

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).91-105](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).91-105)**К. І. Шурубур**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

shurubura@hotmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5535-2644>

МОДЕЛЮВАННЯ φ -СУБГАУССОВОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В ПРОСТОРИ $L_p([0; T])$

Будується модель φ -субгауссового дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$, що є узагальненням класичного дробового броунівського руху в класі φ -субгауссових випадкових процесів. Модель задається за допомогою спектрального подання у вигляді стохастичного інтеграла та використовується для апроксимації такого процесу із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0; T])$. Одержано достатні умови, за яких спектральна апроксимація збігається до вихідного процесу в нормі простору $L_p([0; T])$. Наведено приклад моделювання траєкторій у просторі $L_3([0, 1])$, що ілюструє практичну придатність запропонованого підходу.

Ключові слова: φ -субгауссовий дробовий броунівський рух, дробовий броунівський рух, моделювання, φ -субгауссові випадкові процеси, простір $L_p([0; T])$.

1. Вступ. Сучасна теорія випадкових процесів охоплює широкий спектр об'єктів, що моделюють стохастичні явища у природничих та прикладних науках. Значний інтерес викликають процеси, які мають більш загальну поведінку порівняно з класичними гауссовими моделями, зокрема φ -субгауссові процеси. До цього класу належать процеси, що демонструють нетривіальні залежності, зокрема сильну залежність від минулих значень та нетипові закономірності зростання дисперсії.

В роботі [1] розглядалася апроксимація $S\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -процесів у просторі $L_p([0; T])$. Подальше дослідження властивостей таких процесів у контексті моделювання привело до появи спектральних методів побудови моделей, які не лише зручні з обчислювальної точки зору, а й дозволяють досягати контрольованої точності та надійності наближення.

Особливе місце серед таких процесів займає φ -субгауссовий дробовий броунівський рух (ДБР), що є узагальненням класичного ДБР на випадок неквадратичної експоненціальної обмеженості. У роботах [2] і [3] досліджено зображення дробового броунівського руху у вигляді випадкових рядів і спектральних інтегралів, що стало основою для побудови моделей з контрольованими характеристиками.

Актуальність дослідження полягає в тому, що існуючі методи моделювання не завжди забезпечують одночасний контроль точності та надійності апроксимації φ -субгауссових процесів у функціональних просторах $L_p([0; T])$.

Мета і завдання дослідження: побудова спектральної моделі φ -субгауссового дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$, яка забезпечує наближення траєкторії такого процесу із заданою точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, у просторі $L_p([0; T])$ з отриманням конкретних оцінок для випадків $\alpha \in (0, 1]$ та $\alpha \in (1, 2)$ і реалізацією практичного алгоритму у просторі $L_3([0; 1])$.

Наукова новизна дослідження полягає у розробці спектральної моделі з отриманням точних умов забезпечення заданої надійності та точності апроксимації у просторі $L_p([0; T])$ для різних значень параметра $\alpha \in (0, 2)$.

У першому розділі подано допоміжні означення та характеристики досліджуваного процесу. У другому розділі сформульовано умови, за яких спектральна модель гарантує наближення у просторі $L_p([0; T])$. В третьому розділі розглядається моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$ та наведено наслідки для випадку $L_3([0; T])$. Завершальний розділ ілюструє практичну реалізацію моделювання при фіксованих значеннях параметрів.

2. Модель φ -субгауссового дробового броунівського руху.

Означення 1. (див. [4]) Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$, і виконуються умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Умова Q. (див. [4]) Для N -функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Означення 2. (див. [4]) Нехай φ – N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Норма у просторі $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ визначається за формулою (див. [4]):

$$\tau_\varphi(\xi) := \inf\{a \geq 0 : \mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(a\lambda)\}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Зрозуміло, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}.$$

Означення 3. Випадковий процес $\{X(t), t \in T\}$ називається φ -субгауссовим процесом, якщо для кожного $t \in T$ має місце $\tau_\varphi(X(t)) < \infty$ (зокрема кожна скінченна лінійна комбінація значень процесу є φ -субгауссовою випадковою величиною).

Означення 4. (див. [4]) Сім'я Δ випадкових величин з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ .

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, Σ, P) та параметричну множину T ($T = [0; T]$ або $T = [0, \infty]$).

