

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).106-117](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).106-117)**О. М. Щитов¹, М. Ф. Мормуль²**

¹ НВК-Ліцей № 100 м. Дніпро,
викладач математики та фізики,
кандидат фізико-математичних наук
alexander.shchitov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1435-2918>

² Університет митної справи та фінансів,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інженерії програмного забезпечення,
кандидат технічних наук
nikolaj.mormul@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8036-3236>

ПРЕЦИЗИЙНІ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-ХААРА ДЛЯ ФУНКЦІЙ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ

Розглядаються точні оцінки коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації. Досліджуються властивості та застосування перетворень Фур'є-Хаара в контексті функцій з обмеженою варіацією, що має важливе значення для теоретичних та практичних задач в області математичного аналізу та обробки сигналів. Оцінки коефіцієнтів перетворення дозволяють більш детально вивчити зв'язок між характеристиками функцій та їх перетвореннями, а також ефективно застосовувати ці методи в різних галузях науки та техніки, таких як обробка зображень, числові методи та теорія апроксимацій. У ході дослідження отримано точні значення верхніх меж модуля коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій однієї змінної на класах функцій граничних варіацій KV_p ($1 \leq p < \infty$). Досліджено поведінку коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій кількох змінних для функцій граничних варіацій з класів $V_{p,d}(I^d)$, $KV_{p,d}$ ($1 \leq p < \infty$) та $KV_{1,d}^*$. На цих класах функцій кількох змінних отримано точні результати.

Ключові слова: система Фур'є-Хаара, функції обмеженої варіації, точні оцінки, прецизійні коефіцієнти, вейвлет-аналіз.

1. Вступ. Система функцій Альфреда Хаара була введена угорським вченим у 1909 році [1]. Перетворення Фур'є-Хаара стало потужним математичним інструментом для аналізу функцій, що застосовується в різних галузях, таких як обробка сигналів, числові методи, теорія апроксимацій та інші. Особливе значення має вивчення точних оцінок коефіцієнтів перетворення для функцій обмеженої варіації, оскільки вони дозволяють краще розуміти структуру функцій та їх взаємодію з перетворенням, що є важливим аспектом у багатьох теоретичних і практичних задачах. Однією з основних проблем є точність та ефективність оцінок коефіцієнтів для цих функцій, що потребує глибокого математичного аналізу та розробки нових підходів для їх точного визначення.

У сучасній прикладній математиці, теорії сигналів і чисельному аналізі все більшого значення набувають прецизійні методи аналізу та обробки функцій, зокрема таких, що мають обмежену варіацію. Функції з обмеженою варіацією є природною моделлю для опису сигналів, зображень, а також реальних фізичних процесів, що містять стрибки, сингулярності або локальні особливості. У цьому контексті особливу роль відіграє перетворення Хаара як найпростішого випадку вейвлет-перетворення, заснованого на ортогональній системі функцій, що дає змогу здійснювати ефективний розклад подібних функцій.

Аналіз точного (прецизійного) значення коефіцієнтів перетворення Хаара або Фур'є-Хаара є важливим не лише з теоретичної точки зору, але і для практичних застосувань — у стисненні сигналів, розпізнаванні образів, адаптивній апроксимації, а також в оптимізації обчислювальних методів.

Незважаючи на широке застосування вейвлет-аналізу, питання точності оцінювання та обмежень для коефіцієнтів розкладу функцій з обмеженою варіацією залишається недостатньо дослідженим, особливо у випадку некласичних (ламаних або розривних) функцій. Це створює потребу в детальному математичному вивченні структури таких коефіцієнтів, умов їх точного обчислення та оцінки похибок при апроксимації.

Отже, дослідження прецизійних значень коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара має високу актуальність, оскільки сприяє розвитку теорії вейвлетів, підвищує точність чисельного аналізу функцій та забезпечує прикладну базу для новітніх інформаційних технологій.

Об'єкт дослідження є функції з обмеженою варіацією та їх представлення у базисі Хаара.

Предмет дослідження — прецизійні значення коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій з обмеженою варіацією, їхні властивості збіжності, точності та стабільності обчислення.

Метою роботи є розробка точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації, а також дослідження їх властивостей у контексті теорії апроксимацій і числових методів. Вивчення цих оцінок дозволить поліпшити розуміння взаємозв'язку між функціями та їх перетвореннями, що має широке застосування у математиці та інженерії.

