S стосовно операції композиції відображень є моноїдом (групою). Надалі через $(s)\varepsilon$ і $(A)\varepsilon$ будемо позначати образ елемента s і підмножини A напівгрупи S , відповідно, стосовно ендоморфізму $\varepsilon: S \rightarrow S$. Ендоморфізм ε напівгрупи S називається *анулюючим*, якщо існує елемент $x \in S$ такий, що $(s)\varepsilon = x$ для всіх $s \in S$. Очевидно, якщо ε — анулюючий ендоморфізм напівгрупи S , то образ $(S)\varepsilon = x$ є ідемпотентом у S .

Нагадаємо (див. [9, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathcal{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p, q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Так, зокрема, класична теорема О. Андерсена [7] стверджує, що (0) -проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0) -простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи. Різні розширення та узагальнення біциклічного моноїда вводилися раніше багатьма авторами [11–13, 15, 24]. Такими, зокрема, є конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості та описання інверсних біпростих і 0 -біпростих ω -напівгруп [8, 22, 23].

Зауваження 2. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p, q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\mathbf{B}_\omega = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leq i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geq i_2. \end{cases}$$

Надалі ми будемо ототожнювати біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p, q)$ з напівгрупою $\mathbf{B}_\omega$.

У праці [2] введено алгебраїчні розширення $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$ біциклічного моноїда для довільної ω -замкнутої сім'ї $\mathcal{F}$ підмножин в ω , які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченню напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи.

Нагадаємо цю конструкцію. Нехай $\mathbf{B}_\omega$ — біциклічний моноїд і $\mathcal{F}$ — непорожня ω -замкнена підсім'я в $\mathcal{P}(\omega)$. На множині $\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}$ означимо бінарну операцію “.” формулою

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases} \quad (1)$$

У [2] доведено, якщо сім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ є ω -замкнутою, то $(\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$ є напівгрупою, а також, що $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, і описано відношення Гріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$ та її множину ідемпотентів. Крім того, у [2] доведено критерії простоти, 0 -простоти, біпростоти та 0 -біпростоти напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$, і вказано умови, коли $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

Припустимо, що ω -замкнена сім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ містить порожню множину $\emptyset$, то з означення напівгрупової операції “.” на $\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}$ випливає, що множина $\mathbf{I} = \{(i, j, \emptyset) : i, j \in \omega\}$ є ідеалом у $(\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$.

Означення 1 ([2]). Для довільної ω -замкненої сім'ї $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ означимо

$$B_\omega^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)/I, & \text{якщо } \emptyset \in \mathcal{F}; \\ (B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot), & \text{якщо } \emptyset \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

У [14, 20] досліджено алгебраїчну структуру напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}}$ у випадку, коли ω -замкнена сім'я $\mathcal{F}$ складається з атомарних підмножин (одноточкових підмножин і порожньої множини) в ω . Зокрема доведено, що за виконання таких умов на сім'ю $\mathcal{F}$ напівгрупа $B_\omega^{\mathcal{F}}$ ізоморфна піднапівгрупі розширення Брандта напівгратки $(\omega, \min)$.

Із зауваження 1(1) випливає, якщо сім'я $\mathcal{F}_0$ складається з індуктивних в ω підмножин і містить порожню множину $\emptyset$ як елемент, то для сім'ї $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \setminus \{\emptyset\}$ множина $B_\omega^{\mathcal{F}}$ з індукованою напівгруповою операцією з $B_\omega^{\mathcal{F}_0}$ є піднапівгрупою в $B_\omega^{\mathcal{F}_0}$.

У [3] досліджуються групові конгруенції на напівгрупі $B_\omega^{\mathcal{F}}$ та її гомоморфні ретракти у випадку, коли $\mathcal{F}$ — ω -замкнена сім'я з індуктивних непорожніх підмножин в ω . Доведено, що конгруенція $\mathfrak{C}$ на $B_\omega^{\mathcal{F}}$ є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупу в $B_\omega^{\mathcal{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, не є відношенням рівності. Також, у [3] описано всі нетривіальні гомоморфні ретракти й ізоморфізми напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}}$.

Ендоморфізми біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи описані в [6], і отримані результати поширено на біциклічні розширення лінійно впорядкованих архімедових напівгруп у [5].

Надалі скрізь в тексті ми вважаємо, що ω -замкнена сім'я $\mathcal{F}$ складається лише з індуктивних непорожніх підмножин у ω . У [4] доведено, що ін'єктивний ендоморфізм ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}}$ є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли ε має три різні нерухомі точки, що еквівалентно існуванню неїдемпотентного елемента $(i, j, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}}$ такого, що $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$.