Означення 5. *Випадковий процес $\{W_\alpha(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим дробовим броунівським рухом з параметром $\alpha \in (0, 2)$, якщо він є строго φ -субгауссовим випадковим процесом із нульовим середнім $\mathbb{E}(W_\alpha(t)) = 0$, кореляційною функцією*

$$R(t, s) = \frac{1}{2} (|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t - s|^\alpha),$$

і виконується $W_\alpha(0) = 0$.

Один з можливих аналітичних описів строго φ -субгауссового дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$ має вигляд (див., наприклад, [3]):

$$W_\alpha(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right), \quad t \in [0, T],$$

де $\xi(\lambda)$ та $\eta(\lambda)$ — незалежні дійсні строго φ -субгауссові випадкові процеси, які задовольняють таким умовам:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi(\lambda) &= \mathbb{E}\eta(\lambda) = 0, \\ \tau_\varphi(\xi(\lambda)) &\leq C_\Delta \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2(\lambda))}, \end{aligned}$$

а константа A визначається формулою

$$A^2 = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\}^{-1} = \left\{ -\frac{2}{\pi} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}^{-1}.$$

Розглянемо інтервал $[0, \Lambda]$ при $\Lambda > 0$ і представимо процес $W_\alpha = \{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ у вигляді суми трьох складових:

$$W_\alpha(t) = W_\alpha(t, [0, \varepsilon]) + W_\alpha(t, [\varepsilon, \Lambda]) + W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]),$$

де $0 < \varepsilon < \Lambda$, а кожну з компонент визначимо як

$$W_\alpha(t, [a, b]) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_a^b \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_a^b \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right).$$

Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ — розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$ на M частин, причому $\lambda_1 = \varepsilon$.

Скориставшись цим розбиттям, побудуємо апроксимацію строго φ -субгауссового дробового броунівського руху W_α у вигляді дискретної суми:

$$\begin{aligned} S_M(t, \Lambda) &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i)) \right) = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} X_i - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} Y_i \right), \\ &\quad t \in [0, T], \quad M \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

де $\{X_i, Y_i\}, i = 1, 2, \dots, M - 1$, — незалежні строго φ -субгауссові випадкові величини, які мають нульове математичне сподівання:

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}Y_i = 0, \quad \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}Y_i^2 = \lambda_{i+1} - \lambda_i.$$

Означення 6 (Перетворення Юнга-Фенхеля). *Нехай $f = (f(x), x \in \mathbb{R})$ — дійсна функція. Перетворенням Юнга-Фенхеля функції f (або спряженою функцією до f) називається функція*

$$f^* = (f^*(x), x \in \mathbb{R}),$$

визначена рівністю

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - f(y)\}.$$

Зокрема, для N -функції Орліча φ маємо спряжену функцію φ^* у цьому ж сенсі.

Використаємо твердження 2.1 з роботи [1].

Твердження 1. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ — строго φ -субгауссовий випадковий процес, для якого виконується умова:*

$$\int_0^T (\mathbb{E}(X(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt < \infty, \quad p \geq 1.$$

Позначимо

$$c := \int_0^T (\mathbb{E}(X(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Тоді інтеграл $\int_0^T |X(t)|^p dt$ існує майже напевно, і для будь-якого $\varepsilon > cr^{\frac{p}{2}}$ виконується така експоненціальна оцінка ймовірності:

$$P\left\{\int_0^T |X(t)|^p dt > \varepsilon\right\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/p}\right)\right\},$$

де φ^* — перетворення Юнга-Фенхеля функції φ .

3. Моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$.

Означення 7. *Кажуть, що модель $S_M = \{S_M(t, \Lambda), t \in [0, T]\}$ апроксимує випадковий процес $W_\alpha = \{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0; T])$, $p \geq 1$, якщо має місце наступна нерівність:*

$$\mathbf{P}\left\{\left(\int_0^T |W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda)|^p dt\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq \delta.$$

Враховуючи, що процес похибки апроксимації $X_M(t, \Lambda) := W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, належить до класу строго φ -субгауссових випадкових процесів, можна скористатися оцінкою, наведеною у твердженні 1. Це дозволяє вивести умови, за яких модель $S_M(t, \Lambda)$ забезпечує наближення процесу W_α у просторі $L_p([0; T])$ з заданими надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Модель S_M наближає процес W_α із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0; T])$, $p \geq 1$, якщо у випадку $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ & < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \end{aligned}$$

а у випадку $\alpha \in (1, 2)$ виконується умова

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{2}}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ & < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \end{aligned}$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ – розбиття відрізка $[0, \Lambda]$.

