

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).126-135](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).126-135)**Я. Й. Бігун¹, О. З. Українець²**

¹ Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій,
доктор фізико-математичних наук, професор

y.bihun@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5545-9041>

² Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

o.ukrainets@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-9793-0330>

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ ІЗ ВРАХУВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОГО ФАКТОРУ

У роботі запропоновано математичну модель поширення епідемії із врахуванням забруднення довкілля, що може посилити негативний вплив на перебіг епідемії. Модель ґрунтується на відомі SIR-моделі, в якій крім інтегрального екологічного фактору $E(t)$ враховано народжуваність і смертність у популяції. Динаміка долі схильного до інфікування населення у моделі залежить від відхилення рівня забруднення від деякого допустимого значення K і втрати імунітету до захворювання через час $\tau > 0$. Доля інфікованого населення зростає із ростом значення $E(t) - K$. Досліджено існування і невід'ємність розв'язку моделі при $t > 0$, знайдено стани рівноваги та умови їх існування. Встановлено умови стійкості стану відсутності епідемії та стану епідемічного процесу. За результатами комп'ютерного моделювання проаналізовано динаміку математичної моделі.

Ключові слова: Епідемія, базове репродуктивне число, математична модель, екологічний фактор, стан рівноваги, стійкість розв'язків, диференціальні рівняння із запізненням, популяція, комп'ютерне моделювання

1. Вступ. Математичному моделюванню поширення епідемій за допомогою диференціальних рівнянь із звичайними, частинними, дробовими похідними присвячена значна кількість досліджень, зокрема монографії [1] - [4]. Моделі з урахування втрати імунітету, інкубаційного періоду та інших чинників, пов'язаних з передісторією процесу поширення епідемії, описуються рівняннями із запізненням аргументу або диференціальними функціональними рівняннями і досліджували в працях [5] - [8] та багатьох інших.

Більшість математичних моделей поширення епідемій базується на класичній SIR-моделі [1] - [4]:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \quad (1)$$

Тут $S(t)$, $I(t)$ і $R(t)$ відповідно – кількість осіб у момент часу $t > 0$, схильних до інфікування, інфікованих і тих, які одужали або набули імунітету, β і γ – додатні параметри, причому $\gamma \approx T^{-1}$, де T – середня тривалість хвороби. Із системи рівнянь (1) випливає, що

$$S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{const},$$

тобто чисельність популяції залишається сталою протягом епідемії.

Математична модель (1) є частинним випадком загальнішої моделі, яка досліджувалась з 1927 р. Кермаком і МакКендриком [9]. У цій праці розглядалось рівняння:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S(t)}{N} \int_0^\infty A(\tau) \frac{dS(t-\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2)$$

де $A(\tau)$ – середня інфективність особи, інфікованої τ одиниць часу раніше по відношенню до здорової особи. Якщо $A(\tau) = \beta N \exp^{-\gamma\tau}$, то ввівши позначення

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^t A(t-\tau) \frac{dS(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3)$$

і диференціюючи (3) із врахуванням (2), одержимо систему рівнянь (1).

Невід’ємність розв’язку $I(t)$ при $t > 0$ одержується із другого рівняння системи (1), оскільки

$$I(t) = I_0 \exp \left(\int_0^t (\beta S(z) - \gamma) dz \right) \geq 0.$$

Аналогічно, $S(t)$ і $R(t)$ набувають невід’ємних значень при $t > 0$, якщо $S(0) \geq 0$ і $R(0) \geq 0$.

Тому $S'(t) \leq 0$, і при $t > 0$ $S(t) \leq S(0)$. Крім того, при $t > 0$

$$I(t) \leq I_{max} = N - \sigma + \sigma \ln \frac{\sigma}{S_0}.$$

Із обмеженості розв’язку системи (1) на довільному інтервалі $(0, t)$, випливає існування диференційовного розв’язку для $t > 0$.

2. Математична модель.