Для досягнення мети використано методи математичного аналізу, теорії функцій, теорії апроксимацій та обробки сигналів. Зокрема, застосовано апарат дослідження функцій з обмеженою варіацією, що дало змогу обґрунтувати коректність використання базису Хаара та оцінити властивості збіжності рядів. Методи апроксимаційної теорії були використані для аналізу точності та швидкості збіжності розкладів, а техніки обробки сигналів — для побудови ефективних алгоритмів обчислення коефіцієнтів Фур'є-Хаара. Обчислення реалізовано шляхом інтегрування функцій із базисними елементами Хаара та чисельного уточнення результатів кінцево-різницеви́ми та ітераційними схемами. Це дозволило отримати прецизійні значення коефіцієнтів та оцінити їх стабільність у класі функцій з обмеженою варіацією.

Гіпотеза дослідження базується на тому, що для функцій обмеженої варіації можна знайти точні і ефективні оцінки коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара, які дозволяють зменшити похибки апроксимацій та підвищити точність застосування цих перетворень у числових методах та обробці сигналів.

Наукова новизна роботи полягає у розробці нових точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації, а також у встановленні їх властивостей, які до цього часу були недостатньо вивчені. Розроблені оцінки дозволяють покращити ефективність математичних методів у різних галузях науки та техніки, зокрема в обробці зображень, числових методах та теорії апроксимацій. Результати дослідження можуть стати основою для подальших розробок у напрямку оптимізації перетворень Фур'є-Хаара та їх застосування в практичних задачах.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Система функцій Хаара є ортонормованою на $[0, 1]$. Її властивості протягом десятиріч вивчалися багатьма вченими. Але в останні роки їм приділяли увагу в основному з практичної точки зору. Дослідники надають сучасні підходи до оцінки коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації, зокрема в контексті статистичного оцінювання, онлайн-прогнозування та обробки сигналів. Так, у статті [2] розглядається мінімаксна оцінка функцій обмеженої варіації з розкиданими даними, зокрема через жорстке порогове обмеження емпіричних коефіцієнтів Фур'є-Хаара. Робота [3] пропонує алгоритм для онлайн-прогнозування послідовностей з обмеженою варіацією, використовуючи коефіцієнти Фур'є-Хаара та адаптивний підхід до невідомих параметрів згладжування. У [4] розглядаються розкладання сигналів за допомогою Фур'є-Хаара та їх застосування в обробці зображень, зокрема для функцій обмеженої варіації.

З вітчизняних досліджень останніх років можна назвати роботи І. Шарапудінова [5], С. Вакарчука і О. Щитова [6], [7], С. Стасюка [8] та інших.

У теорії апроксимації велика кількість робіт присвячена розв'язанню задач апроксимації функцій однієї та кількох змінних поліномами в системі Хаара та частинними сумами Фур'є-Хаара [3], [4].

У деяких статтях отримано оцінки модуля коефіцієнтів Фур'є-Хаара на деяких класах функцій однієї змінної, визначених за допомогою модуля неперервності (див., наприклад, [9], [10]).

У цій роботі ми продовжуємо вивчати поведінку коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій однієї та кількох змінних з граничною варіацією.

3. Постановка задачі. Нехай $I^d\{t = (t_1, t_2, \dots, t_d) : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$ ($I^1 \equiv I = [0, 1]$) — d -вимірний куб у просторі R^d . На одиничному відрізку $[0, 1]$ розглянемо двійкові інтервали, які визначатимуться наступним чином: для довільного числа $n_i = 2^{m_i} + k_i$, $m_i \in Z_+$, ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$) отримуємо

$$\delta_{n_i} \equiv \delta_{m_i}^{k_i} = ((k_i - 1)/2^{m_i}, k_i/2^{m_i}). \quad (1)$$

На відрізку $[0, 1]$ визначаємо систему функцій Хаара [1]: $\chi_1(t) \equiv \chi_0^{(0)}(t) \equiv 1$, а коли $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($m_i \in Z_+$, $k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$), тоді

$$\chi_{n_i}(t) \equiv \chi_{m_i}^{(k_i)}(t) = \begin{cases} 2^{m_i/2}, & \text{якщо } t \in \delta_{m_i+1}^{2k_i-1}, \\ -2^{m_i/2}, & \text{якщо } t \in \delta_{m_i+1}^{2k_i}, \\ 0, & \text{якщо } t \notin \overline{\delta_{m_i}^{k_i}}, \end{cases} \quad (2)$$

коли $\overline{\delta_{m_i}^{k_i}}$ — замикання множини $\delta_{m_i}^{k_i}$. У точках розриву функції Хаара дорівнюють половині суми лівої та правої границь функцій Хаара. В кінці відрізка $[0, 1]$ функції Хаара дорівнюють граничним значенням зсередини відрізка.

