

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).305-313](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).305-313)**О. А. Капустян¹, Н. В. Касімова²**

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень,
доктор фізико-математичних наук, ст. наук. співр.

olenakapustian@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2629-0750>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних, доцент

Zadoianchuk.nv@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6032-0343>

НАБЛИЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗБУРЕНИМИ НЕАВТОНОМНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У роботі розглядається задача оптимального керування розв'язками нелінійного гіперболічного рівняння зі збуреними коефіцієнтами виду $f(t/\varepsilon, y)$, адитивним керуванням, та квадратичним цільовим функціоналом. Доведено, що оптимальне значення збуреної задачі близьке до оптимального значення відповідної задачі із усередненими коефіцієнтами.

Ключові слова: задача оптимального керування, гіперболічне рівняння, усереднення, збурення, нелінійність.

1. Вступ. Ідея переходу до усереднених параметрів [1] широко використовується в теорії диференціальних рівнянь та теорії оптимального керування [2], [3], [4], [5]. Для керованих процесів параболічного типу процедура усереднення була обґрунтована в роботах [6]–[9]. В даній роботі ми доводимо можливість апроксимації оптимального керування через перехід до задачі з усередненими коефіцієнтами в задачі, що описується нелінійним неавтономним гіперболічним рівнянням.

2. Постановка задачі.

У циліндрі $Q_T = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = \Delta y(t, x) + f(t/\varepsilon, y(t, x)) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) = & \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) y(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ & + \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) y_t(T, x) dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $f : R_+ \times R \rightarrow R$, $g : R \rightarrow R$ – неперервні функції, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_1 \in H_0^1(\Omega)$ – задані початкові дані, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\psi_1 \in R$, $\psi_2 \in R$ – задані константи, $q_1, q_2 \in L^2(\Omega)$ – задані функції, і для деяких додатних констант C_1, C_2 виконуються умови:

$$\forall t \geq 0, \forall y \in R \quad |f(t, y)| \leq C_1(1 + |y|), \quad (4)$$

$$\forall y \in R \quad |g(y)| \leq C_2, \quad (5)$$

$$U \text{ замкнена та опукла, } 0 \in U. \quad (6)$$

Під розв'язком початково-крайової задачі (1) будемо розуміти функцію $y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ таку, що $y_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ і для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0, T)$ вірна рівність

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (y_t, \xi) \eta_t dt + \\ & + \int_0^T \left((y, \xi)_{H_0^1} - (f(t/\varepsilon, y), \xi) - (g(y)u, \xi) \right) \eta dt = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де тут і надалі через $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Відомо [10], що за припущень (4)–(6) для кожного розв'язку (1) справедливі вкладення

$$y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad y_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)),$$

тобто задача (1)–(3) поставлена коректно в тому сенсі, що для кожного допустимого керування u і відповідного йому розв'язку y задачі (1) визначене значення цільового функціоналу $J(y, u) < \infty$.

В роботі доведено, що за припущень (4)–(6) задача оптимального керування (1)–(3) має розв'язк $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$, де y^ε – розв'язок (1) з керуванням $u = u^\varepsilon$. При цьому умови (4)–(6) не гарантують єдиності такого розв'язку.

Далі робиться припущення про те, що рівномірно по $y \in R$ існує границя

$$\bar{f}(y) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y) ds. \quad (8)$$

Основним результатом роботи є встановлення збіжності

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (9)$$

де $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ – оптимальний процес у задачі (1)–(3) із усередненою функцією $\bar{f}$:

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = \Delta y(t, x) + \bar{f}(y(t, x)) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x), \end{cases} \quad (10)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) = & \alpha_1 \left(\int_\Omega q_1(x) y(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ & + \alpha_2 \left(\int_\Omega q_2(x) y_t(T, x) dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf \end{aligned} \quad (12)$$

Також доведена збіжність оптимальних керувань і функцій стану у відповідних топологічних просторах.

3. Основний результат.

Перш за все, зауважимо, що за умови існування границі (8) усереднена функція $\bar{f}$ задовольняє умови (4), (5) з тими ж константами. Отже, всі результати щодо існування і властивостей розв'язків задачі (1) будуть справедливими і для розв'язків задачі (10). Зокрема, справедлива наступна лема.