На розвиток епідемії впливають різноманітні чинники медичного, соціального, організаційного та іншого типу. Ще одним фактором є стан забруднення довкілля, що в першу чергу стосується захворювань з ураженням органів дихання, наприклад різних штамів вірусів грипу. Для узагальненого екологічного впливу також можна включати психо-емоційні фактори, що пов’язані із стресовими станами частини населення щодо загрози захворювання, а також зовнішніми фактори, такими як воєнний стан, повітряні тривоги тощо.

Розглянемо математичну модель поширення епідемії серед населення деякого регіону, яка ґрунтується на модифікації SIR-моделі із врахуванням негативного впливу забруднення навколишнього середовища. Фактор забруднення в моделі позначено через $E(t)$, $t \geq t_0 = 0$. Припустимо, що

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \dots + \alpha_m E_m(t),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$, $E_i(t)$ – компоненти забруднення, наприклад забруднення повітря, води, кліматичні, соціально-психологічні фактори тощо. Нехай $K > 0$ – допустимий фактор забруднення, при якому схильні до інфікування особи не відчувають негативного впливу. Ризик інфікування посилюється при $E(t) > K$ і зменшується при $0 \leq E(t) < K$. Оскільки процес відновлення довкілля найчастіше має коливний характер, який стабілізується відносно

значення $E = K$ при $t \rightarrow \infty$, то припустимо, що $E(t)$ є розв'язком рівняння Гачінсона [10]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t - \Delta)}{K} \right) E(t), t > 0, \quad (4)$$

де $0 < r$ – коефіцієнт лінійного росту, запізнення $\Delta > 0$ відображає середній час відновлення екологічного стану.

При $-\Delta \leq t \leq 0$ задається передісторія процесу

$$E(t) = E_0(t) \geq 0. \quad (5)$$

У статті [11] показано, що для узагальненого рівняння Гачінсона

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{E(t - \Delta)}{K} \right)^n \right) E(t), \quad t > 0,$$

стійкість стану рівноваги досягається $E = K$ досягається при виконанні умови

$$0 < rn\Delta < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Графіки розв'язків для різних n наведені на рис. 1:

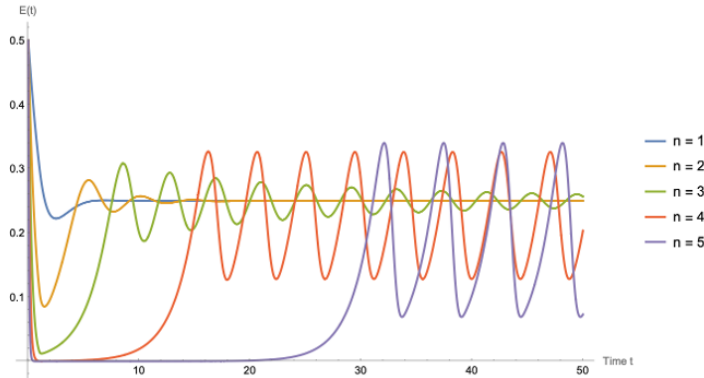


Рис. 1. Динаміка розв'язків фактору E узагальненого рівняння Гачінсона при різних значеннях параметра n .

Якщо $E(0) > 0$, то розв'язок задачі (4), (5) існує при $t > 0$, невід'ємний і обмежений [10].

У моделі поширення епідемії врахуємо час $\tau > 0$ втрату імунітету до захворювання, як і в [2] або в [5]. Також врахуємо той факт, що перевищення рівня забруднення $E \rightarrow K$ веде до збільшення кількості осіб, схильних до інфікування серед населення популяції.

Враховувавши природні процеси народжуваності та смертності у групі $S(t)$, одержимо рівняння:

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - \beta S(t)I(t) + \alpha I(t - \tau) + \varepsilon(E(t) - K) - \mu S(t), \quad (7)$$

де $b > 0$ і $\mu > 0$ – коефіцієнти народжуваності і смертності в популяції відповідно, $\varepsilon > 0$.

У системі рівнянь (1) коефіцієнт γ обернено пропорційний середньому часу перебігу захворювання T , тому перевищення показника $E(t)$ за середнє значення K може збільшити час T , що спостерігається в медичній практиці [12], [13]. Тому припустимо, що функція $\gamma = \gamma(E)$ і набуває вигляду

$$\gamma(E) = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E(t) - K)}, \quad (8)$$

де γ_0 і γ_1 – додатні коефіцієнти.