У [16] досліджено ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . Описано елементи напівгрупи $\mathbf{End}_*^1(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ усіх ін'єктивних моноїдальних ендоморфізмів, тобто які зберігають одиницю моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, і доведено, що відношення Гріна $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ і $\mathcal{J}$ на напівгрупі $\mathbf{End}_*^1(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ збігаються з відношенням рівності. У [17, 18] досліджено структуру напівгрупи $\mathbf{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ усіх моноїдальних ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, напівгрупову операцію та відношення Гріна на напівгрупі $\mathbf{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$.

Надалі через $\overline{\mathbf{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ позначатимемо моноїд усіх ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. За твердженням 1 з [2], не зменшуючи загальності, надалі в цьому тексті можемо вважати, що двоелементна сім'я $\mathcal{F}^2$ збігається з $\{[0], [1]\}$.

2. Про піднапівгрупи в $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та пов'язані з ними ін'єктивні ендоморфізми.

Для довільного $p \in \{0, 1\}$ позначимо $B_{\omega^p}^{\mathcal{F}^2} = \{(i, j, [p]) : i, j \in \omega\}$.

Означимо відображення $\varpi : B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ за формулою

$$(i, j, [p])\varpi = \begin{cases} (i, j, [1]), & \text{якщо } p = 0; \\ (i + 1, j + 1, [0]), & \text{якщо } p = 1. \end{cases}$$

Лема 1. Відображення $\varpi : B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$.

Доведення. За твердженням 3 з [2] для довільного числа $p \in \{0, 1\}$ напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_p^2}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Звідси випливають такі рівності

$$((i_1, j_1, [0]) \cdot (i_2, j_2, [0]))\varpi = (i_1, j_1, [0])\varpi \cdot (i_2, j_2, [0])\varpi$$

і

$$((i_1, j_1, [1]) \cdot (i_2, j_2, [1]))\varpi = (i_1, j_1, [1])\varpi \cdot (i_2, j_2, [1])\varpi$$

для довільних $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \omega$, оскільки відображення $\iota: \mathbf{B}_\omega \rightarrow \mathbf{B}_\omega$, $(i, j) \mapsto (i, j)$ — єдиний автоморфізм біциклічного моноїда $\mathbf{B}_\omega$.

Для довільних $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \omega$ маємо, що

$$\begin{aligned} & ((i_1, j_1, [0]) \cdot (i_2, j_2, [1]))\varpi = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0]) \cap [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [0] \cap [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0] \cap (i_2 - j_1 + [1]))\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (i_1, j_1, [0])\varpi \cdot (i_2, j_2, [1])\varpi = (i_1, j_1, [1]) \cdot (i_2 + 1, j_2 + 1, [0]) = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, (j_1 - i_2 - 1 + [1]) \cap [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2 + 1; \\ (i_1, j_2 + 1, [1] \cap [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2 + 1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, (i_2 + 1 - j_1 + [0]) \cap [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 + 1 \end{cases} = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2 + 1; \\ (i_1, j_2 + 1, [1]), & \text{якщо } j_1 = i_2 + 1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 + 1 \end{cases} = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 - 1 + j_2 + 1, [1]), & \text{якщо } j_1 = i_2 + 1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 + 1 \end{cases} = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} & ((i_1, j_1, [1]) \cdot (i_2, j_2, [0]))\varpi = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [1]) \cap [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1] \cap [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1] \cap (i_2 - j_1 + [0]))\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ & = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, [1])\varpi \cdot (i_2, j_2, [0])\varpi &= (i_1 + 1, j_1 + 1, [0]) \cdot (i_2, j_2, [1]) = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 + 1 - i_2 + [0]) \cap [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2, [0] \cap [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0] \cap (i_2 - j_1 - 1 + [1])), & \text{якщо } j_1 + 1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 + 1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 < i_2; \\ (i_1 + 1 - (j_1 + 1) + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

З вище викладених рівностей випливає, що відображення ϖ є ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Ін'єктивність відображення ϖ очевидна.

Твердження 1. Для довільного натурального числа n виконуються такі рівності

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\varpi^{2n} &= (i + n, j + n, [0]); \\ (i, j, [1])\varpi^{2n} &= (i + n, j + n, [1]); \\ (i, j, [0])\varpi^{2n-1} &= (i + n - 1, j + n - 1, [1]); \\ (i, j, [1])\varpi^{2n-1} &= (i + n, j + n, [0]), \end{aligned}$$

$i, j \in \omega$.