Лема 1. [10] *За умов (4)–(6) для кожного $u \in L^2(Q_T)$, $\varepsilon > 0$ задача (1) має принаймні один розв'язок. Кожен розв'язок (1) задовольняє наступні оцінки: для майже всіх (м.в.) $t \in (0, T)$*

$$\frac{d}{dt} \left(\|\nabla y(t)\|^2 + \|y_t(t)\|^2 \right) \leq C_3(1 + \|\nabla y(t)\|^2 + \|y_t(t)\|^2 + \|u(t)\|^2), \quad (13)$$

для всіх $t \in [0, T]$

$$\|\nabla y(t)\| + \|y_t(t)\| \leq C_4(1 + \|y_0\|_{H_0^1} + \|y_1\| + \|u\|_{Q_T}), \quad (14)$$

де тут і надалі використано позначення $\|u\|_{Q_T} := \left(\int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Встановимо розв'язність задачі оптимального керування (1)–(3)

Теорема 1. *За умов (4)–(6) задача оптимального керування (1)–(3) для кожного $\varepsilon > 0$ має принаймні один розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Позначимо через $\hat{J}^\varepsilon$ мінімальне значення цільового функціоналу, тобто $\hat{J}^\varepsilon$ – це значення задачі оптимального керування (1)–(3).

Розглянемо мінімізуючу послідовність $\{u_n, y_n\}$ таку, що

$$J(u_n, y_n) < \hat{J}^\varepsilon + 1/n. \quad (15)$$

Відповідно до (15) послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$, а отже по підпослідовності

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо в } L^2(Q_T). \quad (16)$$

Тоді з (13), (14) і рівняння (1) виводимо, що

$$\begin{aligned} \{y_n\} & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \left\{ \frac{\partial y_n}{\partial t} \right\} & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \left\{ \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \right\} & \text{ обмежена в } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \quad (17)$$

Отже, існує функція $y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ з $y_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ така, що по підпослідовності

$$\begin{aligned} y_n & \rightarrow y \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} & \rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Крім того, використовуючі лему про компактність [10] виводимо, що по підпослідовності

$$y_n \rightarrow y \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ та майже скрізь в } Q_T, \quad (18)$$

і для всіх $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y_n(t) &\rightarrow y(t) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ і сильно в } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial y_n(t)}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial y(t)}{\partial t} \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ і сильно в } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Надалі будемо використовувати наступний варіант теореми Лебега про мажоровану збіжність: якщо задано послідовності вимірних функцій $p_n, q_n : Q \mapsto R$ таких, що $p_n \rightarrow p$ м.с., $|p_n| \leq q_n$, $q_n \rightarrow q$ в $L^1(Q)$, то $p_n \rightarrow p$ в $L^1(Q)$.

Використовуючи цю теорему і умови (4), (5), ми виводимо

$$f(t/\varepsilon, y_n) \rightarrow f(t/\varepsilon, y) \text{ в } L^2(Q_T),$$

$$g(y_n) \rightarrow g(y) \text{ в } L^2(Q_T).$$

Ці збіжності дозволяють перейти до границі в рівності (7), записаній для y_n , і отримати, що y є розв'язком (1) з керуванням u .

Після цього, переходячи до нижньої границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності (15) і скориставшись оцінкою

$$\liminf \|u_n\|_{Q_T} \geq \|u\|_{Q_T},$$

яка є наслідком слабкої збіжності (16), одержуємо

$$J(y, u) \leq \liminf J(y_n, u_n) \leq \hat{J}^\varepsilon.$$

Це означає, $\{y, u\}$ є розв'язком (1)–(3). Теорема доведена.

Тепер розглянемо усереднену задачу

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = \Delta y(t, x) + \bar{f}(y(t, x)) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x), \end{cases} \quad (20)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) &= \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) y(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ &+ \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) y_t(T, x) dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf \end{aligned} \quad (22)$$

де неперервна функція $\bar{f} : R \rightarrow R$ визначена у (8).