Доведення. Як було зазначено раніше, до процесу відхилень $X_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, що є строго φ -субгауссовим, можна застосувати твердження 1. Це дозволяє записати ймовірнісну оцінку для довільного $u > c p^{\frac{p}{2}}$ у такому вигляді:

$$P \left\{ \int_0^T |X_M(t, \Lambda)|^p dt > u \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{u}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

де

$$c = \int_0^T (\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Поклавши $\varepsilon = u^{\frac{1}{p}}$ та припускаючи, що $0 < \delta < 1$ й

$$\delta \geq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{u}{c} \right)^{1/p} \right) \right\} = 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

маємо:

$$\mathbf{P} \left\{ \left(\int_0^T |X_M(t, \Lambda)|^p dt \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq \delta,$$

що співпадає з умовою з означення 7.

Таким чином, щоб визначити, за яких умов модель S_M є апроксимацією процесу W_α у просторі $L_p([0; T])$ з наперед заданими параметрами точності $\varepsilon > 0$ та надійності $1 - \delta$, слід перевірити виконання гіпотези твердження 1.

Із умови $u > cp^{\frac{p}{2}}$ безпосередньо випливає:

$$\varepsilon = u^{\frac{1}{p}} > \left(cp^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} = c^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}},$$

а звідси

$$c < \frac{\varepsilon^p}{p^{\frac{p}{2}}}.$$

Далі, якщо припустити, що $0 < \delta < 1$ і виконується нерівність

$$\delta \geq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

тоді маємо:

$$\exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \right\} \leq \frac{\delta}{2}; \quad -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \leq \ln \frac{\delta}{2};$$

$$\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \geq \ln \frac{2}{\delta}; \quad \frac{\varepsilon}{c^{1/p}} \geq (\varphi^*)^{(-1)} \left(\ln \frac{2}{\delta} \right);$$

$$c \leq \frac{\varepsilon^p}{((\varphi^*)^{(-1)} (\ln \frac{2}{\delta}))^p}.$$

Отже, щоб виконувалася відповідна оцінка, достатньо, щоб була задоволена така умова:

$$c = \int_0^T (\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2)^{p/2} dt < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)} (\ln \frac{2}{\delta}))^p} \right\}. \quad (1)$$

Розглянемо дисперсію процесу похибки апроксимації $X_M(t, \Lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &= \mathbb{E}(W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\ &= \mathbb{E}(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]) + W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) + W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\ &= \mathbb{E}(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]))^2 + \mathbb{E}(W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]))^2 + \mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2. \end{aligned}$$

Проведемо аналогічну оцінку до тієї, яка була проведена в статті [2]. Оцінимо перший з отриманих доданків:

$$\mathbb{E}(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]))^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{\pi} \mathbb{E} \left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^{\lambda_1} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right)^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \mathbb{E} \left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) \right)^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right)^2 \right\} = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(\cos(\lambda t) - 1)^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda + \int_0^{\lambda_1} \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(\cos(\lambda t) - 1)^2 + \sin^2(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(2 - 2\cos(\lambda t))}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{4\sin^2(\frac{\lambda t}{2})}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} \leq \\
&\leq \frac{A^2}{\pi} \left\{ t^2 \int_0^{\lambda_1} \lambda^{2-1-\alpha} d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right\}.
\end{aligned}$$

Для наступного доданка маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]))^2 = \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_\Lambda^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_\Lambda^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right)^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_\Lambda^\infty \frac{(2 - 2\cos(\lambda t))}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} \leq 2 \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_\Lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}} \right\} \leq \frac{2A^2}{\alpha\pi\Lambda^\alpha}.
\end{aligned}$$

А для $\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2$ отримуємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_1}^\Lambda \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_{\lambda_1}^\Lambda \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) - \right. \\
&\left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i)) \right)^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right) d\xi(\lambda) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right) d\eta(\lambda) \Big)^2 \Big\} = \\
& = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right\} =: \frac{A^2}{\pi} (\Sigma_{\cos} + \Sigma_{\sin}).
\end{aligned}$$