Доведення. З визначення ендоморфізму $\varpi: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\varpi^2 &= (i, j, [1])\varpi = (i + 1, j + 1, [0]); \\ (i, j, [1])\varpi^2 &= (i + 1, j + 1, [0])\varpi = (i + 1, j + 1, [1]). \end{aligned}$$

Далі скористаємося індукцією.

З леми 1 і твердження 1 випливає

Наслідок 1. Для довільного натурального числа n відображення $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$.

Означивши $(i, j, [p])\varpi^0 = (i, j, [p])$, отримуємо, що ϖ^0 є одиницею напівгрупи $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$, а отже, $\langle \varpi \rangle = \{\varpi^n: n \in \mathbb{N}\}$ і $\langle \varpi \rangle^1 = \langle \varpi \rangle \cup \{\varpi^0\}$ є циклічною піднапівгрупою та циклічним підмоноїдом моноїда $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$, відповідно.

Для довільних $s \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$ означимо

$$B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p) = (s, s, [p])B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, s, [p]) = (s, s, [p])B_\omega^{\mathcal{F}^2} \cap B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, s, [p]).$$

З визначення напівгрупової операції на $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що для довільних $s \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$ множина $B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p)$ є піднапівгрупою в $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з одиничним елементом $(s, s, [p])$.

Твердження 2. Для довільного числа $s \in \omega$ виконуються такі рівності

$$B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, 0) = (B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varpi^{2s} \quad i \quad B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, 1) = (B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varpi^{2s-1}.$$

Більше того, для довільних $s \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$ напівгрупа $B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p)$ ізоморфна напівгрупі $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$.

Доведення. Перша частина твердження випливає з твердження 1. Далі скористаємося наслідком 1.

3. Зображення ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ композицією її моноїдальних ендоморфізмів і елементами напівгрупи $\langle \varpi \rangle^1$.

Зафіксуємо довільний ендоморфізм ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. За твердженням 1.4.21 [19] і лемою 2 [2] існує ідемпотент $(s, s, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, $s \in \omega$, $p \in \{0, 1\}$, такий, що $(s, s, [p]) = (0, 0, [0])\varepsilon$. Оскільки $(0, 0, [0])$ — одиниця напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, то $(s, s, [p])$ — одиничний елемент напівгрупи $(B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varepsilon$, а отже, образ $(B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varepsilon$ є піднапівгрупою в $B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p)$. За твердженням 2 існує число $n \in \omega$ таке, що $(s, s, [p]) = (0, 0, [0])\varpi^n$. З ін'єктивності ендоморфізму $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ (наслідок 1) випливає, що композиція $\varepsilon(\varpi^n)^{-1}$ є моноїдальним ендоморфізмом моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Позначимо $\varepsilon_1 = \varepsilon(\varpi^n)^{-1}$. З ін'єктивності ендоморфізму $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що $\varepsilon = \varepsilon_1\varpi^n$. Оскільки часткове відображення $(\varpi^n)^{-1}: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним і $(B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p))(\varpi^n)^{-1} = B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, то ендоморфізм ε_1 визначено коректно, і він єдиний.

Отже, доведена така теорема.

Теорема 1. Для довільного ендоморфізму ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ існують єдиний моноїдальний ендоморфізм $\varepsilon_1: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та єдине невід'ємне ціле число n такі, що $\varepsilon = \varepsilon_1\varpi^n$, причому ендоморфізм ε є ін'єктивним (анулюючим) тоді і лише тоді, коли моноїдальний ендоморфізм ε_1 є ін'єктивним (анулюючим).

З теореми 1 випливає

$$\text{Наслідок 2. } \overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) = End(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) \cdot \langle \varpi \rangle^1.$$

Ін'єктивні моноїдальні ендоморфізми напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ описані в праці [16]. За теоремою 1 з [16] кожен такий ендоморфізм ε є одного з двох типів: або він збігається з перетворенням $\alpha_{k,p}$ моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, яке визначається

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\alpha_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\alpha_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [1]), \end{aligned}$$

для всіх $i, j \in \omega$, де k — деяке натуральне число і $p \in \{0, \dots, k-1\}$, або він збігається з перетворенням $\beta_{k,p}$ моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, яке визначається

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\beta_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\beta_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [0]), \end{aligned}$$

для всіх $i, j \in \omega$, де k — деяке натуральне число ≥ 2 і $p \in \{1, \dots, k-1\}$.

Якщо ендоморфізм ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним відображенням, то з ін'єктивності ендоморфізму $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що $\varepsilon_1 = \varepsilon(\varpi^n)^{-1}$ є моноїдальним ін'єктивним ендоморфізмом моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Отже, виконується така теорема.