Нехай

$$N_*^d \stackrel{df}{=} \{n = (n_1, \dots, n_d) : n_i \in N, i = \overline{1, d}\} \quad (N^1 \equiv N),$$

$$N_*^d \stackrel{df}{=} \{n = (n_1, \dots, n_d) : n_i \in N \setminus \{1\}, i = \overline{1, d}\},$$

$$(N_*^1 \equiv N_*).$$

Множина $\left\{\chi_n(t) \stackrel{df}{=} \prod_{i=1}^d \chi_{n_i}(t_i)\right\}_{n \in N^d}$ утворює ортонормальну систему функцій Хаара на d -вимірному кубі I^d . Основну інформацію про систему Хаара можна знайти, наприклад, у книгах [1], [4].

Визначимо на d -вимірному кубі I^d коефіцієнти Фур'є-Хаара функції $f(t)$ наступним чином.

$$c_n(f) \equiv c_m^k(f) = \int_{I^d} f(t) \chi_n(t) dt, \quad (n \in N^d), \quad (3)$$

коли $dt \stackrel{df}{=} \prod_{i=1}^d dt_i$.

Нехай $f(t)$ функція, визначена на відрізку $[a, b]$, і

$$\xi \stackrel{df}{=} \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\},$$

є довільним розбиттям $[a, b]$. З [11] визначаємо наступне значення

$$\kappa_p(f; \xi; [a, b]) \stackrel{df}{=} \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right\}^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty),$$

як суму варіацій p -го порядку функції $f(t)$ на розбитті ξ . Нехай $V_p(f; [a, b]) = \sup\{\kappa_p(f; \xi; [a, b]) : \xi\} \in p$ -варіацією функції $f(t)$ на інтервалі $[a, b]$; $V_p(f) \equiv V_p(f; [0, 1])$. Ми позначаємо $V_p \equiv V_p([0, 1])$ ($1 \leq p < \infty$) класом функцій $f(t)$, визначених на інтервалі $[0, 1]$, таких, що $V_p(f) < \infty$. Якщо $p = 1$, то $V_1(f)$ є класом функцій обмеженої варіації.

Позначимо

$$KV_p = \{f(t) \in V_p([0, 1]) : V_p(f; [0, 1]) \leq K\}, \quad (K > 0).$$

Нехай $G^d = \{t = (t_1, \dots, t_d) : a_i \leq t_i \leq b_i, i = 1, \dots, d\}$ — d -вимірний паралелепіпед у просторі R^d ; $\Pi_d = \left\{a_i = t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < \dots < t_i^{(s_i)} = b_i, i = \overline{1, d}\right\}$ — деяке розбиття паралелепіпеда G^d на малі n -вимірні паралелепіпеди гіперплощинами $t_i = t_i^{(v_i)}$, $(v_i = \overline{1, s_i - 1}, i = \overline{1, d})$.

Ми називаємо значення

$$V_d(f; G^d) = \sup_{\Pi_d} \sum_{v_1=0}^{s_1-1} \dots \sum_{v_d=0}^{s_d-1} \left| \Delta_{\lambda_1^{(v_1)}}^1 \dots \Delta_{\lambda_d^{(v_d)}}^1 f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_d^{(v_d)}) \right|, \quad (4)$$

як варіація Віталі [23] функції d -змінних $f(t)$ ($t \in G^d$) на паралелепіпеді G^d , де

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda_i^{(v_i)}}^1 f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_d^{(v_d)}) &= f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_{i-1}^{(v_{i-1})}, t_i^{(v_i)} + \lambda_i^{(v_i)}, t_{i+1}^{(v_{i+1})}, \dots, t_d^{(v_d)}) - \\ &- f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_{i-1}^{(v_{i-1})}, t_i^{(v_i)}, t_{i+1}^{(v_{i+1})}, \dots, t_d^{(v_d)}), \end{aligned}$$

є першою різницею з кроком $\lambda_i^{(v_i)}$ функції f за змінною $t_i^{(v_i)}$; $\lambda_i^{(v_i)} = t_i^{(v_{i+1})} - t_i^{(v_i)}$, $v_i = \overline{0, s_i - 1}, i = \overline{1, d}$.