Переходимо до оцінювання інтеграла виду

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda.$$

Розкриваючи різницю в дужках, отримаємо:

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq$$

Застосувавши оцінку для квадрата суми, маємо:

$$\begin{aligned}
& \leq 2 \left(\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t) - \sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \right. \\
& \left. + \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\sin(\lambda_i t))^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right) =: 2(W_{i1} + W_{i2}).
\end{aligned}$$

Оцінимо W_{i1} . Використовуючи тригонометричну тотожність та оцінку $\sin^2(x) \leq x^2$, маємо:

$$W_{i1} \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{4 \left(\sin \left(\frac{\lambda t - \lambda_i t}{2} \right) \right)^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(\lambda - \lambda_i)^2 t^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}}. \quad (2)$$

Для оцінювання W_{i2} розглянемо два випадки: $\alpha \leq 1$ і $1 < \alpha < 2$. У першому випадку, при $0 < \beta \leq 1$ та $\beta < \alpha$, скористаємося нерівністю $|\sin x| \leq |x|^\beta$, що дає:

$$\begin{aligned}
W_{i2} & \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \left(\frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\
& = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}})^2} d\lambda. \quad (3)
\end{aligned}$$

Використаємо відому нерівність $a^\nu - b^\nu \leq (a-b)^\nu$ для $\nu \leq 1$ та $a > b$. Оскільки у нашому випадку $0 < \lambda_i < \lambda_{i+1}$ і при $\alpha \leq 1$ виконується $(\alpha + 1)/2 \leq 1$, то з формули (3) випливає:

$$W_{i2} \leq \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+1}}{\lambda_i^{2(\alpha+1)}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{2(\alpha-\beta)+2}}.$$

Поклавши $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, маємо остаточну оцінку:

$$W_{i2} \leq t^{\frac{3}{2}\alpha} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}}. \quad (4)$$

У випадку $\alpha \in (1, 2)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} W_{i2} &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2 (\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} + \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\ &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha+1}{2}} 4\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{4t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\alpha-1} \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}} \leq \\ &\leq \frac{4t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підсумовуючи оцінки (2)–(5), одержуємо, що для випадку $\alpha \leq 1$ маємо:

$$\Sigma_{\sin} \leq 2 \left(t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right),$$

а у випадку $1 < \alpha < 2$ — наступну оцінку:

$$\Sigma_{\sin} \leq 2t^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{4(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right).$$

Оцінимо тепер інтеграл такого вигляду:

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda.$$

Розкриваючи дужки у виразі під інтегралом, маємо:

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq$$

Застосовуючи оцінку для квадрата суми, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 &\leq 2 \left(\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - \cos(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\cos(\lambda_i t) - 1)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right) = \\
 &= 2(W_{i3} + W_{i4}).
 \end{aligned}$$

Оцінимо спочатку W_{i3} :

$$\begin{aligned}
 W_{i3} &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(\cos(\lambda t) - \cos(\lambda_i t))^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(2 \sin(\frac{\lambda t + \lambda_i t}{2}) \sin(\frac{\lambda_i t - \lambda t}{2}))^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{4 \left| \frac{\lambda_i t - \lambda t}{2} \right|^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Тепер перейдемо до W_{i4} у випадку $\alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 W_{i4} &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\cos(\lambda_i t) - 1)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\
 &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(2 \sin^2 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\
 &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \left(\left| \frac{\lambda_i t}{2} \right|^{\frac{\beta}{2}} \right)^4 \frac{(\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq 2^{2-2\beta} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+1}}{\lambda_i^{2(\alpha+1)}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = \frac{2^{2-2\beta} t^{2\beta} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{2(\alpha-\beta)+2}}.
 \end{aligned}$$

Поклавши $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, отримаємо остаточну оцінку:

$$W_{i4} \leq \frac{2^{2-\frac{3}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2}\alpha} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}}. \quad (7)$$

У випадку, коли $1 < \alpha < 2$, отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
 W_{i4} &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \left(\left| \frac{\lambda_i t}{2} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^4 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2 (\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} + \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha+1}{2}} 4 \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \frac{4 t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Звідси, з урахуванням оцінок (6)–(8), для випадку $\alpha \leq 1$ отримаємо:

$$\Sigma_{\cos} \leq 2 \left(t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right),$$

а у разі $1 < \alpha < 2$ маємо:

$$\Sigma_{\cos} \leq 2 t^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{4 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right).$$