Теорема 2. Для довільного ін'єктивного ендоморфізму ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконується лише одна з таких умов:

- (i) існують єдині невід'ємне ціле число n , натуральне число k і $p \in \{0, \dots, k-1\}$ такі, що $\varepsilon = \alpha_{k,p} \varpi^n$;
- (ii) існують єдині невід'ємне ціле число n , натуральне число $k \geq 2$ і $p \in \{1, \dots, k-1\}$ такі, що $\varepsilon = \beta_{k,p} \varpi^n$.

Очевидно, що для довільної напівгрупи S композиція її двох (моноїдальних) ін'єктивних ендоморфізмів є (моноїдальним) ін'єктивним ендоморфізмом.

Через $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ і $End_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ позначимо моноїди усіх ін'єктивних і всіх моноїдальних ін'єктивних ендоморфізмів моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Очевидно, що $End_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ — піднапівгрупа в $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ і в $End(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$, а $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ — піднапівгрупа в $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$.

З теореми 2 випливає

Наслідок 3. $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) = End_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) \cdot \langle \varpi \rangle^1$.

Очевидно, що для довільних $s \in \omega$ і $q \in \{0, 1\}$ відображення $\chi_{s,q}: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, означене

$$(i, j, [p])\chi_{s,q} = (s, s, [q]),$$

для довільних $i, j \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$, є анулюючим ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Також, з визначення ендоморфізму $\chi_{s,q}$ випливає, що для довільного ендоморфізму $\varepsilon: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконуються рівності

$$\varepsilon\chi_{s,q} = \chi_{s,q} \quad \text{і} \quad \chi_{s,q}\varepsilon = \chi_{s_1,q_1}, \quad (2)$$

де числа $s_1 \in \omega$ і $q_1 \in \{0, 1\}$ задовольняють умову $(s, s, [q])\varepsilon = (s_1, s_1, [q_1])$. Отже, множина

$$\overline{End}_{ann}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) = \{\varepsilon \in \overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) : \varepsilon = \chi_{s,q} \text{ для деяких } s \in \omega, q \in \{0, 1\}\},$$

збігається з напівгрупою всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Також з рівності (2) випливає

Теорема 3. Напівгрупа $\overline{End}_{ann}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ ізоморфна нескінченній зліченній напівгрупі правих нулів і вона є мінімальним ідеалом напівгрупи $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$.

Для довільного натурального числа k означимо відображення $\gamma_k: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ і $\delta_k: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ за формулами

$$(i, j, [0])\gamma_k = (i, j, [1])\gamma_k = (ki, kj, [0])$$

та

$$(i, j, [0])\delta_k = (ki, kj, [0]) \quad \text{і} \quad (i, j, [1])\delta_k = (k(i+1), k(j+1), [0]),$$

для всіх $i, j \in \omega$, відповідно.

За теоремою 1 з [17] для довільного неін'єктивного ендоморфізму ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконується лише одна з умов:

- (i) ε — анулюючий ендоморфізм;
- (ii) $\varepsilon = \gamma_k$ для деякого натурального числа k ;
- (iii) $\varepsilon = \delta_k$ для деякого натурального числа k .

Тоді з вище наведених результатів і теореми 1 випливає

Теорема 4. Для довільного неанулюючого неін'єктивного ендоморфізму ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконується лише одна з таких умов:

- (i) існують єдині невід'ємне ціле число n і натуральне число k такі, що $\varepsilon = \gamma_k \varpi^n$;
- (ii) існують єдині невід'ємне ціле число n і натуральне число k такі, що $\varepsilon = \delta_k \varpi^n$.

4. Висновки. У цій праці ми досліджуємо напівгрупу $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ немоноїдальних ендоморфізмів (тобто такі, що не зберігають одиницю) напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . Знайдено підмоноїд $\langle \varpi \rangle^1$ у $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ такий, що кожен елемент напівгрупи $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ однозначно зображається у вигляді добутку моноїдального ендоморфізму напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та елемента з $\langle \varpi \rangle^1$.