Верхня межа в (4) обчислюється на всіх можливих розбиттях G^d . Функція $f(t)$ має обмежену варіацію Віталі на G^d , якщо $V_d(f; G^d) < \infty$. Клас таких функцій ми позначимо як $V_d(G^d)$.

Визначимо для всіх $1 \leq p < \infty$ та деякого розбиття Π_d паралелепіпеда G^d значення

$$\kappa_{p,d}(f; \Pi_d; G^d) = \left\{ \sum_{v_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{v_d=0}^{s_d-1} \left| \Delta_{\lambda_1^{(v_1)}}^1 \cdots \Delta_{\lambda_d^{(v_d)}}^1 f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_d^{(v_d)}) \right|^p \right\}^{1/p}. \quad (5)$$

Функція d -змінних $f(t)$ має на паралелепіпеді G^d обмежену p -варіацію у сенсі Віталі, якщо

$$V_{p,d}(f; G^d) = \sup \left\{ \kappa_{p,d}(f; \Pi_d; G^d) : \Pi_d \right\} < \infty. \quad (6)$$

Клас функцій, що мають на G^d обмежену p -варіацію у сенсі Віталі [6], [8] позначимо як $V_{p,d}(G^d)$. Якщо $p = 1$, то визначення p -варіації (6) відповідає визначенню варіації Віталі (4), а клас функцій $V_{1,d}(G^d)$ збігається з класом $V_d(G^d)$. Якщо $d = 1$, то клас функцій $V_{p,1}(I)$ збігається з класом $V_p([0, 1])$.

Нехай $KV_{p,d} = \{f(t) : t \in I^d : V_{p,d}(f; I^d) \leq K\}$, ($K > 0$).

Припустимо далі $KV_{p,d}^*$ є функцією класу $f(t) \in KV_{p,d}$, період якої дорівнює 1 для кожної змінної.

4. Результати. Використовуючи методи математичного аналізу та теорії апроксимацій [7], [9], [10], отримаємо точні верхні межі модуля коефіцієнтів для функцій однієї та кількох змінних, визначених на класах функцій з обмеженою варіацією. Особливу увагу приділимо оцінкам коефіцієнтів на класах функцій KV_p ($1 \leq p < \infty$), V_p та $KV_{p,d}$, що дозволить зменшити похибки апроксимацій і підвищити точність застосування цих методів у числових методах та обробці сигналів.

Теорема 1. Для всіх $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in Z_+$ і $1 \leq p < \infty$ маємо рівність

$$\sup_{f \in KV_p} |c_m^{(k)}(f)| = \sup_{f \in KV_p} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} = \frac{K}{2\sqrt{2^m}}, \quad (7)$$

Доведення теореми. Для довільної функції $f(t) \in KV_p$ з визначення системи Хаара (2) для всіх $k = \overline{1, 2^m}$, ($m \in Z_+$) можна записати

$$|c_m^{(k)}(f)| = 2^{m/2} \left| \int_{\delta_{m+1}^{2k-1}} (f(x) - f(x+h)) dx \right|,$$

де $h = 2^{-(m+1)}$. Використовуючи нерівність Гельдера, маємо наступну нерівність з останнього співвідношення для $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} |c_m^{(k)}(f)| &\leq 2^{m/2-(m+1)(1-1/p)} \left\{ \int_{\delta_{m+1}^{2k-1}} |f(x) - f(x+h)|^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq 2^{-(m/2+1)} V_p(f; [(k-1)2h, k2h]). \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи (8) та визначення бінарних інтервалів (1), можемо записати

$$\sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \leq 2^{-(m/2+1)p} \sum_{k=1}^{2^m} V_p^p(f; \overline{\delta_m^k}). \quad (9)$$

Для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ ми можемо знайти розбиття ξ_k відрізка $\overline{\delta_m^k}$ таке, що $V_p^p(f; \overline{\delta_m^k}) < \kappa_p^p(f; \xi_k; \overline{\delta_m^k}) + \varepsilon$. Тоді з (9) отримуємо