Таким чином, отримаємо наступну загальну оцінку:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2 \leq \\
 &\leq \begin{cases} \frac{2A^2}{\pi} \left(2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\ \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), & \alpha \leq 1; \\ \frac{4A^2 t^2}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\ \left. + 4 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right), & 1 < \alpha < 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для оцінки математичного сподівання квадрата $X_M(t, \Lambda)$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &\leq \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\
 &+ \left. (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), \quad \alpha \leq 1; \quad (9)
 \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &\leq \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\ &\quad \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right), \quad 1 < \alpha < 2. \end{aligned} \quad (10)$$

На завершення, скориставшись оцінками (9)–(10), можемо стверджувати, що умова (1) виконується, якщо справджуються наступні нерівності:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2} + 2}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ &< \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta}))^p)} \right\}, \quad \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

а також

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ &< \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \quad 1 < \alpha < 2 \end{aligned} \quad (12)$$

Таким чином, виконання умов (11)–(12) забезпечує справедливість твердження теореми 1.

Наслідок 1. *Наближення процесу W_α моделлю S_M у просторі $L_3([0; T])$ з заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$ та точністю $\varepsilon > 0$, гарантується, якщо для випадку $\alpha \in (0, 1]$ виконується така нерівність:*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{T^3 \lambda_1^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)} + \frac{T}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2T^3}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) T^{\frac{3}{2}\alpha+1}}{\frac{3}{2}\alpha + 1} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2} + 2}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} < \\ &< \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^3} \right\}, \end{aligned}$$

а для $\alpha \in (1, 2)$ має місце наступна умова:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{T^3 \lambda_1^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)} + \frac{T}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2T^3}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4T^3}{3} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} < \\ & < \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}, \end{aligned}$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ — розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$.

Доведення. У випадку $p = 3$ значення

$$\varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^p} \right\},$$

дорівнює

$$\varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}.$$

Підставляючи це значення у відповідні вирази теореми 1 та виконуючи інтегрування по $t \in [0, T]$, отримуємо твердження наслідку.

4. Реалізація алгоритму моделювання у просторі $L_3([0, 1])$. Припустімо, що ми обираємо рівномірне розбиття відрізка $[0, \Lambda]$

$$\Delta \lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{\Lambda}{M}, \quad \lambda_1 = \frac{\Lambda}{M}, \quad \lambda_i = \frac{i\Lambda}{M}.$$

Тоді, застосовуючи наслідок 1 до випадку простору $L_3([0, 1])$, можна вивести умови, що дозволяють визначити відповідні параметри моделі Λ та M . Зокрема, при $\alpha \in (0, 1]$ отримаємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{\Lambda^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)M^{2-\alpha}} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2\Lambda^{2-\alpha}}{9M^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha})\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}}{(\frac{3}{2}\alpha + 1)M^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\frac{\alpha}{2} + 2}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \\ & < \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{3/2}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}, \end{aligned}$$

а при $\alpha \in (1, 2)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{\Lambda^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)M^{2-\alpha}} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2\Lambda^{2-\alpha}}{9M^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4}{3} \left(\frac{\Lambda}{M} \right)^{2-\alpha} \frac{1}{i^{\frac{3\alpha-1}{2}}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} < \\ & < \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{3/2}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}. \end{aligned}$$

Зобразимо на рис. 1–4 для заданих надійностей та точностей траєкторії моделі процесу φ -субгауссового дробового броунівського руху при різних значеннях α . Візьмемо до уваги, що $\alpha = 2H$. Візьмемо значення δ, ε, H зі статті [5]. З графіків очевидно, що чим більше значення H , тим гладша траєкторія моделі φ -субгауссового дробового броунівського руху.