Список використаної літератури

1. Vagner, V. V. (1952). Generalized groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 84, 1119–1122 [in Russian].
2. Gutik, O., & Mykhalenych, M. (2020). On some generalization of the bicyclic monoid. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 90, 5–19. <https://doi.org/10.30970/vmm.2020.90.005-019> [in Ukrainian].
3. Gutik, O., & Mykhalenych, M. (2021). On group congruences on the semigroup $B_\omega^{\mathcal{F}}$ and its homomorphic retracts in the case when the family $\mathcal{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 91, 5–24. <https://doi.org/10.30970/vmm.2021.91.005-027> [in Ukrainian].
4. Gutik, O., & Mykhalenych, M. (2022). On automorphisms of the semigroup $B_\omega^{\mathcal{F}}$ in the case when the family $\mathcal{F}$ consists of nonempty inductive subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 93, 54–65. <https://doi.org/10.30970/vmm.2022.93.054-065> [in Ukrainian].
5. Gutik, O., & Prokhorenkova, O. (2022). On homomorphisms of bicyclic extensions of totally ordered groups. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 93, 42–53. <https://doi.org/10.30970/vmm.2022.93.042-053> [in Ukrainian].
6. Gutik, O., Prokhorenkova, O., & Sekh, D. (2021). On endomorphisms of the bicyclic semigroup and the extended bicyclic semigroup. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 92, 5–16. <https://doi.org/10.30970/vmm.2021.92.005-016> [in Ukrainian].
7. Andersen, O. (1952). Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen. PhD Thesis. Hamburg,
8. Bruck, R. H. (1958). *A Survey of Binary Systems*. Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer.
9. Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups*. Vol. 1. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
10. Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1967). *The Algebraic Theory of Semigroups*. Vol. II, Providence, R.I.: American Mathematical Society.
11. Fortunatov, V. A. (1976). Congruences on simple extensions of semigroups. *Semigroup Forum*, 13, 283–295. <https://doi.org/10.1007/BF02194949>
12. Fotedar, G. L. (1974). On a semigroup associated with an ordered group. *Math. Nachr.*, 60, 297–302. <https://doi.org/10.1002/mana.19740600128>

13. Fotedar, G. L. (1978). On a class of bisimple inverse semigroups. *Riv. Mat. Univ. Parma* (4), 4, 49–53.
14. Gutik, O., & Lysetska, O. (2021). On the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ which is generated by the family $\mathcal{F}$ of atomic subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 92, 34–50. <https://doi.org/10.30970/vmm.2021.92.034-050>
15. Gutik, O., Pagon, D., & Pavlyk, K. (2011). Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 15(2), 61–80. <https://doi.org/10.12697/ACUTM.2011.15.10>
16. Gutik, O. & Pozdniakova, I. (2022). On the semigroup of injective monoid endomorphisms of the monoid $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ with the two-elements family $\mathcal{F}$ of inductive nonempty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 94, 32–55. <https://doi.org/10.30970/vmm.2022.94.032-055>
17. Gutik, O. & Pozdniakova, I. (2023). On the semigroup of non-injective monoid endomorphisms of the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ with the two-elements family $\mathcal{F}$ of inductive nonempty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 95, 14–27. <https://doi.org/10.30970/vmm.2023.95.014-027>
18. Gutik, O. & Pozdniakova, I. (2024). On the semigroup of all monoid endomorphisms of the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ with the two-elements family $\mathcal{F}$ of inductive nonempty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 96, 5–24. <https://doi.org/10.30970/vmm.2024.96.005-024>
19. Lawson, M. (1998). *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*. Singapore: World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3645>
20. Lysetska, O. (2020). On feebly compact topologies on the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}^1}$. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 90, 48–56. <https://doi.org/10.30970/vmm.2020.90.048-056>
21. Petrich, M. (1984). *Inverse Semigroups*. New York: John Wiley & Sons.
22. Reilly, N. R. (1966). Bisimple ω -semigroups. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7, 160–167. <https://doi.org/10.1017/S2040618500035346>
23. Warne, R. J. (1966). A class of bisimple inverse semigroups. *Pacif. J. Math.*, 18, 563–577. <https://doi.org/10.2140/pjm.1966.18.563>
24. Warne, R. J. (1967). Bisimple inverse semigroups mod groups. *Duke Math. J.*, 34, 787–812. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-67-03481-3>

Gutik O. V., Serivka M. V. On the semigroup of endomorphisms of the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of ω .

We study the semigroup $\overline{End}(B_{\omega}^{\mathcal{F}^2})$ of all endomorphisms of the bicyclic extension $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of ω . The submonoid $\langle \varpi \rangle^1$ of $\overline{End}(B_{\omega}^{\mathcal{F}^2})$ with the property that every element of the semigroup $\overline{End}(B_{\omega}^{\mathcal{F}^2})$ has the unique representation as the product of the monoid endomorphism of $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ and the element of $\langle \varpi \rangle^1$ is constructed.

Keywords: inverse semigroup, bicyclic monoid, endomorphism, bicyclic extension.

Одержано 19.06.2025