У підсумку маємо рівняння для динаміки інфікованих осіб:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma(E(t))I(t) - \mu I(t), \quad (9)$$

із початковою умовою

$$I(t) = 0, \quad -\tau \leq t < 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0. \quad (10)$$

Для частини осіб $R(t)$, які одужали або набули імунітету, маємо рівняння

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma(E(t))I(t) - \alpha I(t - \tau) - \varepsilon(E(t) - K) - \mu R(t), \quad (11)$$

з початковою умовою $R(0) = R_0 \geq 0$.

Надалі побудовану модель будемо досліджувати для безрозмірних величин, вважаючи, що $N(0) = 1$, а $S(t)$, $I(t)$ і $R(t)$ – відповідні долі населення і

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

Із рівнянь (7), (9), (11) випливає

$$\frac{dN}{dt} = b - \mu N, \quad N(0) = 1,$$

і зміна кількості населення з плином часу набуває вигляду

$$N(t) = \left(1 - \frac{b}{\mu}\right) e^{-\mu t} + \frac{b}{\mu}. \quad (12)$$

3. Невід'ємність розв'язку.

Розглянемо питання про невід'ємність розв'язку задачі (7), (9), (11) із невід'ємними початковими умовами.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

- 1) для $t > 0$ існує єдиний неперервний розв'язок системи рівнянь (7), (9), (11) із початковими умовами $S(0) > 0, I(0) > 0, R(t) \geq 0$;
- 2) $b - \varepsilon\sigma > 0$, $\sigma = \max |E(t) - K|$ при $t \geq 0$;
- 3) $\alpha(1 + \gamma_1\sigma) < \gamma_0$.

Тоді при $t > 0$ розв'язок $S(t), I(t), R(t)$ набуває невід'ємних значень.

Доведення. Із рівняння (9) після інтегрування одержимо

$$I(t) = I(0) \exp \left(\int_0^t \beta S(x) - \gamma(E(x)) dx \right).$$

Звідси випливає, що $I(t) \geq 0$ при $t > 0$. Якщо $I(0) > 0$, то $I(t) > 0$ при $t > 0$. У разі відсутності інфікованих осіб при $t = 0$ маємо $I(t) \equiv 0$ для $t > 0$.

Нехай $0 < S(0) \leq N(0) = 1$ і $t_1 \in (0, \tau)$ – перша точка, у якій $S(t_1) = 0$. Тоді $S'(t_1) \leq 1$. При виконанні умови 2 теореми отримуємо:

$$\frac{dS(t_1)}{dt} = b + \varepsilon(E(t_1) - K) \geq b - \varepsilon\sigma > 0,$$

що суперечить припущенню.

Якщо $t_1 \geq \tau$, то врахувавши, що $I(t_1 - \tau) \geq 0$ і умову 2 теореми, аналогічно одержимо суперечність із припущенням $S'(t_1) \leq 0$.

Нехай $t_2 > 0$ – перша точка, в якій $R(t_2) = 0$, при цьому $R'(t_2) \leq 0$. Якщо $I(0) > 0$ і $t_2 > 0$ – перша точка, в якій $R(t_2) = 0$, отже $R'(t_2) \leq 0$. Якщо $t_2 < \tau$, то $R'(t_2) > 0$ на підставі умови 2 теореми. Якщо $t_2 \geq \tau$ і виконується умова 3 теореми, то

$$\frac{dR(t_2)}{dt} \geq \left(\frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1\sigma} - \alpha \right) \min(I(t_2 - \tau), I(t_2)) > 0,$$

що також суперечить припущенню. $\square$

4. Існування і єдиність розв'язку.

Для доведення існування і єдиності неперервного розв'язку системи рівнянь (7), (9), (11) із невід'ємними початковими умовами застосуємо теорему із монографії [14, с.308-309]. Розглянемо задачу:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(t, u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m)), t > 0, \\ u(t) &= u_0(t), \quad -\tau_m \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

де $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, $u := (u_1, \dots, u_n) \subset \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$.