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} &< 2^{-(m/2+1)p} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} \kappa_p^p(f; \xi_k; \overline{\delta_m^k}) + \varepsilon 2^m \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq 2^{-(m/2+1)} \left\{ V_p(f; I) + (\varepsilon 2^m)^{1/p} \right\} \leq \frac{K}{2\sqrt{2^m}} + \frac{\varepsilon^{1/p}}{2\sqrt{2^m}} 2^{m/p}. \end{aligned}$$

Отже, оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, ми отримуємо верхні межі

$$\sup_{f \in KV_p} |c_m^{(k)}(f)| \leq \sup_{f \in KV_p} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} \leq \frac{K}{2\sqrt{2^m}}. \quad (10)$$

Далі нам потрібно показати, що знак рівності виконується у (10). Розглянемо функцію

$$v(t) = \begin{cases} -K/2, & \text{якщо } t \in [0, 2^{-(m+1)}]; \\ K/2, & \text{якщо } t \in (2^{-(m+1)}, 1]. \end{cases}$$

Легко побачити, що $v(t) \in KV_p$ і

$$c_m^{(1)}(v) = -2^{-(m/2+1)}K,$$

$$c_m^{(k)}(v) = 0, \quad \forall k = \overline{2, 2^m}.$$

Тоді ми маємо нижню межу

$$\sup_{f \in KV_p} |c_m^{(k)}(f)| \geq |c_m^{(1)}(v)| = \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} = 2^{-(m/2+1)}K. \quad (11)$$

Співвідношення (7) отримуємо з (10) та (11). Теорему 1 доведено.

Далі ми розглядаємо функції кількох змінних.

Теорема 2. Для довільної функції $f(t) \in V_{p,d}(I^d)$, де числа $n \in N_*^d$ мають компоненти $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$, $m_i \in Z_+$; $i = \overline{1, d}$), $i = 1 \leq p < \infty$ маємо наступні нерівності

$$|c_n(f)| \leq \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \dots \sum_{k_d=1}^{2^{m_d}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} \leq \prod_{i=1}^d 2^{-(1+m_i/2)} V_{p,d}(f; I^d). \quad (12)$$

Ці нерівності не можна покращити на всіх класах функцій $V_{p,d}(I^d)$.

Доведення теореми 2. Без обмеження загальності, щоб уникнути громіздкості, ми розглядаємо лише випадок функцій двох змінних ($d = 2$) у доведенні теореми 2.

Використовуючи визначення коефіцієнтів Фур'є-Хаара (3) для довільної функції $f(t) \in V_{p,2}(I^2)$, $n \in N_*^2$, запишемо

$$|c_n(f)| \leq 2^{(m_1+m_2)/2} \int_{\delta_{m_1+1}^{2k_1-1}} \int_{\delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} |\Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^1 f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2,$$

де $h_i = 2^{-2(m_i+1)}$, $i = 1, 2$.

Використовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$|c_n(f)| \leq \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2-(m_i+1)(1-1/p)} \left\{ \int_{\delta_{m_1+1}^{2k_1-1}} \int_{\delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} |\Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^1 f(t_1, t_2)|^p dt_1 dt_2 \right\}^{1/p} \leq \quad (13)$$

$$\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} V_{p,2} \left(f; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right),$$

де $\Delta_{m_1+1, m_2+1}^{2k_1-1, 2k_2-1} = \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}} \times \overline{\Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}}$. Для всіх $k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$ ($m_i \in Z_+$; $i = 1, 2$) та довільного $\varepsilon > 0$ ми можемо знайти розбиття Π_{k_1, k_2} діапазону $\overline{\Delta_{m_1+1, m_2+1}^{2k_1-1, 2k_2-1}}$ таке, що

$$\kappa_p^p \left(f; \Pi_{k_1, k_2}; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right) \geq V_{p,2}^p \left(f; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right) - \varepsilon 2^{-(m_1+m_2)}. \quad (14)$$

Тоді з (13)–(14), використовуючи визначення p -варіації у сенсі Віталі (6), маємо

$$|c_n(f)| \leq \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} \kappa_p^p \left(f; \Pi_{k_1, k_2}; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right) + \varepsilon \right\}^{1/p} \leq \quad (15)$$

$$\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} V_{p,2} \left(f; I^2 \right) + \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} \varepsilon^{1/p},$$

Через довільне ε ми отримуємо нерівність (12) з (15).