Як вже зазначалося вище, функція $\bar{f}$ задовольняє умови (4), тому задача (20)–(22) має принаймні один розв'язок $\{\bar{y}, \bar{u}\}$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (4)–(6), (8) і, крім того,

$$\forall u \in U \text{ задача (20) має єдиний розв'язок,} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \\ |y - z| < \delta \Rightarrow |f(t, y) - f(t, z)| < \epsilon. \end{aligned} \quad (24)$$

Тоді

$$J(y^\epsilon, u^\epsilon) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}) \text{ при } \epsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

Доведення. Нехай $\epsilon_n \rightarrow 0$, $\{y_n, u_n\} := \{y^{\epsilon_n}, u^{\epsilon_n}\}$ оптимальний процес у (1)–(3) для $\epsilon = \epsilon_n$. Завдяки включенню $0 \in U$ та оптимальності $\{y_n, u_n\}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_n^2(t, x) dt dx \leq J(y_n, u_n) \leq J(z_n, 0) \leq \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) z_n(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ + \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) z_{nt}(T, x) dx - \psi_2 \right)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

де z_n – розв'язок (1) з $\epsilon = \epsilon_n$, $u \equiv 0$.

З оцінки (14), застосованої до z_n , та нерівності (26) виводимо, що існує константа $C_5 > 0$, яка залежить лише від початкових даних задачі, така що

$$\int_{Q_T} u_n^2(t, x) dt dx \leq C_5.$$

Таким чином, послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$. Далі ми можемо повторити міркування (16)–(19) Теорема 1 і зробити висновок про те, що для деякого $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ по підпослідовності:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow \bar{u} \text{ слабо в } L^2(Q_T) \\ y_n &\rightarrow \bar{y} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ y_n &\rightarrow \bar{y} \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ та м.с. в } Q_T, \\ y_n(t) &\rightarrow \bar{y}(t) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ і сильно в } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial y_n(t)}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial \bar{y}(t)}{\partial t} \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ і сильно в } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (27)$$

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ задовольняє (1), тобто для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0, T)$ вірна рівність

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\bar{y}_t, \xi) \eta_t dt + \\ + \int_0^T \left((\bar{y}, \xi)_{H_0^1} - (\bar{f}(\bar{y}), \xi) - (g(\bar{y})\bar{u}, \xi) \right) \eta dt = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Для цього обґрунтуємо граничний перехід в рівності (7), записаній для y_n, u_n, ϵ_n .

Перехід в перших двох даданках рівності (7) є наслідком слабких збіжностей з (27). З теореми Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$g(y_n) \rightarrow g(\bar{y}) \text{ in } L^2(Q_T). \quad (29)$$

Тоді зі слабкої збіжності $\{u_n\}$ виводимо можливість граичного переходу в останньому доданку рівності (7).

Слідуючи міркуванням роботи [9], покажемо, що для $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0, T)$

$$\int_{Q_T} f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t, x)\right) \xi(x) \eta(t) dt dx \rightarrow \int_{Q_T} \bar{f}(\bar{y}(t, x)) \xi(x) \eta(t) dt dx \quad (30)$$

Спочатку зауважимо, що з (8), умови (4) та теореми Лебега про мажоровану збіжність для будь-яких $0 < a < b$, $\psi \in L^2(\Omega)$

$$\int_a^b \int_{\Omega} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \psi(x)\right) - \bar{f}(\psi(x)) \right) \xi(x) \eta(t) dx dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Далі з (27) та теореми Єгорова маємо, що для кожного $\delta > 0$ існує $Q_1^\delta \subset Q_T$ така, що $\mu(Q_1^\delta) < \delta$ та

$$y_n \rightarrow \bar{y} \text{ рівномірно на } Q_T \setminus Q_1^\delta, \quad n \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Оскільки $\bar{y} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, то існує послідовність кусково сталих функцій

$$y^M(t, x) = \sum_{k=1}^M y_k^M(x) \cdot \chi_{A_k^M}(t),$$

де $\{y_k^M\} \subset L^2(\Omega)$, $\{A_k^M = (a_k^M, b_k^M)\}$ - покриття $(0, T)$, така, що при $M \rightarrow \infty$

$$y^M \rightarrow \bar{y} \text{ в } L^2(Q_T) \text{ і м.с. в } Q_T.$$

Крім того, для кожного $\delta > 0$ існує $Q_2^\delta \subset Q_T$ така, що $\mu(Q_2^\delta) < \delta$ та

$$y^M \rightarrow \bar{y} \text{ рівномірно на } Q_T \setminus Q_2^\delta, \quad M \rightarrow \infty, \quad (33)$$

де μ - міра Лебега в R^2 .