Теорема 2 [14]. Нехай виконуються умови:

- 1) вектор-функція F визначена для $t > 0$ і $u \in \mathbb{D}$, неперервна для кожного u , локально Ліпшицева по u_0 ;
- 2) справджується оцінка:

$$\|F(t, u)\| \leq P(t) + N(t) \|u\|, \quad (t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{D}, \quad (13)$$

де P і Q – неперервні функції при $t \geq 0$ із значеннями в $\mathbb{R}_+$;

- 3) початкова функція $u_0 \in C[-\tau_m, 0]$.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок задачі на довільному інтервалі $(0, t)$.

На підставі теореми 2 доведемо існування і єдиність розв'язку початкової задачі для системи (7), (9), (11).

Теорема 3. *Нехай:*

- 1) початкові умови $S_0(t) > 0, I(0) > 0, R(0) \geq 0$;
- 2) виконуються умови теореми 1.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок початкової задачі для системи (7), (9), (11) при $t > 0$, диференціальний при $t > \tau$.

Доведення. Обмежений невід'ємний розв'язок початкової задачі (4), (5) існує при $t > 0$ [10, 15].

Як впливає із системи рівнянь (7), (9), (11) на довільному інтервалі існування розв'язку цієї задачі:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t) \leq \frac{b}{\mu}. \quad (14)$$

Оскільки розв'язки $S(t), I(t), R(t)$ невід'ємні, то кожен із них обмежений значенням b/μ на $(0, t)$.

Позначимо через $F := (F_1, F_2, F_3)$ – праві частини системи (7), (9), (11). Тоді із (14) і умови (2) теореми (3) одержимо:

$$\begin{aligned} |F_1| &\leq b + \varepsilon\sigma + \beta b \frac{b}{\mu} + \alpha I_\tau + \mu S, \\ |F_2| &\leq \left(\frac{\beta b}{\mu} + \frac{\gamma_0}{(1 - \gamma_1\sigma)} + \mu \right) I, \\ |F_3| &\leq \varepsilon\sigma + b + \left(\frac{\gamma_0}{(1 - \gamma_1\sigma)} \right) I + \alpha I_\tau + \mu R. \end{aligned}$$

Застосувавши теорему 2 отримаємо висновок про існування неперервного розв'язку на довільному інтервалі $(0, t)$, отже на півосі $(0, \infty)$.

При $t > \tau$ для розв'язку $I(t)$ початкова функція неперервна на $[0, \tau]$, тому розв'язок диференціальний при $t > \tau$ [14]. $\square$

5. Стани рівноваги.

Для моделі (7), (9), (11), стани рівноваги є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} b - \beta SI + \alpha I + \varepsilon(E - K) - \mu S = 0, \\ \beta SI - \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \mu I = 0, \\ \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \alpha I - \varepsilon(E - K) - \mu R = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Один із розв'язків системи (15), коли $E_1 = K$, набуває вигляду:

$$I_1 = 0, \quad E_1 = K, \quad S_1 = b/\mu, \quad R_1 = 0, \quad (16)$$

і відображає стан відсутності епідемії серед населення популяції.

Якщо $I \neq 0$ і $E_2 = K$, то із системи рівнянь (15) одержується ще один розв'язок:

$$S_2 = \frac{\gamma_0 + \mu}{\beta}, \quad I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\beta(\gamma_0 + \mu - \alpha)}, \quad R_2 = \frac{(\gamma_0 - \alpha)I_2}{\mu}. \quad (17)$$

Нехай виконується нерівність

$$\mu(\gamma_0 + \mu) < \beta b, \quad (18)$$

тоді $S_2 < N(\infty) < b \setminus \mu$.

Значення $I_2 > 0$, оскільки $\gamma_0 + \mu - \alpha > 0$ на підставі умови 3 теореми 1, а $\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu) > 0$ при виконанні нерівності (18). Компоненти $I_2 > 0$ і $R_2 > 0$, оскільки $\gamma_0 - \alpha > \alpha\sigma\gamma_1 > 0$.