Покажемо, що нерівності (12) не можна покращити на всіх класах функцій $V_{p,d}(I^d)$. Для функції

$$v_o(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]; \\ 0, & \text{якщо } (t_1, t_2) \notin [0, h_1] \times [0, h_2], \end{cases} \quad t \in I^2,$$

що належить класу $V_{p,2}(I^2)$, маємо

$$v_{p,2}(v_o, I^2) = 1 \quad \text{та} \quad |c_{m_1, m_2}^{(1, 1)}(v_o)| = \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}.$$

Оскільки всі коефіцієнти Фур'є-Хаара $c_n(v_0)$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}, m_i \in Z_+; i = 1, 2$) функції $v_0(t)$, крім коефіцієнта $c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_0)$, дорівнюють нулю, отримуємо рівності

$$|c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_0)| = \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(v_0)|^p \right\}^{1/p} = \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}.$$

Таким чином, ми показали, що для функції $v_0(t)$ у (12) знак рівності виконується. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Для довільних чисел $n \in N_*^d$, що мають компоненти $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}, m_i \in Z_+; i = \overline{1, d}$) і $1 \leq p < \infty$, виконуються рівності

$$\sup_{f \in KV_{p,d}} |c_n(f)| = |c_m^{(1)}(v)| = \sup_{f \in KV_{p,d}} \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \dots \sum_{k_d=1}^{2^{m_d}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} = K \prod_{i=1}^d 2^{-(1+m_i/2)}. \quad (16)$$

Теорема 4. Для довільних чисел $n \in N_*^d$, що мають компоненти $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}, m_i \in Z_+; i = \overline{1, d}$), $i, p = 1$, є відношення

$$\sup_{f \in KV_{1,d}^*} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \dots \sum_{k_d=1}^{2^{m_d}} c_n(f) \right| = K \prod_{i=1}^d 2^{-(2+m_i/2)}. \quad (17)$$

Доведення теореми 3. Без обмеження загальності, щоб уникнути громіздкості, розглянемо лише випадок функцій двох змінних ($d = 2$) у доведенні теореми 3.

Використовуючи аргументи з (13)–(15) та визначення класу $KV_{p,d}$, для довільної функції $f \in KV_{p,2}$ і чисел $n \in N_*^2$ з (12) маємо верхні межі

$$\sup_{f \in KV_{p,2}} |c_n(f)| \leq \sup_{f \in KV_{p,2}} \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} \leq K \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}. \quad (18)$$

Для отримання нижніх меж розглянемо функцію $v_1(t)$ на множині I^2

$$v_1(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \begin{cases} 1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]; \\ -1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times (h_2, 1]; \\ & (h_1, 1] \times [0, h_2]; \\ & (h_1, 1] \times (h_2, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, що $v_1(t) \in KV_{p,2}$, легко перевірити наступні рівняння

$$\left. \begin{aligned} |c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_1)| &= \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}; \\ |c_n(v_1)| &= 0 \quad \forall k_i = \overline{1, 2^{m_i}} \quad (m_i \in Z_+; i = 1, 2), \quad k_1 \neq 1, \quad k_2 \neq 1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Використовуючи (19), маємо нижню межу

$$\sup_{f \in KV_{p,2}} |c_n(f)| \geq |c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_1)| = \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(v_1)|^p \right\}^{1/p} = K \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}. \quad (20)$$

Ми отримуємо рівняння (16) з верхньої межі (18) та рівнянь (20). Теорему 3 доведено.

Доведення теореми 4. Без обмеження загальності, щоб уникнути громіздкості, ми розглядаємо лише випадок функцій двох змінних ($d = 2$) у доведенні теореми 4.

Продовжимо функцію системи Хаара $\chi_{m_i}^{(k_i)}(t_i)$, $i = 1, 2$ на всі дійсні осі з унікальним періодом. Нехай $g_i(t_i) = 2^{-m_i/2} \chi_{m_i}^{(k_i)}(t_i)$. Використовуючи визначення коефіцієнтів Фур'є-Хаара (3) та (1), можемо записати

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| &= \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)}(t_i) dt_1 dt_2 \right| = \left| \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2} \times \right. \\ &\times \left\{ \int_0^{h_1/2} \int_0^{h_2/2} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 + \int_0^{h_1/2} \left[\int_{h_2/2}^{2h_2} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 + \right. \right. \\ &+ \sum_{k_2=2}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 \Big] dt_1 + \int_0^{h_2/2} \left[\int_{h_1/2}^{2h_1} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 + \right. \\ &+ \sum_{k_1=2}^{2^{m_1}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 \Big] dt_2 + \sum_{k_1=2}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=2}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_{h_1/2}^{2h_1} \left[\int_{h_2/2}^{2h_2} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 + \sum_{k_2=2}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 \right] dt_1 + \\ &\left. + \int_{h_2/2}^{2h_2} \sum_{k_1=2}^{2^{m_1}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 \right\} \Big|. \end{aligned} \quad (21)$$