Звідси і з нерівностей (4) маємо наступні оцінки

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t, x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t, x)\right) \right) \xi(x) \eta(t) dt dx \leq \\ & \int_{Q_T \setminus Q_1^\delta} \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t, x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t, x)\right) \right| |\xi(x) \eta(t)| dt dx + \\ & + \int_{Q_1^\delta} C_1 (2 + |y_n(t, x)| + |\bar{y}(t, x)|) |\xi(x) \eta(t)| dt dx =: I_1^{(1)} + I_1^{(2)}. \end{aligned}$$

З (14) маємо

$$\|y_n\|_{Q_T} + \|\bar{y}\|_{Q_T} \leq C_6. \quad (34)$$

Тоді з (34) і нерівності Гельдера

$$\forall \delta > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad I_1^{(2)} \leq C_7 \cdot \delta^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

З умови (24) виводимо, що $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall t \in [0, T]$

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \xi, z, |\xi - z| < \lambda : \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \xi\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, z\right) \right| < \varepsilon.$$

Отже, з (32)

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad I_1^{(1)} \leq \delta.$$

Далі, для кожної функції $y^M(t, x)$ маємо з (31)

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t, x)\right) - \bar{f}(y^M(t, x)) \right) \xi(x) \eta(t) dt dx = \\ & = \sum_{k=1}^M \int_{A_k^M} \int_{\Omega} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_k^M(x)\right) - \bar{f}(y_k^M(x)) \right) \xi(x) \eta(t) dx dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Таким чином, $\forall M \geq 1 \exists N(M) \forall n \geq N(M)$

$$\left| \int_{Q_T} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t, x)\right) - \bar{f}(y^M(t, x)) \right) \xi(x) \eta(t) dt dx \right| < \delta.$$

Далі, в силу (24) існує M_0 таке, що $\forall M \geq M_0 \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T/Q_2^\delta} \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t, x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t, x)\right) \right| |\xi(x) \eta(t)| dt dx < \delta, \\ & \int_{Q_T \setminus Q_2^\delta} |\bar{f}(\bar{y}(t, x)) - \bar{f}(y^M(t, x))| |\xi(x) \eta(t)| dt dx < \delta. \end{aligned}$$

Таким чином, для $M \geq M_0$ і $n \geq N(M)$ отримуємо

$$I_2 \leq \int_{Q_2^\delta} 2C_1(1 + |\bar{y}(t, x)|) |\xi(x) \eta(t)| dx dt + 3\delta \leq C_8 \delta^{\frac{1}{2}} + 3\delta.$$

Об'єднавши всі ці нерівності, отримаємо (30).

Нерівності (27)–(30) дають можливість перейти до границі в рівності (7), і одержати, що $\bar{y}$ є розв'язком (20) з керуванням $\bar{u}$.

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у (20)–(22).

Для кожного $u \in U$ і відповідного розв'язку y_n задачі (1) маємо

$$J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y_n, u).$$

Міркуючи так само, як і в Теоремі 1, ми отримуємо, що по підпоследовності

$$y_n \rightarrow y \text{ у сенсі (27)}$$

і y є в силу (23) єдиним розв'язком (20) для відповідного керування u .

Після переходу до границі отримуємо

$$\begin{cases} \underline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \geq J(\bar{y}, \bar{u}), \\ \overline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y, u). \end{cases} \quad (36)$$

Отже, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у (20)–(22).

Якщо ми покладемо $u = \bar{u}$ у попередніх міркуваннях, ми отримаємо з (36)

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq \underline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq \overline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y, \bar{u}).$$

З цих нерівностей випливає (9). Теорема доведена.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень.

У роботі вперше розглянута нова постановка задачі оптимального керування розв'язками нелінійного гіперболічного рівняння зі збуреними коефіцієнтами виду $f(t/\varepsilon, y)$ та квадратичним цільовим функціоналом. Керування, яке входить до рівняння, є адитивним. Наявність "швидкої" за часом змінної призводить до застосування процедури усереднення для обґрунтування наближеного керування збуреної задачі.