6. Стійкість станів рівноваги.

Застосуємо для дослідження стійкості розв'язку (16) критерій стійкості за лінійним наближенням [15]. Характеристичне рівняння, яке відповідає лінеаризованій системі рівнянь (4), (7), (9) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -re^{-\Delta\lambda} - \lambda & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\beta I - \mu - \lambda & -\beta S + \alpha e^{-\tau\lambda} \\ \frac{\gamma_0\gamma_1}{(1+\gamma_1(E-K))^2} I & \beta I & \beta S - \frac{\gamma_0}{1+\gamma_1(E-K)} - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для стану рівноваги (16) одержимо:

$$(re^{-\Delta\lambda} + \lambda)(\mu + \lambda)\left(\frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu - \lambda\right) = 0.$$

Корені рівняння

$$re^{-\Delta\lambda} + \lambda = 0$$

лежать у лівій півплощині $Re(\lambda) < 0$, якщо виконується умова (6). Власні значення $\lambda_1 = -\mu < 0$ і $\lambda_2 = \frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu < 0$, якщо виконується умова (18) або базове репродуктивне число

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\gamma_0 + \mu)} < 1. \quad (19)$$

Отже, справджується твердження.

Теорема 4. *Нехай виконується умова (6) і базове репродуктивне число $R_0 < 1$. Тоді стан рівноваги (16) локально асимптотично стійкий і поширення епідемії не відбувається.*

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи для стану рівноваги (17), де $E_2 = K$, набуває вигляду:

$$(e^{-\Delta\lambda} + \lambda) (\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha e^{-\lambda\tau})) = 0,$$

де

$$a = \beta I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\gamma_0 + \mu - \alpha}.$$

Якщо $\tau = 0$, що означає миттєву втрату імунітету, для λ_1 і λ_2 одержується характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha) = 0.$$

Оскільки $\alpha + \mu > 0$, $\alpha > 0$, то при виконанні умови 6 і нерівності

$$\alpha\beta I_2 < \gamma_0 + \mu - \alpha$$

або

$$\alpha(\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)) < (\gamma_0 + \mu)(\gamma_0 + \mu - \alpha),$$

стан рівноваги (17) асимптотично стійкий.

Якщо імунітет після одужання не втрачається, $\alpha = 0$, то маємо рівняння:

$$\lambda^2 + \mu\lambda + a(\gamma + \mu) = 0,$$

корені якого $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$.

Отже, при виконанні умови (6) для $n = 1$, умов теореми 1 і умови (18), розв'язок (17) локально асимптотично стійкий.

7. Комп'ютерне моделювання.

Наведемо результати комп'ютерного моделювання динаміки епідемії зі змінною екологічного фактору $E(t)$ - розв'язком рівняння (4). Нехай запізнення $\Delta = \tau = 1$, $K = 0.25$, $n = 1$, початкові умови: $S(0) = 0.99$, $I(0) = 0.01$, $R(0) = 0$.

Якщо імунітет не втрачається ($\alpha = 0$) і відсутній вплив екологічного фактору на осіб, схильних до інфікування, динаміка процесу близька до динаміки SIR -моделі, $S(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рис 2 та рис. 3).