Рис. 1. $H = \frac{7}{8}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$

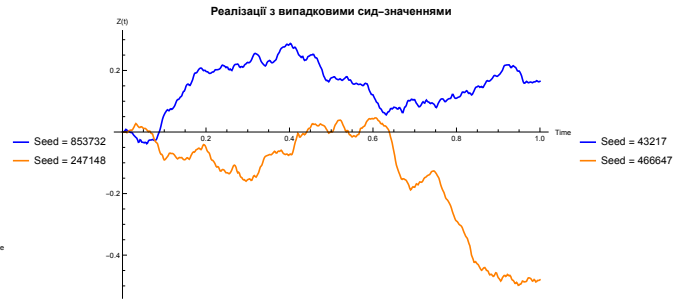


Рис. 2. $H = \frac{8}{9}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$

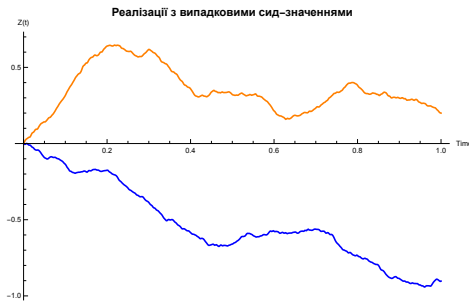


Рис. 3. $H = \frac{9}{10}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$

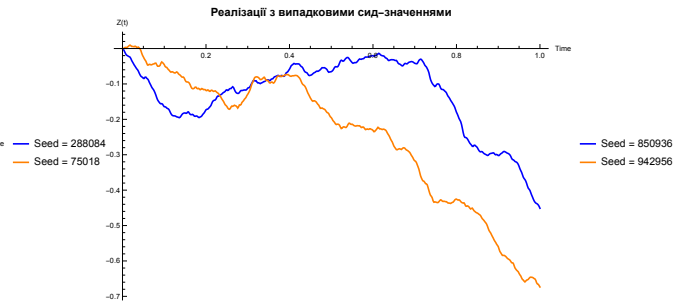


Рис. 4. $H = \frac{15}{16}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$



Рис. 5. $H = \frac{3}{4}$,
 $\varepsilon = 0.05, \delta = 0.05$

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній статті представлено новий алгоритм моделювання процесів φ -субгауссового дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $L_p([0; T])$. Також проілюстровано результати такого моделювання у просторі $L_3([0, 1])$. Під час проведення обчислень та побудови графіків було помічено, що для побудови

моделі використовуються M та Λ дуже великих порядків, що значно сповільнює процес обчислення в порівнянні з моделлю, яка розглянута в статті [5]. Отже, моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху на основі спектрального розкладу є складнішим для обчислення та побудови графіків, ніж моделювання на основі розкладу в ряд.

Список використаної літератури

1. Kozachenko, Yu. V., & Kamenshchikova, O. Ye. (2008). Approximation of $S\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p([0; T])$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 79, 73–78. Retrieved from <https://probability.knu.ua/tims/issues-new/79/PDF/9.pdf> [in Ukrainian].
2. Kozachenko, Yu. V., Pashko, A. O., & Vasylyk, O. I. (2017). Simulation of a fractional Brownian motion in the space $L_p([0; T])$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 97, 97–108. Retrieved from <https://probability.knu.ua/tims/issues-new/97/PDF/11.pdf> [in Ukrainian].
3. Picard, J. (2011). Representation formulae for the fractional Brownian motion. *Séminaire de Probabilités*, 43, 3–70. https://doi.org/10.1007/978-3-642-15217-7_1
4. Vasylyk, O. I., Kozachenko, Yu. V., & Yamnenko, R. Ye. (2008). *φ -sub-Gaussian random processes: Monograph*. Kyiv: VPC “Kyivskyi Universytet”. Retrieved from https://probability.knu.ua/userfiles/yamnenko/kyv_monograph.pdf [in Ukrainian].
5. Vasylyk, O. I., & Shurubura, K. I. (2025). Optimization of the model of φ -sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 80, 17–28. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.3>

Shurubura K. I. Simulation of φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion in the space $L_p([0; T])$.

In this paper, I construct a model of a φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion with parameter $\alpha \in (0, 2)$, which generalizes the classical fractional Brownian motion to the class of φ -sub-Gaussian random processes. The model is defined via a spectral representation in the form of a stochastic integral and is used to approximate this process in the space $L_p([0; T])$ with prescribed reliability $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, and accuracy $\varepsilon > 0$. Sufficient conditions are obtained that guarantee the convergence of the spectral approximation to the original process in the $L_p([0; T])$ norm. An example of simulating trajectories in $L_3([0, 1])$ is presented, illustrating the practical applicability of the proposed approach.

Keywords: φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion, fractional Brownian motion, simulation, φ -sub-Gaussian random processes, space $L_p([0; T])$.

Одержано 05.09.2025