Використовуючи періодичність функції $f(t) \in H_\Omega^*$ на кожній змінній з періодом, що дорівнює 1, маємо

$$\int_0^{h_i/2} f(t_1, t_2) g_i(t_i) dt_i = \int_1^{1+h_i/2} f(t_1, t_2) g_i(t_i) dt_i \quad (i = 1, 2).$$

Зі співвідношення (21) отримуємо

$$\left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| = \left| \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2} \sum_{\gamma_1=1}^{2^{m_1+1}} \sum_{\gamma_2=1}^{2^{m_2+1}} \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 \right|, \quad (22)$$

де з (1) маємо

$$\delta_{m_i+1}^{\gamma_i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma_i - \frac{1}{2}}{2^{(m_i+1)}} \cdot \frac{\gamma_i + \frac{1}{2}}{2^{(m_i+1)}} \right) \quad (i = 1, 2).$$

З рівності (22) отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| &= \left| \sum_{\gamma_1=1}^{2^{m_1+1}} \sum_{\gamma_2=1}^{2^{m_2+1}} \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)} dt_1 dt_2 \right| \leq \\ &\leq \sum_{\gamma_1=1}^{2^{m_1+1}} \sum_{\gamma_2=1}^{2^{m_2+1}} \left| \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)} dt_1 dt_2 \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

Для довільних γ_i та m_i ($\gamma_i = \overline{1, 2^{m_i+1}}$, $m_i \in Z_+$; $i = 1, 2$) використовуючи визначення системи Хаара (2), можемо записати

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)} dt_1 dt_2 \right| \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2} \int_{\delta_{m_1+2}^{2\gamma_1}} \int_{\delta_{m_2+2}^{2\gamma_2}} |\Delta_{h_1/2}^1 \Delta_{h_2/2}^2 f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(2+m_i/2)} V_{1,2} \left(f; \overline{\Delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}, \Delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

З (23), (24), аналогічно до (14)–(15), маємо верхню оцінку

$$\sup_{f \in KV_{1,2}^*} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| \leq K \prod_{i=1}^2 2^{-(2+m_i/2)}. \quad (25)$$

Легко перевірити, що функція

$$v_2(t_1, t_2) = \frac{K}{16} \begin{cases} 1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]; \quad (h_1, 1) \times (h_2, 1); \\ -1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times (h_2, 1); \quad (h_1, 1) \times [0, h_2], \end{cases}$$

має період, що дорівнює 1, на якому змінна належить до класу $KV_{1,2}^*$. Для функції $v_2(t_1, t_2)$ маємо

$$\left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(v_2) \right| = K \prod_{i=1}^2 2^{-(2+m_i/2)}.$$

З (25) та наведеного вище співвідношення отримуємо співвідношення (17). Теорему 4 доведено.

5. Обговорення результатів. Отримані результати точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації дозволяють значно покращити точність апроксимацій. Встановлені верхні межі модуля коефіцієнтів для функцій однієї та кількох змінних показують, що ці оцінки є важливими для зменшення похибок, що виникають при використанні перетворень у числових методах та обробці сигналів. Теореми, доведені в даній роботі, дають чітке уявлення про поведінку коефіцієнтів для функцій з різними варіаціями, а також відкривають нові можливості для подальших досліджень в галузі теорії апроксимацій та обробки зображень.

6. Висновки. У результаті проведеного дослідження отримання точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій однієї та кількох змінних досліджено для класів функцій з граничними варіаціями. Отримано точні значення верхніх меж модуля коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій однієї змінної на класах функцій KV_p ($1 \leq p < \infty$). Точні значення верхніх меж коефіцієнтів Фур'є-Хаара отримано для класів функцій кількох змінних $V_{p,d}(I^d)$, $KV_{p,d}(1 \leq p < \infty)$ і $KV_{1,d}^*$.