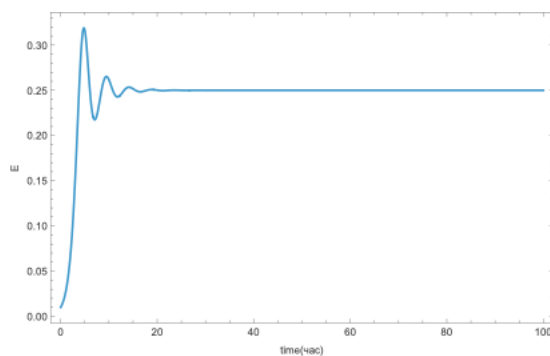


Рис. 2. Графік розв'язку $E(t)$, $r = 1$

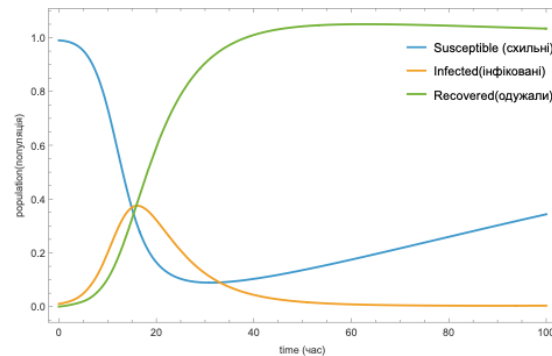


Рис. 3. Графіки розв'язків S, I, R .
Параметри: $\beta = 0.5$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, $b = 0.005$, $\mu = 0.001$.

Якщо імунітет втрачається після одужання через час $\tau = 1$, то під впливом екологічного фактору з ростом коефіцієнта r спостерігається коливання факторів S, I та R . З часом є прямування значень факторів до стійких станів рівноваги (рис. 4, рис. 5), але при цьому залишається доля інфікованих осіб, яка зростає.

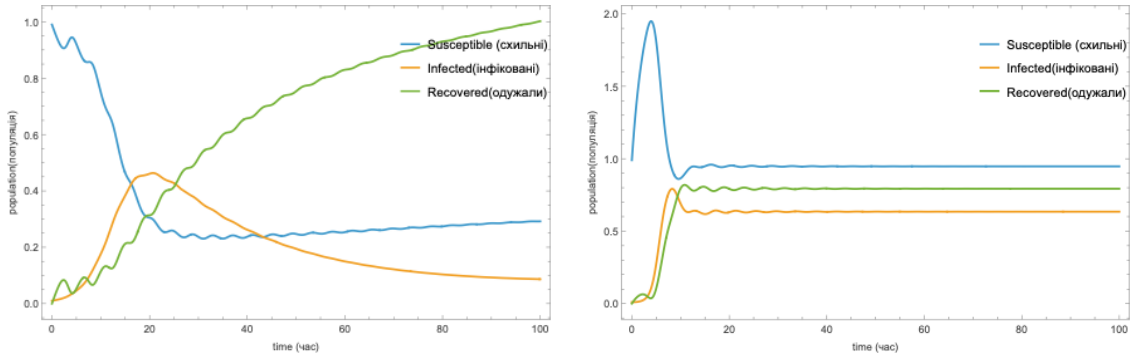


Рис. 4. Динаміка S, I, R із врахуванням $E(t)$. Параметри: $\beta = 0.5|0.95$, $\gamma_0 = 0.15|0.5$, $\gamma_1 = 1|0.7$, $\varepsilon = 0.06|0.2$, $\alpha = 0.1$, $b = 0.005$, $\mu = 0.001$, $r = 1.5$

Якщо $r\Delta = 2 > \pi/2$, то стійкість стану рівноваги $E = K$ втрачається і розв'язок $E(t)$ має коливний характер. Такий вплив екологічного фактору $E(t)$ призводить до періодичної зміни розв'язку моделі(7), (9), (11).

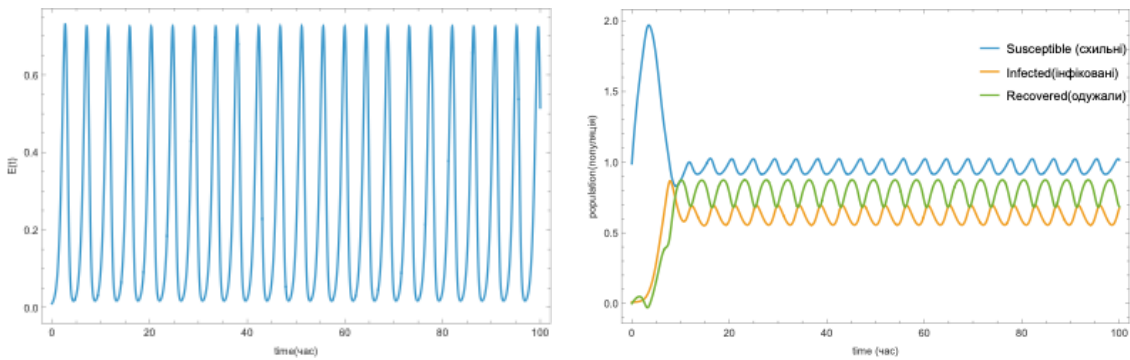


Рис. 5. Графіки розв'язків S, I, R із врахуванням коливної динаміки фактору $E(t)$. Параметри:

$$\beta = 0.95, \gamma_0 = 0.5, \gamma_1 = 0.7, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0, b = 0.95, \mu = 0.4, r = 2$$

8. Висновки.

Отже, як аналітичні дослідження, так і комп'ютерне моделювання підтверджують вплив екологічного фактору на перебіг епідемії. Зокрема, на існування і значення станів рівноваги, їх стійкість, появу коливань чисельності груп населення, схильних до інфікування, інфікованих і тих, що одужали. Ще одним фактором, як впливає з умов теореми 4, на перебіг епідемії впливає втрата імунітету особами, які перехворіли. Зменшити такий вплив можна зменшивши коефіцієнт α , що можливо, зокрема, при проведенні вакцинації і набуття стійкого імунітету.

Список використаної літератури

1. Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer: New York–Heidelberg–Dordrecht–London.
2. Brauer, F., van den Driessche, P., & Wu, J. (2008). *Mathematical Epidemiology*. Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg.
3. Arino, O., Hbid, M. L., & Ait, E. (2006). *Delay Differential Equations and Applications*. Springer.
4. Ma, Z., & Li, J. (2009). *Dynamical modeling and analysis of epidemics*. World Scientific Publishing Co: Singapore.
5. Cooke, K., van den Driessche, P., & Zou, X. (1999). Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. *Journal of Mathematical Biology*, 39, 332–352.
6. Foryś, U. (2012). Problems with modelling using delay differential equations. *Scientific Bulletin of Chernivtsi National University. Mathematics*, 2(2–3), 164–169.
7. Foryś, U. (2000). Modele matematyczne w epidemiologii i immunologii. *Matematyka stosowana*, 1(42), 35–67.
8. Beretta, E., & Takeuchi, Y. (1995). Global stability of an SIR epidemic model with time delays. *Journal of Mathematical Biology*, 33(3), 250–260.
9. Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). Contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Statistical Society A*, 115, 700–721.
10. Smith, H. (2011). *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer Science+Business Media.
11. Bihun, Y., Ukrainets, O. (2024). Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. *Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences*, 18(2), 7–17.
12. Stiefs, D., Venturino, E., & Feude, U. (2009). Evidence of chaos in eco-epidemic models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 6(4), 855–871.
13. Galvani, A. P. (2003). Epidemiology meets evolutionary ecology. *Trends in Ecology and Evolution*, 18(3), 132–139.
14. Driver, R. D. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer: New York–Heidelberg–Dordrecht–Berlin.
15. Hale, J. K., & Lunel, S. M. V. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer: New York.

Bihun Y. Y., Ukrainets O. Z. Mathematical modeling of the spread of the epidemic with the environmental factor.

The study proposes a mathematical model of epidemic spread that accounts for environmental pollution, which may exacerbate the negative impact on the course of the epidemic. The model is based on the well-known SIR framework, extended to incorporate an integral ecological factor $E(t)$, as well as population birth and mortality rates. The dynamics of the susceptible population depend on the deviation of the pollution level from a certain permissible threshold K and on the loss of immunity to the disease after a time period $\tau > 0$. The proportion of infected individuals increases with the growth of the quantity $E(t) - K$. The existence and non-negativity of solutions to the model for $t > 0$ are established, and equilibrium states along with their conditions of existence are identified. Stability conditions for the epidemic-free and epidemic states are derived. Finally, the dynamics of the proposed model is analyzed through computer simulations.

Keywords: Epidemic, mathematical model, time delay, steady-state solution, stability of solutions, differential-functional equations, population, computer simulation

Одержано 02.09.2025