Доведено розв'язність цієї задачі та обґрунтовано близькість мінімальних значень критеріїв якості на розв'язках вихідної та усередненої задач.

У подальшому планується продовжити дослідження з цієї тематики за двома напрямками: 1) розглянути еволюційні рівняння з нелінійностями більш ніж лінійного росту, 2) дослідити можливість перенесення отриманих результатів на багатовимірні функції взаємодії.

Список використаної літератури

1. Bogolyubov N. N., Mitropol'skii Yu. A., Samoilenko A. M. Method of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics. Kyiv : Naukova Dumka, 1969.
2. Samoilenko A. M., Stanzhitskii A. M. On averaging differential equations on an infinite interval. *Differ. Uravn.* 2006. Vol. 42, № 4. pp. 476–482
3. Sanders J. A., Verhulst F. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. N.Y. : Springer, 1985.
4. Nosenko T. V., Stanzhyts'kyi O. M. Averaging method in some problems of optimal control. *Nonlinear Oscillations.* 2008. Vol. 11, № 4. pp. 539–547
5. Kichmarenko O., Stanzhytskyi O. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 2018. Vol. 18, № 2. pp. 196–211.
6. Капустян О. А., Сукретна А. В. Наближений усереднений синтез в задачі оптимального керування для параболічного рівняння. *Український математичний журнал.* 2004. Т. 56, № 10. С. 1653–1664.
7. Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Sukretna A. V. Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2011. Vol. 63., № 5. pp. 759–767.
8. Nakonechyi O. G., Kapustian O. A., Chikrii A. O. Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and System Analysis.* 2019. Vol. 55., № 5. pp. 785–795.

9. Kapustyan O. V., Stanzhytskyi O. M., Fartushny I. D. Averaging method in the problem of optimal control for a perturbed parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 74, No. 7. pp. 2257–2264.
10. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of equations of mathematical physics. *AMS*. 2002.

Kapustian O. A., Kasimova N. V. Approximate optimal control for a nonlinear hyperbolic equation with perturbed non-autonomous coefficients.

In the paper we consider the problem of optimal control for solutions of a nonlinear hyperbolic equation with perturbed coefficients of the form $f(t/\varepsilon, y)$, additive control, and a quadratic objective functional. It is proved that the optimal value of the perturbed problem is close to the optimal value of the corresponding problem with averaged coefficients.

Keywords: optimal control problem, hyperbolic equation, averaging, perturbation, non-linearity.

References

1. Bogolyubov, N. N., Mitropol'skii, Yu. A., & Samoilenko, A. M. (1969). *Method of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*. Kyiv: Naukova Dumka.
2. Samoilenko, A. M., & Stanzhitskiĭ, A. M. (2006). On averaging differential equations on an infinite interval. *Differ. Uravn.*, 42(4), 476–482.
3. Sanders, J. A., & Verhulst, F. (1985). *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. N.Y.: Springer.
4. Nosenko, T. V., & Stanzhyts'kyi, O. M. (2008). Averaging method in some problems of optimal control. *Nonlinear Oscillations*, 11(4), 539–547.
5. Kichmarenko, O., & Stanzhytskyi, O. (2018). Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 18(2), 196–211.
6. Kapustian, O. A., & Sukretna, A. V. (2004). Approximate averaging synthesis in the optimal control problem for parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 56(10), 1653–1664 [in Ukrainian].
7. Kapustyan, O. V., Kapustian, O. A., & Sukretna, A. V. (2011). Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem. *Ukrainian Mathematical Journal*, 63(5), 759–767.
8. Nakonechyi, O. G., Kapustian, O. A., & Chikrii, A. O. (2019). Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and System Analysis*, 55(5), 785–795.
9. Kapustyan, O. V., Stanzhytskyi, O. M., & Fartushny, I. D. (2022). Averaging method in the problem of optimal control for a perturbed parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 74(7), 2257–2264 [in Ukrainian].
10. Chepyzhov, V. V., & Vishik, M. I. (2002). Attractors of equations of mathematical physics. *AMS*.

Одержано 13.12.2024