Отримані оцінки дозволяють значно покращити точність апроксимацій і зменшити похибки, що виникають при використанні цих перетворень у числових методах та обробці сигналів. Досліджено властивості цих коефіцієнтів, що сприяє глибшому розумінню їхнього взаємозв'язку з функціями та їх застосуванню в різних математичних і інженерних задачах. Розроблені оцінки можуть бути використані для оптимізації методів перетворення Фур'є-Хаара в контексті різних галузей науки, таких як обробка зображень, числові методи та теорія апроксимацій.

Список використаної літератури

1. Haar, A. (1909). *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Inaugural-dissertation.* Göttingen: Georg-August-Universität. Retrieved from http://rcin.org.pl/Content/67971/PDF/WA35_17124_5579_Zur_Theorie.pdf
2. Hu, A. J., Green, A., & Tibshirani, R. J. (30 December, 2022). The Voronoigram: Minimax Estimation of Bounded Variation Functions From Scattered Data. *Arxiv. 2212.14514*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.14514>
Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/366789665_The_Voronoigram_Minimax_Estimation_of_Bounded_Variation_Functions_From_Scattered_Data
3. Baby, D., & Baby, Yu-X (2019). Online Forecasting of Total-Variation-bounded Sequences. In *33rd Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2019)*, Vancouver: Canada. Retrieved from https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2019/file/62e0973455fd26eb03e91d5741a4a3bb-Paper.pdf
4. Lal, S., Shukla, K., & Keshri, S. (2017). Haar Wavelet Expansions of Signals and their Applications in Image Processing. *International Journal of Computer Applications*, 173, 9. Retrieved from <https://www.ijcaonline.org/archives/volume173/number9/lal-2017-ijca-915317.pdf>
5. Sharapudinov, I. I. (2014). Approximation of functions in variable-exponent Lebesgue and Sobolev spaces by finite Fourier-Haar series. *Sb. Mathematics*, 205(2), 291–306. <https://doi.org/10.1070/SM2014v205n02ABEH004376>
6. Vakarchuk, S. B., & Shchitov, A. N. (2015). Estimates for the error of approximation of functions in L_p^1 by polynomials and partial sums of series in the Haar and Faber-Schauder systems. *Izvestiya Mathematics*, 79(2), 257–287. <https://doi.org/10.1070/IM2015v079n02ABEH002742>
7. Shchitov, A. (2016). The exact estimates of Fourier-Haar coefficients of functions of bounded variation. *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 4, 14–22. <https://doi.org/10.18052/www.scipress.com/IJARM.4.14>

- Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/294573444_The_Exact_Estimates_of_Fourier-Haar_Coefficients_of_Functions_of_Bounded_Variation
8. Stasyuk, S. A. (2015). Approximations of the classes $MB_{p,\theta}^r$ of periodic functions of several variables by polynomials according to the Haar system. *Journal of Mathematical Sciences*, 210(1), 76–85. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2549-4>
 9. Tsagareishvili, V. (2010). Fourier-Haar coefficients and properties of continuous functions. *Mathematical Notes*, 87(3), 416–424. <https://doi.org/10.1134/S0001434610030132>
 10. Galkina, S. Yu. (2001). On the Fourier-Haar Coefficients of Functions of Several Variables with Bounded Vitali Variation. *Mathematical Notes*, 70(5), 733–743. <https://doi.org/10.4213/mzm794>
 11. Wiener, N. (1924). The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *Journal of Mathematics and Physics*, 3, 73–94. <https://doi.org/10.1002/sapm19243272>

Shchytyov O. M., Mormul M. F. Precision values of Fourier-Haar transform coefficients for functions with bounded variation.

We obtain sharp estimates for the Fourier-Haar transform coefficients of functions of bounded variation. The paper investigates properties and applications of the Fourier-Haar transform in the setting of bounded-variation functions, which is relevant to both theory and practice in mathematical analysis and signal processing. The coefficient bounds elucidate the link between structural characteristics of functions and their transforms, and they enable effective use of these methods across applied domains such as image processing, numerical methods, and approximation theory. We derive exact upper bounds for the modulus of Fourier-Haar coefficients of univariate functions in the classes KV_p ($1 \leq p < \infty$). We further analyze the behavior of Fourier-Haar coefficients for multivariate functions of bounded variation in the classes $V_{p,d}(I^d)$, $KV_{p,d}$ ($1 \leq p < \infty$) and $KV_{1,d}^*$. Exact results have been obtained on these classes of functions of several variables.

Keywords: Fourier-Haar system; functions of bounded variation; sharp estimates; precision coefficients; wavelet analysis.

Одержано 25.08.2025